VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

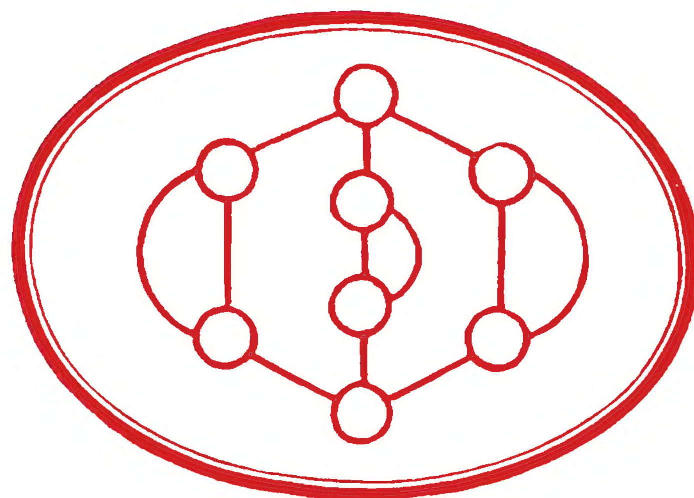


Л. В. АССУР

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИХ СТРУКТУРЫ И КЛАССИФИКАЦИИ



РЕДАКЦИЯ, СТАТЬЯ И ПРИМЕЧАНИЯ АКАДЕМИКА И. И. АРТОБОЛЕВСКОГО

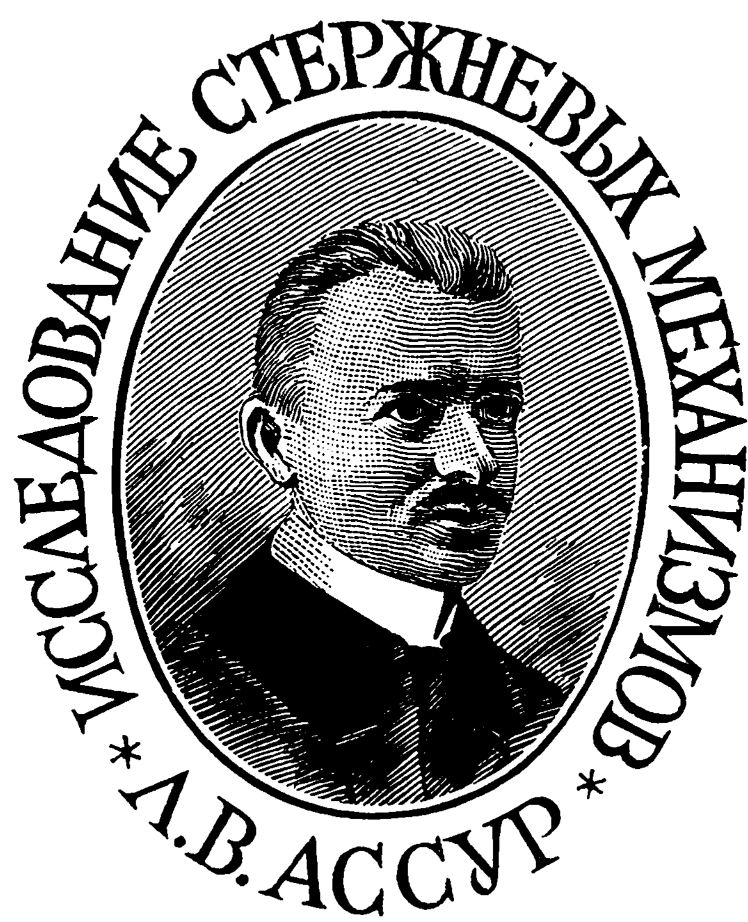


ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1952

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Основана академиком *С. И. Вавиловым.*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *К. М. Быков*, академик *В. А. Казанский*, академик *О. Ю. Шмидт*, академик *А. И. Опарин*, член-корреспондент АН СССР *Н. Н. Андреев*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, член-корреспондент АН СССР *А. А. Максимов*, член-корреспондент АН СССР *Д. И. Щербаков*, член-корреспондент АН СССР *П. Ф. Юдин*, доктор химических наук *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов*, кандидат географических наук *Д. М. Лебедев*, ученый секретарь *Д. В. Ознобишин.*


ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ
* Л.В. АССУР *

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УЧЕНИЕ О НОРМАЛЬНЫХ МНОГОПОВОДКОВЫХ ЦЕПЯХ И РОЛЬ ИХ В ОБРАЗОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ



Глава первая[1]

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ОБРАЗОВАНИЯ НОВЫХ МЕХАНИЗМОВ *

Единственный общий прием, который принято указывать в курсах кинематики **, образования новых механизмов из существующих уже, присоединяя к ним новые звенья, состоит в том, чтобы к двум точкам данного механизма присоединять шарнирно концы двух стержней, два других конца которых также шарнирно между собой соединены. Прием этот настолько элементарен, что затруднительно указать, кто первый его придумал. В пространстве соответствующий этому прием указан еще Ампером *** в его доказательстве принципа виртуальных перемещений, где он из системы, обладающей одной степенью свободы, образует другую, тоже с одной степенью свободы, присоединяя к первой ряд новых точек, так, чтобы каждая из них была связана с тремя ее точками стержнями неиз-

---

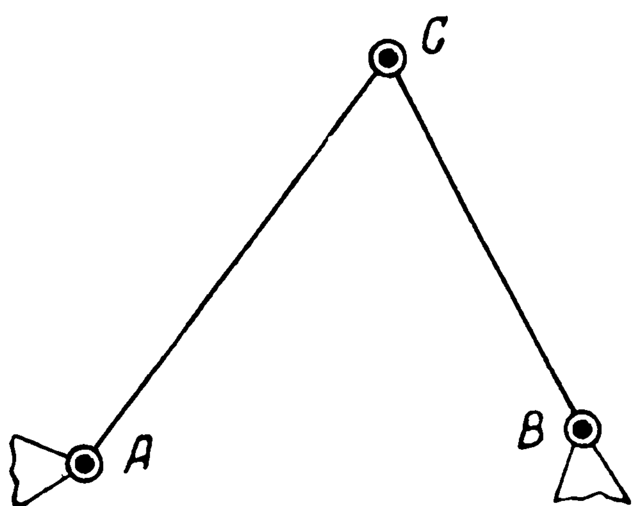
* Первое издание книги Л. В. Ассура, вышедшее из печати в 1916 г., изобиловало погрешностями вследствие крайне небрежной корректуры и технической редакции. Необходимые исправления, не имеющие принципиального характера, сделаны редакцией для настоящего издания *(Ред.)*.

** Burmester. Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 421— Reuleaux Lehrb. d. Kinematik, H. I, S. 578.

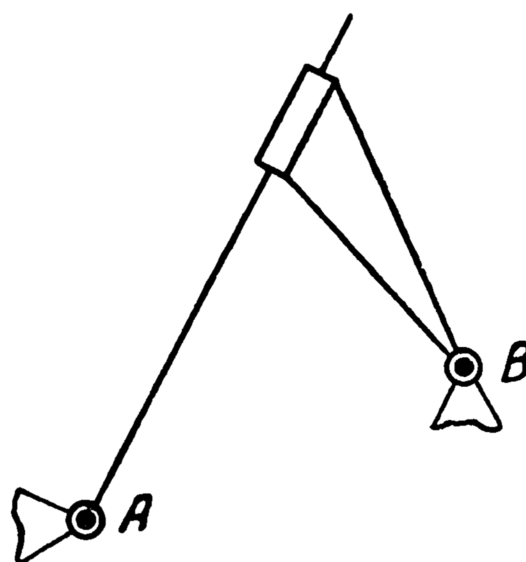
*** Эта ссылка основывалась на авторитете моего уважаемого учителя проф. Н. Е. Жуковского, который в своих лекциях по механике системы пользуется амперовым доказательством принципа виртуальных отклонений. При проверке оказалось, что Н. Е. несколько изменил подлинное доказательство Ампера, помещенное в «Journal de l' Ecole Polytechnique», Cah. XIII, Tôme VI, за 1806 г., причем в последнем ряд новых точек присоединяется иным способом, чем здесь указано.

меняемой длины. В плоскости на этот прием обращает внимание Сильвестр, который предлагает * называть комбинацию обоих присоединяемых стержней диадой.

Мы не находим никаких прямых указаний на какой-либо иной прием образования новых механизмов из данного присоединением новых звеньев, но можно с уверенностью утверждать, что один такой прием был известен и лишь случайно,



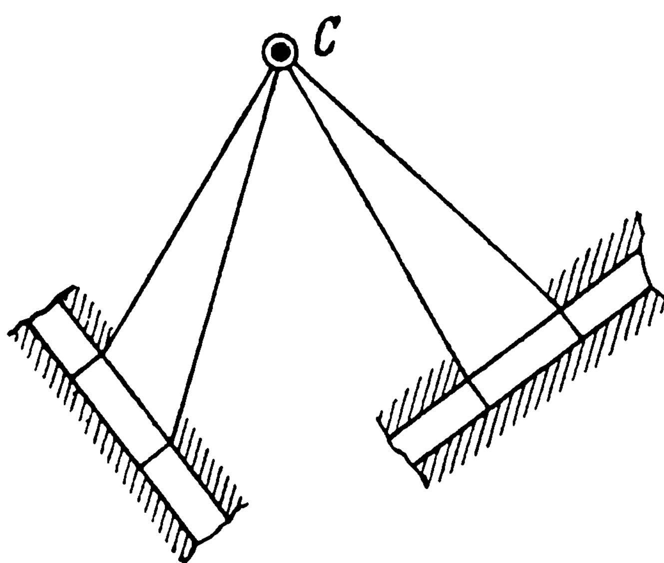
Фиг. 1.



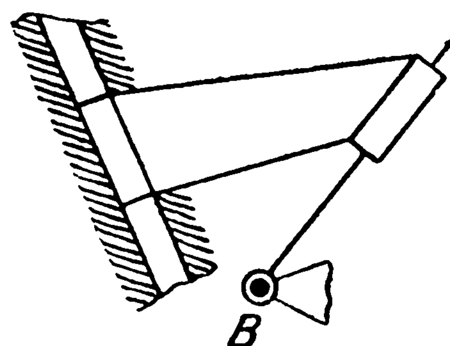
Фиг. 1а.

быть может, потому, что не предполагали возможности сделать из него какие-либо плодотворные выводы, не подчеркивался надлежащим образом.

Прием, о котором идет речь, состоит в том, что три стержня прикрепляются каждый одним концом к трем точкам неизменяемого звена; оставшиеся свободными концы трех стержней



Фиг. 1б.

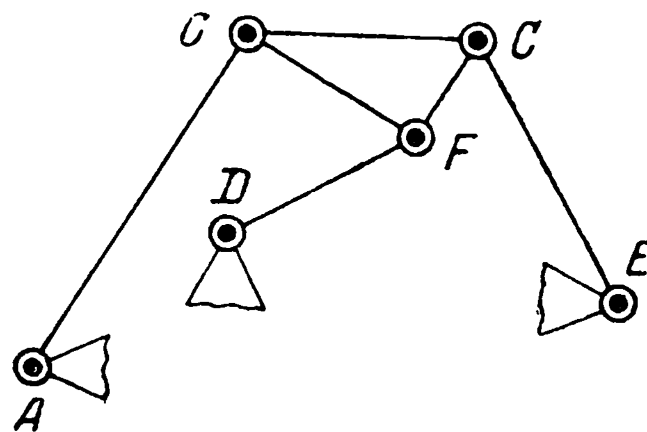


Фиг. 1в.

* M. V. Liguine. Sur les systèmes de tiges articulées. Nouv. annales de mathém., 1875, стр. 570.

могут быть, в свою очередь, присоединены к трем точкам данного механизма, тем самым образуя в совокупности с ним новый. Только что указанную схему поводков, состоящую из трехшарнирного звена и трех стержней (фиг. 2), условимся называть трехповодковой группой, и, ради однообразия обозначений, Сильвестровскую диаду — двухповодковой (фиг. 1).

Методы исследования движений механизмов, содержащих трехповодковую группу, существенно отличаются от методов, применяемых к механизмам, образованным с помощью последовательного наслоения одних только двухповодковых групп *. Поэтому кинематике отдельных механизмов, содержащих эту группу, посвящается довольно обширная литература. Если же роль самой группы в образовании механизмов не была усмотрена или, по крайней мере, в достаточной степени отмечена, то этому в немалой степени должно было содействовать то обстоятельство, что простейшие из механизмов подобного рода при обращении превращаются в механизмы, составленные с помощью наслоения групп двухповодковых. Между тем после Рело все внимание исследователей было обращено на изучение свойств кинематических цепей с полным числом условий**,



Фиг. 2.

* Уже в первый год моей преподавательской деятельности в С.-Петербургском политехническом институте предлагавшиеся мной для исследования на упражнениях по прикладной механике механизмы были разделены на две группы, в зависимости от того, содержат ли они трехповодковую группу или нет, ввиду отличия в приемах исследования; каждая из этих групп была отмечена на отдельной табличке. Кулисного механизма Гейзингера в этих таблицах не имеется: он до сих пор мог трактоваться только совершенно индивидуально, вне связи с другими употребительными механизмами.

** Так, мы условимся передавать немецкий термин: «zwangläufige» Ketten, смысл которого может считаться общеизвестным; цепи с полным числом условий превращаются в системы с одною степенью свободы, если одно из звеньев цепи установить неподвижно.

и наталкивались на новые обстоятельства лишь в том случае, когда указанное упрощающее цепь условие отсутствовало; тогда лишь приходилось изыскивать особые приемы исследования. Но подобного рода цепи рассматривались тогда совершенно индивидуально, вне всякой связи с особенностями их структуры.

Любопытный пример подобного рода исследования представляет статья * Риттерсгауза: «Die Interferenzkurbelkette», где рассматривается кинематическая цепь, получаемая через присоединение к простой четырехзвенной цепи трехповодковой группы **. Далее рассматривается сходная, по расположению мгновенных центров, другая цепь ***, получаемая присоединением той же трехповодковой группы к трехзвенной цепи с одной высшей парой — два цилиндрических зубчатых колеса, оси которых помещены в третьем звене; один из поводков бесконечной длины, т. е. пара вращения заменена прямолинейной парой скольжения,— и при всем том ни слова о роли самой группы в образовании новых цепей или механизмов.

Бурместер продолжает чисто формально работу Рело, столь подробно исследовавшего всевозможные формы механизмов, в основе которых лежит четырехзвенная цепь, и обращается сначала к изучению кинематических цепей, образованных из шести звеньев ****; здесь он отметил две существенно различных комбинации, которые он предложил называть цепью Уатта и цепью Стефенсона. Первая из них не представила никаких затруднений для кинематического исследования, вторая же обращается в механизм, для которого не всегда, а лишь в зависимости от звена, на которое поставлена цепь, возможно построение ускорений точек, указанными в трудах Бурместера приемами. В том виде, как эта цепь применена в кулисном

* Civiling, B. 26.

** Taf. XIII, Fig. 1.

*** Taf. XIII, Fig. 11.

**** Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 434.

механизме Стефенсона (см. фиг. А на стр. 38), этих приемов уже недостаточно. Дело в. том, что последний, с развиваемой нами точки зрения, составлен присоединением к простому кривошипу трехповодковой группы, так что два поводка присоединяются к кривошипу, а третий — к неподвижному звену (устою, основе); присутствие этой группы и служит осложняющим обстоятельством.

Что касается восьмизвенных цепей, то они не исследованы у Бурместера полностью; указана лишь * обладающая особенностями, в смысле построения мгновенных центров, цепь, дающая начало механизму, названному им трехповодковым, и которая тождественна с только что упомянутой цепью Риттерсгауза. Первое исследование свойств этой цепи опубликовано обоими авторами одновременно в том же журнале. Однако Бурместер не только упустил указать более простые восьмизвенные цепи, но и не упоминает вовсе о более сложной восьмизвенной цепи, чем та, которая лежит на основе трехповодкового ** механизма. Эта цепь, получаемая шарнирным присоединением к двухповодковой группе четырех свободных концов четырехповодковой группы (см. ниже), впервые указана Грюблером ***. Четырехповодковая группа отличает также кулисный механизм Гейзингера.

Помимо такого индивидуального исследования некоторых кинематических цепей, мы находим у Бурместера еще три общих приема образования механизмов соединением в одну двух кинематических цепей с полным числом условий ****. Один из этих приемов дает начало механизмам, исследование обстоятельств движения которых значительно упрощается, если разбить их на два самостоятельных механизма, две точки которых оказываются соединенными стержнем неизменяемой длины.

* Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 452.

** Впервые мне пришлось слышать перевод слова: «Dreispannmechanismus» термином : «трехповодковый» механизм от К. Э. Рериха.

*** Civiling, B. 29, Taf. XXI, Fig. 9, f. u. 10, d.

**** Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 423.

Этими трудами исчерпывается индивидуальное исследование различного рода кинематических цепей *в общем виде*, т. е. независимо от соотношений метрического характера: слишком бесплодным казался тот путь, где пришлось бы посвящать отдельный труд для каждого четного числа звеньев.

Новое начало вносит в теорию механизмов Грюблер*. Статьи его занимаются исключительно вопросами структуры механизмов, вернее, кинематических цепей с полным числом условий, и только с низшими парами; поэтому нам, хоть вкратце, придется остановиться на той роли, которую его метод играет в теории механизмов.

Грюблер дал общий критерий, позволяющий определить, обладает ли данная плоская кинематическая цепь полным числом условий, или же она будет жесткая, но статически определимая, или же, наконец, жесткая, статически неопределимая; при этом цепь может быть какой угодно сложности. Таким образом, разрешается вопрос, важный не только в теории механизмов, но и в теории ферм. Весь метод основан на некоторых алгебраических зависимостях между числом звеньев и числом кинематических пар в подобного рода цепях, причем метрические соотношения так же, как и в нашем исследовании, не играют роли. Особые случаи, когда при известных метрических соотношениях и определенных конфигурациях механизмов общие выводы неприменимы, Грюблером вовсе не рассматриваются, так же, как и у нас, за исключением случаев, когда механизм эквивалентен другому, в котором ряд шарнирных соединений располагается на бесконечно удаленной прямой. Особенности этого случая заставили его выделить в отдельную статью ** рассмотрение кинематических цепей, с прямолинейными парами скольжения, несмотря на геометрическую эквивалентность обеих плоских низших пар. Мы укажем здесь лишь важнейшие выводы, имеющие вполне общее значение.

* Civiling, B. 29. Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten.

** Verhandlungen z. Beförderung des Gewerbefleiss, 1885, т. 64.

Обозначая все число шарниров в цепи через N, число звеньев, содержащих по k шарниров каждое, — через n_k, а полное число звеньев в цепи — через n, мы совершенно независимо от характера шарниров, т. е. от того, сколько звеньев соединяются между собою в одном шарнире, можем написать для кинематической цепи:

во-первых, с полным числом условий:

$$2N - 4 = \sum_k (2k - 3)\, n_k,$$

где $k \geqslant 2$;

во-вторых, жесткой, статически определимой:

$$2N - 3 = \sum_k (2k - 3)\, n_k,$$

где $k \geqslant 2$;

в-третьих, жесткой, но статически неопределимой:

$$2N - 3 < \sum_k (2k - 3)\, n_k,$$

где $k \geqslant 2$.

Эти условия нередко * трактуются, без надлежащих оговорок, как необходимые и достаточные для того, чтобы отличить цепи первых двух родов; между тем указанный в первых двух признак может оказаться и недостаточным и не необходимым, если только, отбросив некоторое число стержней, в результате можно получить цепь жесткую, статически неопределимую. Поэтому раньше, чем пользоваться первыми двумя из указанных признаков Грюблера, необходимо отбросить *всеми возможными* способами сначала по одному звену из данной цепи, затем по два и т. д. и всякий раз исследовать, не получается ли в остатке жесткое, статически неопределимое сочетание звеньев, удовлетворяющее третьему из указанных условий. Чтобы заключения, сделанные на основании первых двух признаков, могли считаться вполне правильными, необходимо и достаточно, чтобы *к каждому остатку*, в котором нет звеньев,

* Сам Грюблер, опуская в первой, названной выше из своих статей указанную здесь оговорку, все же приходит к сознанию необходимости оговорок в статье, посвященной теории простейших ферм (Rigasche Industrie-Zeitung, B. 13, S. 49).

прикрепленных лишь одним шарниром, не был приложим третий признак.

Насколько просто применить признак Грюблера без проверки, вытекающей из указанной оговорки, настолько же трудно, в особенности в цепях с большим числом звеньев, убедиться в том, что признак этот приложим к данной цепи, так как требуется пересчитать весьма большое число комбинаций; вследствие этого ценность его в значительной степени умаляется.

Однако Грюблеру удалось проникнуть еще дальше в строение кинематических цепей с полным числом условий. Для цепей, в которых не встречается шарниров, соединяющих более чем два звена, он дает соотношения:

$$\sum_k n_k = n,$$

$$\sum_k kn_k = 3n - 4, \qquad \text{где } k \geqslant 2.$$

Эти соотношения, однако, приложимы и к цепям, в которых имеются шарниры, соединяющие между собою больше двух звеньев, если считать шарнир, соединяющий между собой i звеньев, результатом совпадения в одном, и притом любом из последних $(i - 1)$ шарнира.

Только что указанные два соотношения Грюблер рассматривает как линейные неопределенные уравнения относительно величин n_k, требующие, по существу задачи, решений только в целых числах. Таким образом, простой расчет позволяет определить, какие именно кинематические цепи, пригодные для образования механизмов, можно составить при заданном числе звеньев. Этим путем найдена выше упомянутая восьмизвенная кинематическая цепь, более сложная, чем указанная Риттерсгаузом и Бурместером.

Метод Грюблера представляет, по сравнению с тем эмпиризмом, который и после Рело господствовал в построении сложных кинематических цепей, значительный шаг вперед. К сожалению, и последний из указанных Грюблером приемов не лишен недостатка, делающего применение его мало надежным

и предоставляющего довольно обширное поле эмпирическому разрешению проблем структуры механизмов. Дело в том, что алгебраическим разрешением указанных уравнений задача не исчерпана с геометрической точки зрения. Алгебраическое решение говорит нам, что механизм с n-звеньями можно составить, взяв некоторое, определенное уравнениями, число звеньев двухшарнирных, трехшарнирных и т. д.; но уравнения ничего не говорят о расположении этих звеньев. Как показал уже сам Грюблер *, можно из одного и того же комплекса звеньев, выбранного на основании одной группы решений указанных неопределенных уравнений, составить иногда несколько существенно различных кинематических цепей, иногда же нельзя составить и одной.

Таким образом, легко пропустить возможную комбинацию или же бесплодно стремиться осуществить комбинацию фактически невозможную. Относительно же числа возможных комбинаций, соответствующих одной и той же группе решений, метод Грюблера никаких указаний не дает; равным образом, в нем не содержится ничего такого, чем можно было бы воспользоваться для создания классификации механизмов.

Кроме указанных трудов, имеется еще статья Таубелеса, помещенная в мало распространенном журнале Немецкого политехнического союза в Богемии; указания на эту статью были известны мне, причем казалось, что содержание ее весьма близко подходит к трактуемым нами вопросам; лишь когда не только полное содержание настоящей статьи было намечено, но первые две главы уже окончательно разработаны и отредактированы, мне удалось познакомиться со статьей Таубелеса в ее подлиннике: оказалось, что автор ее избрал путь образования механизмов, который несомненно приводит к новым формам, но не дает ни малейшей надежды на возможность какой-либо системы классификации этих форм. Этот путь состоит в том, чтобы образовать новые механизмы из цепей, которые, будучи

* Civiling, B. 29, S. 188—189; S. 191.

поставлены на одно звено, обладают более чем одною степенью свободы; лишая их определенного числа степеней свободы, всегда можно получить механизм; равным образом можно получить механизм из жестких, статически определимых соединений звеньев, сообщая им одну степень свободы.

Интересны приемы, с помощью которых изменяется число степеней свобод механизма. Исходной точкой служит только соединение двух звеньев между собой шарниром, лишающее систему двух степеней свободы, и соединение двух звеньев между собой двухшарнирным звеном, лишающее одной степени свободы. Следует приветствовать введение числа, характеризующего изменяемость цепи и равного числу степеней свободы ее без трех, но-почему-то взятому с обратным знаком; поэтому положительной изменяемостью обладают только жесткие, статически неопределимые сочетания звеньев, все же цепи изменяемые обладают отрицательною степенью изменяемости (Grad der Kette). Содержание этой части статьи оказалось мне, за некоторыми исключениями, хорошо известным, так как совершенно те же результаты были в свое время получены мною независимо лично, но не опубликованы, как не проливающие достаточно света на вопросы структуры механизмов. Новым для меня и существенным явился один прием изменения числа степеней свобод кинематической цепи. Сущность этого приема состоит в следующем.

Если в данном звене механизма слить все шарниры в одну точку, независимо от числа соединяемых каждым из них между собою звеньев, другими словами, уменьшить размеры звена до бесконечности, то число степеней свободы цепи уменьшится на одну. Отсюда следует и обратный прием: можно разъединить шарнир и шарнирно присоединить звенья, бывшие этим шарниром связанными, к новому звену, причем число степеней свободы цепи возрастает на одну. Этим соображением можно было бы воспользоваться при обосновании метода развития поводка, лежащего в основе настоящей статьи, но обоснованного у нас иным способом.

Совершенно новым и весьма любопытным является особый прием обращаемости цепей, основанный на только что указанном соображении: на место каждого шарнира ставится звено, содержащее столько шарниров, в которых соединяется по два звена, сколько звеньев соединялось данным шарниром, или же меньшее число шарниров, если в каждом из них соединяются между собой более чем два звена; на место каждого звена становится шарнир, получаемый уменьшением размеров этого звена до бесконечности. Такое обращение, вообще говоря, изменяет число степеней свободы цепи. Для цепей, обладающих одной степенью изменяемости (по нашему; по Таубелесу — одной отрицательной степенью изменяемости), т. е. для таких цепей, которые, будучи поставлены на одно звено, дают начало механизму, этот особый прием обращения дает цепь с той же степенью изменяемости, если число шарниров цепи равно числу ее звеньев; таким образом, эта обращаемость особого рода распространяется и на некоторые механизмы.

Этим исчерпывается существенное значение статьи Таубелеса. Кроме того, эта статья занимается развитием различного рода алгебраических соотношений между числом звеньев цепи, числом ее шарниров и степенью ее изменяемости; последнее обстоятельство отличает ее от статей Грюблера, который занимается лишь цепями с одной степенью изменяемости; оно же показывает, что она является естественным продолжением работ последнего. Во всей статье нельзя отметить ни единой исходной точки для обоснования хоть какой-нибудь классификации механизмов.

Мы считаем исчерпанным перечень работ, имеющих отношение к нашей статье постольку, поскольку они занимаются структурой механизмов. Как увидит читатель дальше, для изучения структуры, механизмов будем пользоваться приемами достаточно самобытными, чтобы отношение это могло считаться довольно отдаленным. По общему характеру статьи она могла бы скорее считаться в теории механизмов продолжением систематизирования, начатого Рело, но едва ли непосредственно примыкает к одному из последующих трудов в этой области.

Глава вторая

МЕТОД РАЗВИТИЯ ПОВОДКА. МНОГОПОВОДКОВЫЕ ОТКРЫТЫЕ ЦЕПИ НОРМАЛЬНЫХ ТИПОВ, ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ; РОЛЬ ИХ В ОБРАЗОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ НАСЛОЕНИЯ. ПЕРВЫЕ ДВА КЛАССА МЕХАНИЗМОВ

Мы видели уже в предыдущей главе, что один из простейших способов образования новых механизмов состоит в присоединении к существующим механизмам сильвестровских диад, или двухповодковых групп, как мы условились их называть. Если шарниры * A и B такой группы (см. фиг. 1, 1а, 1б, 1в на стр. 10) будут занимать в плоскости определенное положение, то положение шарнира C должно определиться в пересечении двух окружностей радиусов AC и BC; таким образом, для точки C получится два возможных положения. Тем не менее определенное движение точек A и B сопровождается определенным движением точки C, если только указать, какое из двух возможных положений занимала точка C в начальный момент, предполагая, что оба возможных положения будут за все время движения оставаться на конечном расстоянии, т. е. расстояние между точками A и B не сделается равным сумме длин AC и BC; это следует из того, что бесконечно малое перемещение точек A и B должно сопровождаться бесконечно малым перемещением точки C.

* Для сокращения, вместо «положение центра шарнира», будем говорить «положение шарнира»; размеры последнего не будут иметь для нас никакого значения и потому можно считать их хотя бы бесконечно малыми; в этом смысле часто употребляют термин: «шарнирная точка».

О пригодности двухповодковой группы для образования новых механизмов указанным приемом можно было бы заключить еще иначе, заметив, что, прикрепляя шарниры A и B к неизменяемой плоскости или просто к неизменяемому плоскому звену, в соединении с последним, получаем жесткое, статически определимое соединение. Это обстоятельство показывает нам, что координаты точки C определяются, если известны координаты точек A и B, причем последние могут быть даны совершенно независимо. Само собою разумеется, что такими значениями координат точек A и B, которые приводят к мнимым значениям координат точки C, можно пренебречь, потому что ни механизмов, ни жестких соединений с мнимыми шарнирами представить себе нельзя. Поэтому к особым случаям или, вернее, особым положениям первоначального механизма следует отнести все те, где определяющие положение точки C окружности не пересекаются; равным образом, особенности будет представлять тот случай, когда обе окружности будут друг друга касаться; в этом случае все три точки A, B и C окажутся на одной прямой, и система, получаемая закреплением первых двух из них, будет обладать бесконечно малою подвижностью. Отсюда следует, что нельзя все три шарнира нашего жесткого соединения заменить прямолинейной парой скольжения, так как при этом центры всех трех шарниров окажутся расположенными на одной и той же прямой, правда, бесконечно удаленной. Последнее обстоятельство отразится, однако, лишь на том, что подвижность системы будет уже не бесконечно малая, а конечная, как легко убедиться непосредственно. Меньшее же число шарниров может удалиться в бесконечность, как показано на примере жестких соединений с основой (плоскостью чертежа) на фиг. 1а, 1б, 1в.

Если имеется какая-нибудь группа соединенных между собой шарнирами звеньев, которая по прикреплении n ее точек к основе дает начало жесткому статически определимому *

* В дальнейшем под жесткой системой мы будем всегда разуметь жесткую, статически определимую, если не сделано никаких оговорок;

соединению, то это показывает, что, дав определенные и независимые между собой значения $2n$ координатам этих точек, мы определим координаты всех остальных. Вот почему, если те же точки прикрепить к точкам данного механизма, получится снова система с одной степенью свободы или механизм. Наши изыскания групп звеньев, которые можно присоединять к существующему механизму, желая получить из него новый, удобно поэтому вести, совершенно исключая из рассмотрения механизм, к которому предполагается присоединить данную группу, а лишь удостоверяясь, что, будучи «пристегнута», как мы условимся выражаться, к неизменяемой основе, она дает начало жесткому, статически определимому соединению. При этом те особые случаи, которые получатся от особого расположения точек прикрепления, когда система, в общем случае жесткая, приобретает бесконечно малую подвижность, мы совсем исключим из рассмотрения.

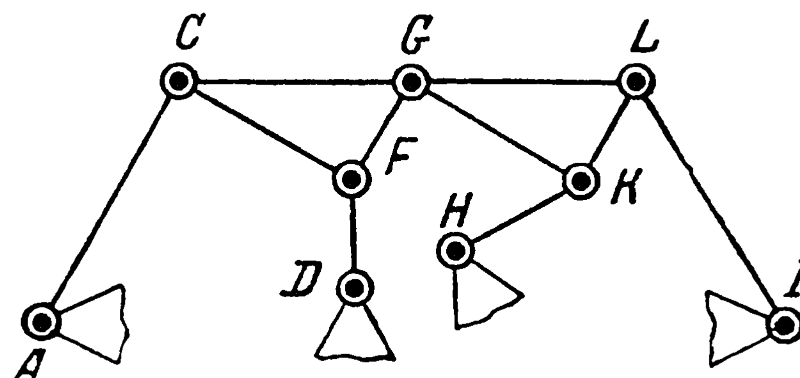
Вряд ли есть надежда разобраться в этих случаях в том общем виде, в котором мы предполагаем вести наше исследование, где метрические соотношения не должны играть роли. Другого рода особые случаи, где вследствие удаления некоторого числа шарниров в бесконечность жесткая система приобретает конечную подвижность, т. е. сама превращается в механизм. Эти случаи могли быть рассмотрены в рамках настоящей работы, однако некоторые трудности заставили автора временно отложить опубликование частично полученных результатов. Таким образом, здесь будет разобран лишь общий случай.

Нетрудно заметить, что трехповодковая группа, будучи пристегнута тремя точками (концами поводков) A, D и E к неизменяемой основе (см. фиг. 2), дает начало жесткому соединению. Сравнивая фиг. 2 с фиг. 1, нетрудно заметить, что трехповодковая группа может быть образована из двухповод-

---

исключаются из этого случаи, где важно констатировать только жесткость, не вникая в характеристику ее.

ковой заменою поводка — в данном случае BC — системой трех звеньев DF, EG, CGF, при этом место окружности радиуса BC займет алгебраическая кривая шестого * порядка, называемая шатунной кривою; кривая эта будет описываться точкой C, если удалить стержень AC. Оставшуюся от трехповодковой группы, по удалении стержня AC, комбинацию звеньев удобно будет в дальнейшем называть двухповодковым звеном.



Фиг. 3.

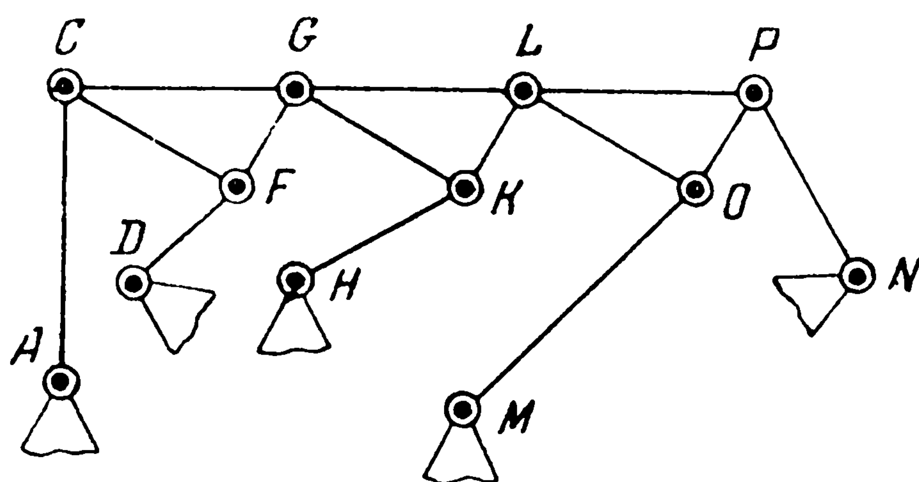
Итак, трехповодковая группа получается из двухповодковой заменой одного из поводков двухповодковым звеном. Только что указанную замену условимся называть развитием поводка.

Так как по шарнирном присоединении поводков трехповодковой группы к неизменяемой основе получается жесткое, статически определимое образование, то последовательным *многократным присоединением трехповодковой группы* можно образовать *новые механизмы* из уже существующих. Хотя подобного рода механизмы в практике осуществляются (например, кулиса Гуча, образованная из кривошипа двукратным присоединением этой группы, см. фиг. В на стр. 39), но, как уже сказано, свойство это в курсах кинематики до сих пор не рассмотрено, хотя такое же свойство группы двухповодковой обычно подчеркивается.

Переходим к изысканию новых групп, которые обладают тем же важным свойством, как обе только что указанные. Прилагая метод развития поводка к трехповодковой группе, получим группу четырехповодковую, а из последней — пятиповодковую (фиг. 3 и 4). Очевидно, что жесткое соединение звеньев останется жестким и после развития поводка, потому что до развития положение одного из его концов определялось

* Burmester. Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 305.

пересечением некоторой кривой с окружностью; теперь же место окружности будет всякий раз занимать кривая шестого порядка. Хотя число точек пересечения последней с кривою и может быть больше, нежели число точек пересечения с нею же окружности, но за исключением особых случаев, когда несколько точек пересечения сливаются в одну, и которые мы из рассмотрения исключили, для нас имеет значение одна какая-нибудь определенная точка пересечения кривых. Существенным для нас является то обстоятельство, что при неподвижном укреплении свободных концов поводков многоповодковая группа дает начало жесткому соединению. Если мы соединим последние шарнирно с какими-нибудь точками данного механизма и зададимся начальной его конфигурацией, то дальнейшее *движение определится вполне единственным способом.*



Фиг. 4.

Дело в том, что начальная конфигурация определяет нам, какую именно из точек пересечения упомянутых кривых мы избрали, а непрерывность изменения конфигурации гарантирует нам, что ряд последующих конфигураций будет единственный, т. е. не может сливаться с теми конфигурациями, которые имели бы место при выборе другой начальной конфигурации группы, соответствующей другой точке пересечения кривых и отстоящей от первой на конечном расстоянии. Всякий раз, когда две или более точек пересечения указанных кривых сливаются в одну, дальнейшее движение не определяется единственным способом; это будет особый случай, из нашего рассмотрения исключенный. Особым может быть не только начальное, данное положение механизма; особые положения

могут возникнуть и в результате изменения конфигурации, сопутствующего движению механизма *.

Благодаря полной симметрии в расположении поводков в двух-, трех-, четырехповодковых группах мы получаем результаты тождественные, какой бы из поводков мы ни начали развивать. Иначе обстоит дело с пятиповодковой группой. Здесь два крайних трехшарнирных звена снабжены двумя поводками, третье, такое же звено, помещенное между ними, — лишь одним поводком. Применяя многократно метод развития поводка, получим результаты, существенно отличные, будем ли мы развивать один из поводков, прикрепленных к крайним звеньям, или поводок, прикрепленный к среднему из трехшарнирных звеньев.

Рассмотрим сначала результат, получаемый при развитии одного из крайних поводков. Заметим, что, отбросив в пятиповодковой группе все поводки, получаем в результате простую разомкнутую цепь, состоящую из трех звеньев, и потому эту группу можно рассматривать как такую цепь, снабженную поводками. Развивая поводок OM, мы замечаем (см. фиг. 4), что у крайнего звена LOP останется поводок PN, отброшенный же поводок заменится трехшарнирным звеном, увеличивающим число звеньев только что указанной цепи на одно и, в свою очередь, снабженным двумя поводками. Нетрудно убедиться, что, развивая, таким образом, последовательно поводок крайнего звена увеличивающихся по сложности строения групп, вообще можем получить n-поводковую группу, состоящую из простой разомкнутой цепи, содержащей (n—2) звена, из которых два крайних снабжены двумя поводками, а средняя — одним.

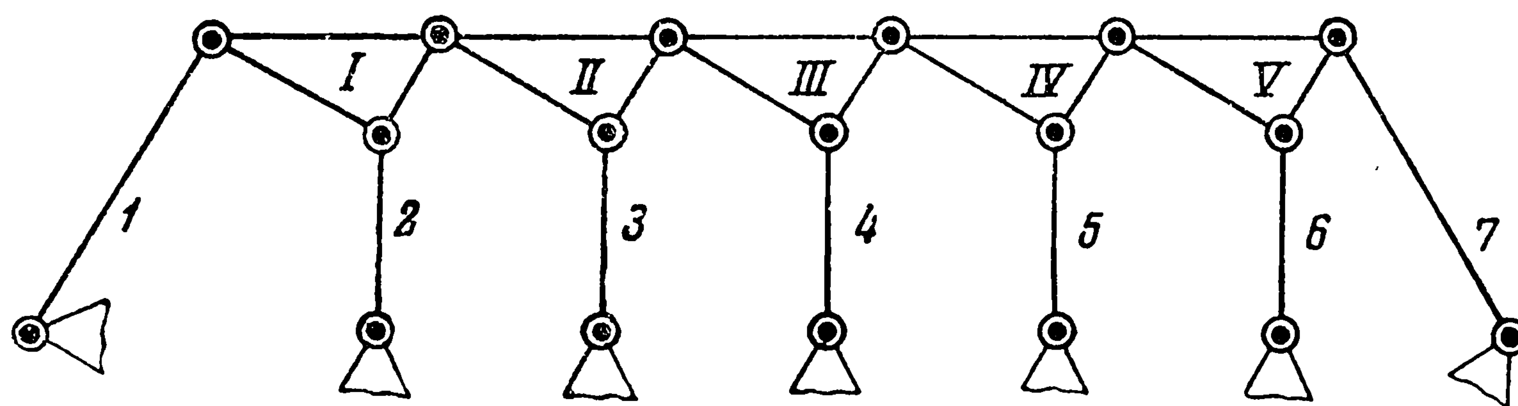
Мы составили чертеж пяти- и семи-поводковой открытой цепи (фиг. 4 и фиг. 5) таким образом, чтобы характерные

---

* Неопределенность дальнейшего движения механизма скажется в том, что скорости, по крайней мере, некоторых его точек станут неопределенными, что выявится при построении картины скоростей (часть II, глава I).

признаки этих цепей наиболее ярко бросались в глаза, но очевидно, что фиг. 4 и фиг. 6, в которых сохранены одинаковые буквенные обозначения, изображают две тождественных, с нашей общей точки зрения, цепи.

Мы покажем теперь, что указанная нами характерная группировка поводков открытой многоповодковой цепи есть единственно возможная, при условии, что цепь эта *не распадается*



Фиг. 5.

на несколько таких же цепей и что она, пристегнутая концами поводков к неизменяемой основе, *дает начало жесткому соединению*. Цепь, обладающая последним свойством, будучи пристегнута своими поводками к механизму, как мы видели, дает всегда начало новому механизму, более сложному, чем данный. Образование механизмов последовательным присоединением целого ряда цепей, этим свойством обладающих, составляет сущность *метода наслоения*.

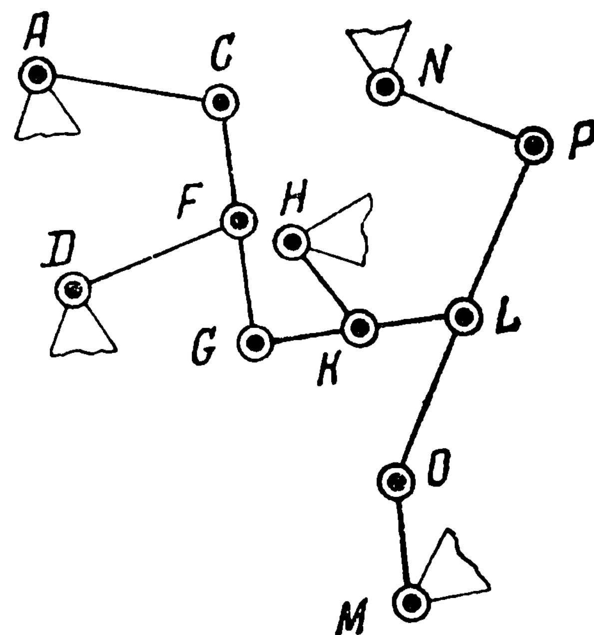
Цепь с указанным числом и характерным расположением поводков мы будем называть открытой, простой цепью нормального типа.

Удаляя в статически определимой жесткой стержневой системе стержень, имеющий только два шарнира, мы уменьшаем число связей на одну вида:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \text{const},$$

где индексами снабжены координаты обеих шарнирных точек. Таким образом, удаление такого стержня преобразует систему жесткую в систему с одною степенью свободы, в механизм.

Если при данной конфигурации последнего мы соединим стержнем неизменяемой длины какие-либо две другие точки его, удовлетворяющие, однако, условию, что расстояние между ними, при этой именно конфигурации механизма не будет ни максимум, ни минимум, а также не останется неизменным при конечном изменении конфигурации механизма, то снова получится жесткая система. Это соображение дает нам право переносить поводок, прикрепленный к одному звену цепи, на другое звено ее, т. е. изменять группировку поводков.



Фиг. 6.

Начнем с переноса одного поводка. Очевидно, что при этом возможны четыре случая:

1-й: с крайнего звена поводок переносится на крайнее,

2-й: с крайнего звена поводок переносится на среднее;

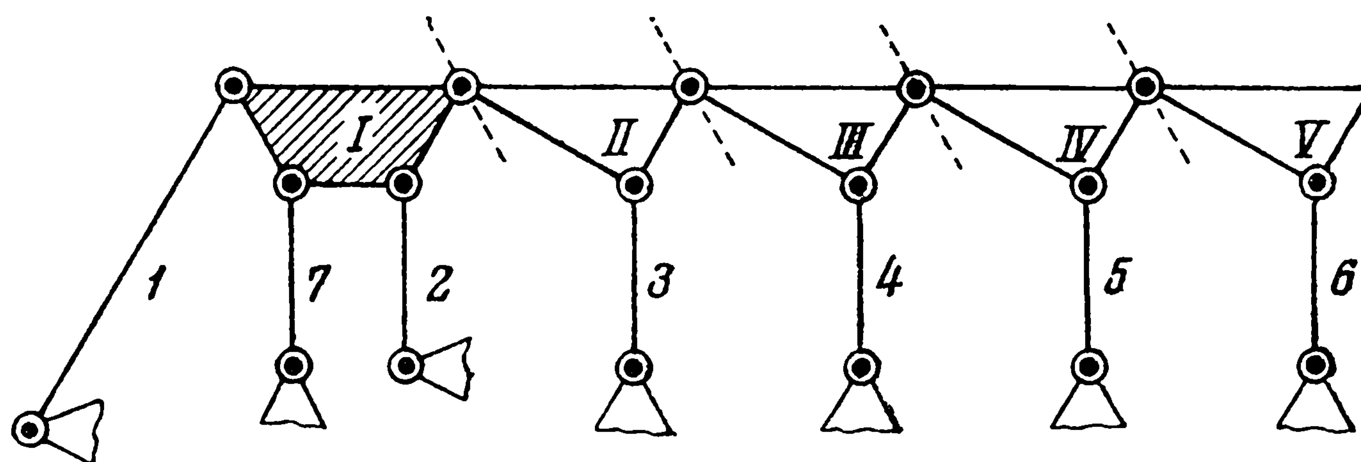
3-й: со среднего звена поводок переносится на среднее;

4-й: со среднего звена поводок переносится на крайнее.

Перенесем поводок 7 (см. фиг. 5) со звена V на звено I, что будет соответствовать первому случаю (фиг. 7); тогда звено I с тремя своими поводками образует трехповодковую группу (для общности, можно сказать также: трехповодковую цепь), которая может быть самостоятельно присоединяема к данному механизму, образуя новый; остальные же звенья цепи каждое со своим поводком образуют двухповодковые группы, которые могут быть присоединяемы одна за другой. Таким образом, при переносе поводка, соответствующим 1-му случаю, n-поводковая цепь распадается на трехповодковую группу и на (n—3) двухповодковых.

Перенесем теперь поводок крайнего звена на одно из средних (фиг. 8); очевидно, что тогда это среднее звено будет иметь два поводка, а между ним и другим нетронутым крайним могут быть заключены звенья только с одним поводком. Группа,

состоящая из этих двух звеньев, снабженных двумя поводками и промежуточных звеньев с одним поводком (последние могут и отсутствовать), есть многоповодковая открытая цепь нормального типа, остальные же звенья прежней цепи вместе со своими поводками, по одному на каждое, образуют двухповодковые группы, последовательно присоединенные к жесткому соединению этой нормальной цепи с основою. И в этом случае цепь распалась.

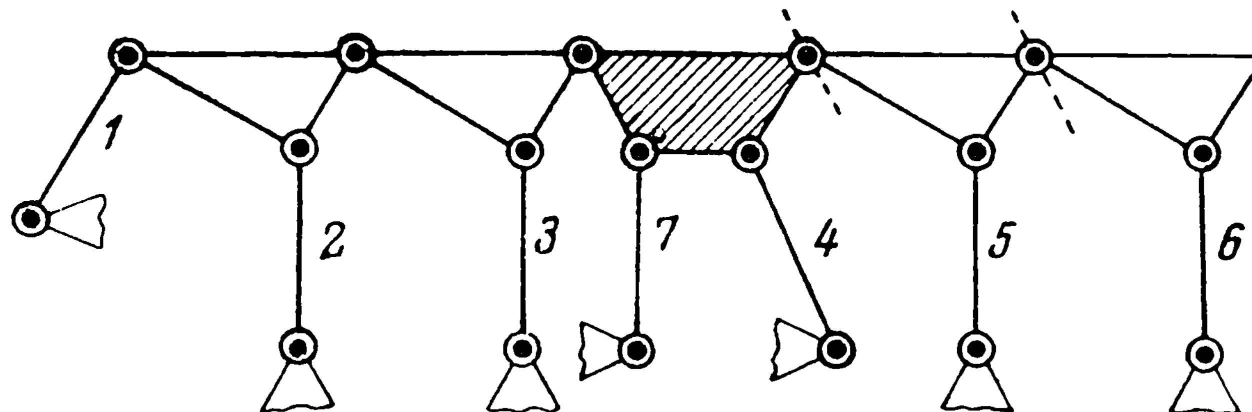


Фиг. 7.

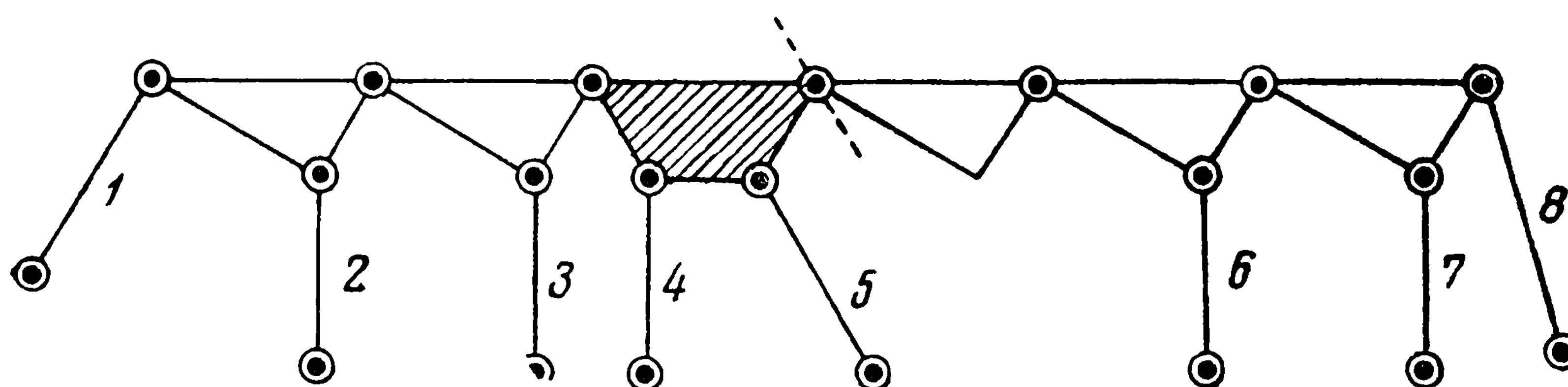
Чтобы разобраться в 3-м случае, перережем многоповодковую цепь в шарнире, соединяющем два звена цепи, и к каждой из двух полученных частей в том же шарнире укрепим по новому поводку; в результате получатся две многоповодковые цепи нормального типа. В самом деле, можно разъединить цепь так, чтобы отделилось *одно* крайнее звено, снабженное, по определению, двумя поводками. Присоединяя к нему третий, получим трехповодковую группу; вторая же часть разъединенной цепи отличается от изучаемого нами типа только тем, что крайнее звено снабжено вместо двух поводков одним; присоединяя этот недостающий поводок, получаем многоповодковую цепь того же типа. Последнее рассуждение полностью применится к обеим частям разъединенной цепи, когда в каждой из них осталось более одного звена.

Проще всего случай переноса поводка со среднего звена на соседнее среднее. Представим же себе, что мы сначала разъединили шарнир между этими звеньями, а затем с правого звена перенесли поводок на левое. Очевидно, в силу предыдущего

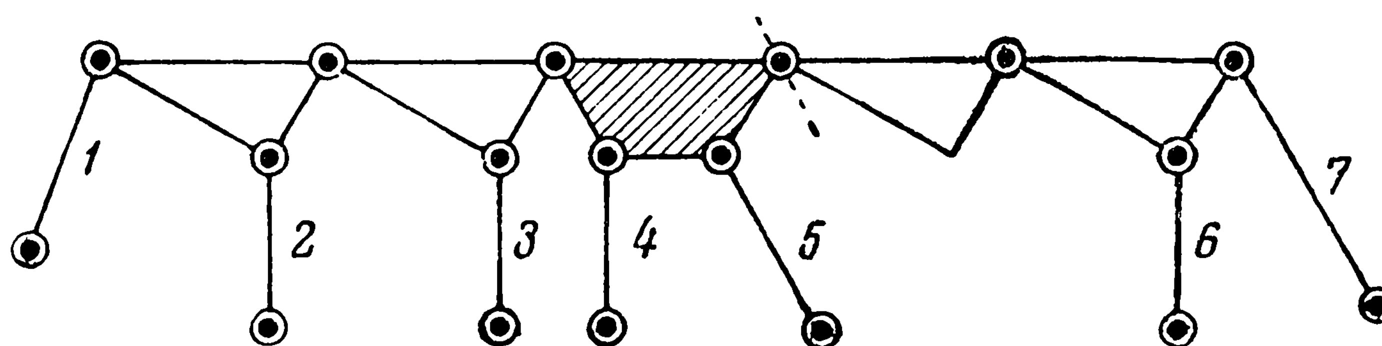
рассуждения, вся левая часть превратилась в многоповодковую цепь нормального типа; но то же случилось и с правой частью, в которой лишенное поводка звено может рассматриваться как добавочный поводок к лежащему правее его звену расстроенной цепи (фиг. 9 и 10). Допустим теперь, что поводок перенесен



Фиг. 8.



Фиг. 9.

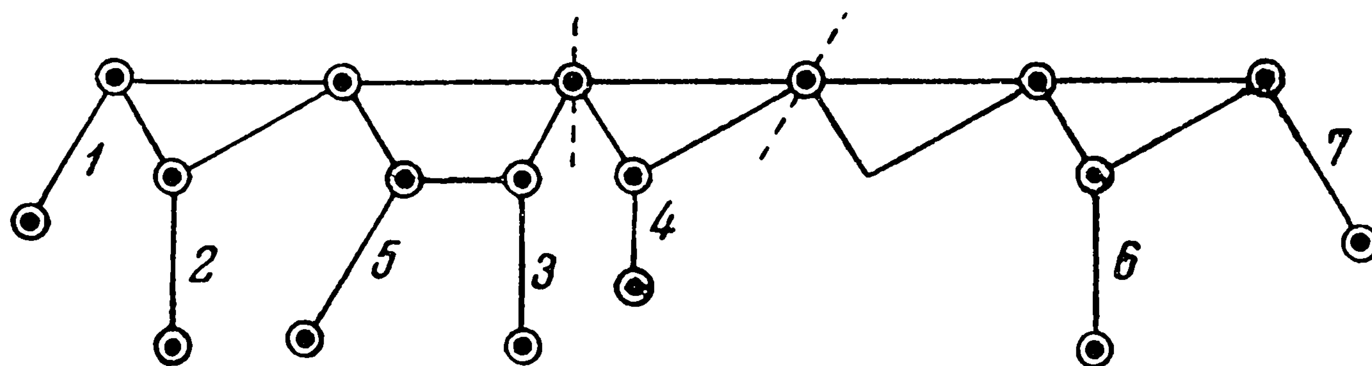


Фиг. 10

опять со среднего звена влево на другое среднее, но не соседнее. В силу тех же рассуждений ясно, что звено, к которому прибавился поводок, со всей левее его лежащей частью образует цепь нормального типа; звенья, лежащие между обоими обменявшимися поводками, образуют каждое со своим поводком по двухповодковой группе, последовательно присоединяемой к жесткому соединению этой цепи с основой, а лишенное

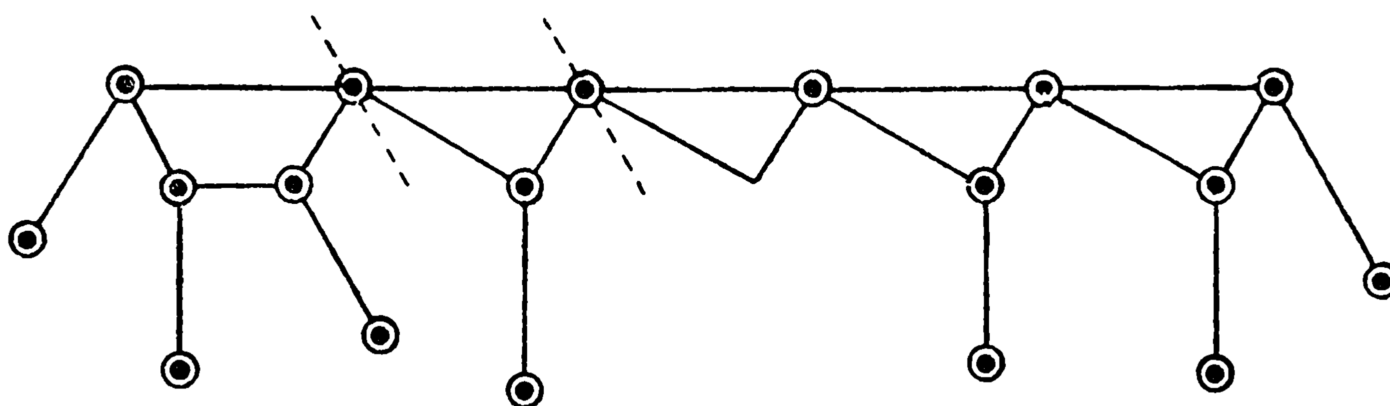
поводка звено, обращаясь само в поводок, со всей правее его лежащей частью также образует цепь того же типа (фиг. 11).

Вполне аналогично разберется и 4-й случай; здесь одно крайнее звено окажется снабженным тремя поводками и образует самостоятельную группу, лежащие между ним и лишенным поводка звенья, каждое со своим поводком образуют



Фиг. 11.

двухповодковые группы, а лишенное поводка звено с остальной частью распавшейся цепи образует тоже нормального типа цепь (фиг. 12).



Фиг. 12.

Познакомимся далее с результатом переноса более чем одного поводка в простой открытой цепи нормального типа. Представим себе, что два поводка перенесены последовательно один за другим. Перенос первого поводка, по доказанному, разбил цепь на простейшие того же типа. Перенос второго поводка в пределах одной такой цепи, на которые первоначальная распалась, ничего нового не даст, а лишь разобьет эту часть еще на простейшие; такой перенос будем называть переносом первого рода.

Иначе дело будет обстоять с переносом второго рода, где поводок будет переноситься из одной цепи, на которые распалась первоначальная, в другую. Таким образом, перенос второго рода разобьет нашу цепь на ряд многоповодковых простых открытых цепей, которые, однако, уже не все будут цепями нормального типа, но среди которых будут находиться цепи с избыточным и недостающим, против нормы, числом поводков.

Заметив, что дальнейшее повторение переноса первого или второго рода существенно новых форм, сравнительно с указанными, не даст, остановимся на изучении результата переноса второго рода в прикрепленной к неизменяемой основе цепи нормального типа. Покажем, что вследствие такого переноса первоначально жесткое соединение утратило свою жесткость.

Изучая перенос одного поводка, мы могли заметить (см. фиг. 7—12), что всегда цепь, распавшаяся на нормальные, образовывалась из присоединенной к основе простой цепи нормального типа, к которой затем присоединялась следующая цепь того же типа только одним поводком, между тем как все остальные поводки прикреплялись к основе. Назовем последние поводки основными, первые — соединительными и заметим, что мы говорим лишь о переносе основных поводков, потому что соединительные, как легко проследить, образовались не за счет поводков, а за счет звеньев первоначальной цепи нормального типа, а разговор идет лишь о переносе поводков последней.

Возьмем у некоторых цепей, на которые распалась данная часть основных поводков и разместим их по другим цепям, прикрепив тоже к основе; после этого в каждой цепи уберем соединительный поводок. Тогда все поводки окажутся прикрепленными к основе, и мы будем иметь несколько многоповодковых цепей, прикрепленных к общей основе. Те цепи, в которых прибавились поводки, образуют вместе с основой жесткую, статически определимую или неопределимую систему, смотря по тому, достался ли при переносе второго рода на их долю один избыточный поводок или больше.

В самом деле, один поводок мог стать на место отброшенного, соединительного, тогда цепь осталась нормального типа, образуя жесткое соединение с основой. Он мог и не стать на место отброшенного, тогда получилась цепь, полученная из цепи нормального типа переносом одного поводка; такая цепь распадается на несколько цепей нормального типа, но в соединении с неизменяемой основой тоже образует жесткое, статически определимое соединение. Отсюда очевидно, что если на долю рассматриваемой цепи пришлось больше одного поводка, то она с основой образует соединение жесткое, статически неопределимое.

Будем рассматривать теперь основу со всеми присоединенными цепями как одну систему, о подвижности которой будем судить. Эта подвижность не изменится, если мы отбросим все избыточные поводки в некоторой цепи, потому что от этого жесткое соединение ее с основой не уничтожится; это лишь равносильно отождествлению жестко связанных с основой цепей с самой основой, и будет ли последняя статически определима или нет, нам безразлично. Таких отбрасываемых поводков может быть несколько, может и не быть вовсе. Допустим, что их будет p, а число цепей, куда переносились поводки, будет q; тогда число перенесенных поводков будет $(p + q)$, потому что один из перенесенных поводков остался в каждой такой цепи неотброшенным, заменяя отброшенный соединительным.

Остальные цепи, не слившиеся в одно жесткое соединение с основой, потеряли, таким образом, $(p + q + k)$ поводков; из них k поводков не было прикреплено к основе, а является отброшенными соединительными. Если восстановить их всех там, где они были до переноса второго рода, то восстановится то жесткое соединение, которое существовало до переноса второго рода; следовательно, при неподвижной основе вся система теперь обладает $(p + q + k)$ степенями свободы. Восстанавливая k соединительных поводков, мы лишаем ее стольких же степеней свободы и, кроме того, восстанавливаем то самое соединение не слившихся с основой в одно жесткое целое

цепей, которое существует на деле после переноса второго рода.

При восстановлении соединительных поводков система в целом теряет k степеней свободы, остается $(p + q)$ степеней, характеризующих подвижность цепи после переноса второго рода; ни p, ни q по существу отрицательными быть не могут, но в то время как p может быть нулем, q им быть не может, так как перенос второго рода предполагает, что, по крайней мере в одной из цепей нормального типа, на которые распалась данная, после переноса одного поводка прибавились избыточные, против нормального числа, поводки.

Итак, полученная с помощью переноса второго рода цепь, при укреплении поводков k неподвижной и неизменяемой основе, дает начало системе, обладающей, по крайней мере, одной степенью свободы, и потому это соединение никогда не будет жестким, что требовалось доказать.

Хотя цепь, полученная из нормальной посредством второго рода переноса поводков, будучи пристегнута к неизменяемой основе и не дает начала жесткому соединению, тем не менее она иногда способна дать начало новому механизму, если прикрепить ее концами поводков к данному. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, как мы это уже сделали, что вследствие второго рода переноса цепь распалась на несколько простых цепей, среди которых имеются цепи с избыточными и недостающими поводками.

Таким образом, изучение полученного результата приводит к исследованию роли в образовании механизмов цепей, отличающихся от нормального типа числом поводков. Нетрудно убедиться, что, присоединяя к данному механизму одну только цепь с избыточным или недостающим числом поводков, мы никогда нового механизма не получим: в первом случае получится жесткая система (статически определимая или неопределимая), во втором — система с несколькими степенями свободы. Но последовательным присоединением нескольких таких цепей к данному механизму можно получить новый. При этом надо

начинать с цепей с недостающим числом поводков, так как присоединение цепи с избыточным числом их превратит механизм в жесткую систему, т. е. сольет его для нас с основой. Присоединяя к механизму одну или несколько цепей с недостающими поводками, мы сообщаем ему столько лишних степеней свободы, сколько недостает в общей сложности в присоединенных цепях поводков, так как удаление из данной системы двухшарнирного стержня уменьшает число связей системы на одну.

Полученную систему с несколькими степенями свободы легко снова превратить в механизм присоединением одной или нескольких цепей, в общей сложности обладающих числом избыточных поводков, равным сумме числа недостающих в предыдущих цепях. Таким образом, если включить в рассмотрение образование механизмов с помощью присоединения цепей с избыточным и недостающим числами поводков, то придется рассматривать эти цепи не в отдельности, а в известных комбинациях, когда исчезает та простота рассмотрения, которая имеет место при образовании механизмов, методом наслоения из цепей нормальных типов (рассмотренный нами нормальный тип не есть единственный, и дальше нам предстоит познакомиться еще с другими, которые, однако, все обладают общим свойством, что, пристегнутые к неизменяемой основе, они дают начало жесткому, статически определимому соединению стержней; на них нам придется распространить полностью сделанные здесь заключения).

Ввиду указанных обстоятельств образование механизмов из существующих уже, методом присоединения иных цепей, кроме цепей нормальных типов, представляло бы большие трудности для исследования. Однако, как окажется, нет никакой необходимости рассматривать образование механизмов с помощью цепей с избыточными и недостающими поводками, так как, по рассмотрении свойств цепей нормальных типов, мы докажем (см. главу V), что любой механизм может быть последовательным отделением одних только цепей нормальных типов упрощен до простого кривошипа. Таким образом, если

в частных случаях, быть может, и можно с пользой рассматривать некоторые механизмы, как образованные из простого кривошипа присоединением многоповодковых цепей не одних только нормальных типов, но в общей теории выгодно рассматривать механизмы как образования из одних только нормальных цепей. С точки зрения классификационной в этом есть даже настоятельная необходимость, так как двоякого рода рассмотрение неминуемо ввело бы двойственность или даже полную неопределенность в классификацию *.

Итак, мы пришли к выводу, что второго рода перенос поводков в простой открытой многоповодковой цепи нормального типа разбивает цепь на несколько цепей иного типа, рассмотрение роли которых в образовании механизмов с полным правом может быть опущено. Нам остается лишь добавить, что полученный вследствие присоединения такой распавшейся цепи механизм, если все предыдущие, входящие в состав его цепи были простыми открытыми цепями нормального типа, может оказаться составленным из более сложных цепей, если образовать его только из цепей нормальных типов, изучение свойств которых нам еще предстоит. Вот почему более подробное рассмотрение результатов переноса второго рода нам приходится отложить; в настоящей статье мы этим вопросом заниматься не будем.

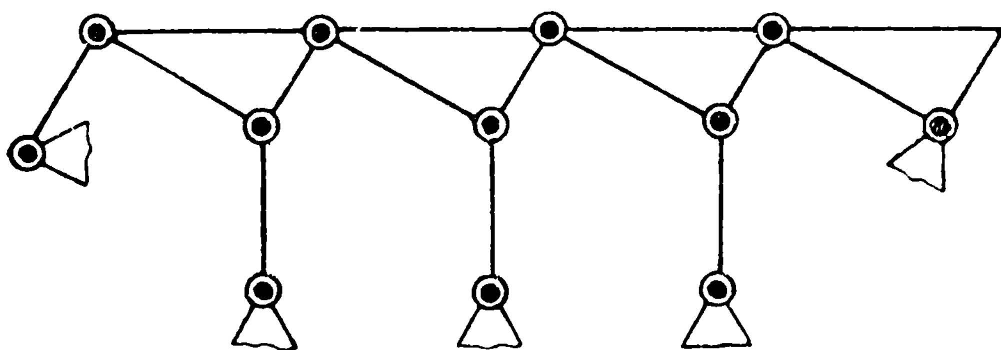
Нам остается рассмотреть еще одно видоизменение открытой простой цепи нормального типа, которое состоит в замене двух поводков крайнего звена шарниром. Такая замена возможна потому, что, уничтожая два поводка в прикрепленной к неизменяемой основе цепи, мы сообщаем нашей жесткой системе две степени свободы; устраивая же шарнир, снова лишаем ее их, так как вводятся две связи, выражающие, при неподвижности основы, что координаты одной точки звена — постоянны.

Нетрудно видеть, однако, что прием этот представляет не что иное, как замену крайнего двухповодкового звена поводком, т. е. обратен положенному в основу нашей статьи приему

* См. главу III.

развития поводка; поэтому результат можно рассматривать как цепь нормального типа, в которой, сравнительно с первоначальной, убавилось одно звено (фиг. 13).

Итак, мы познакомились с вполне определенной формой — открытой простой многоповодковой цепью нормального типа, присутствие которой в механизме, когда она образует последнее из наслоений, легко определить и, отделивши ее, превратить механизм в простейший. Наше изучение свойств ее этим, однако, еще не закончено.



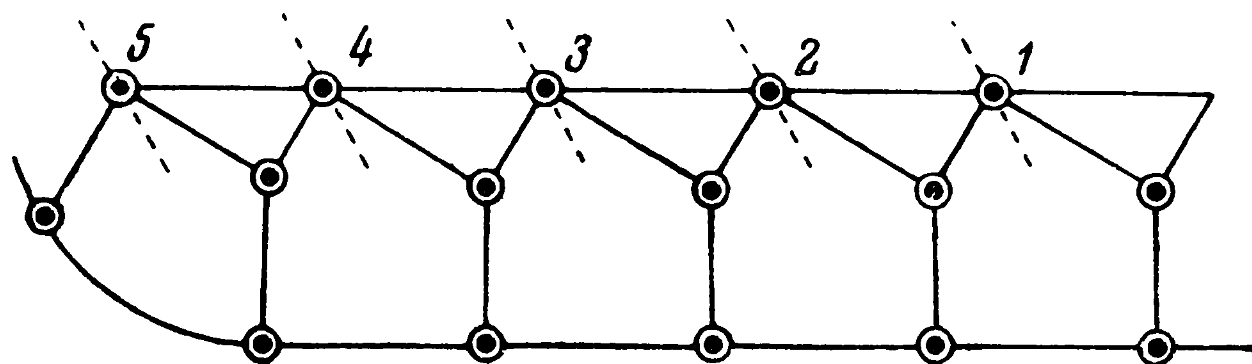
Фиг. 13.

Мы уже видели, что удаление одного поводка в жестком соединении цепи только что рассмотренного типа, с неизменяемой основой, дает начало механизму. Покажем, что каждый такой механизм может рассматриваться как полученный из простого кривошипа * методом наслоения многоповодковых цепей того же типа.

Удалить можно либо поводок одного из крайних звеньев, либо поводок одного из средних. Сделаем первое; тогда лишенное поводка звено с оставшимся поводком образует двухповодковую группу, которую отбрасываем; затем отбрасываем последовательно двухповодковые группы, образованные каждым из средних звеньев первоначальной цепи со своим поводком; останется система трех брусков, образованная из второго крайнего звена начальной цепи с его двумя поводками. Рассматривая любой из них как кривошип, мы можем отделить два других звена, образующих двухповодковую группу. Последо-

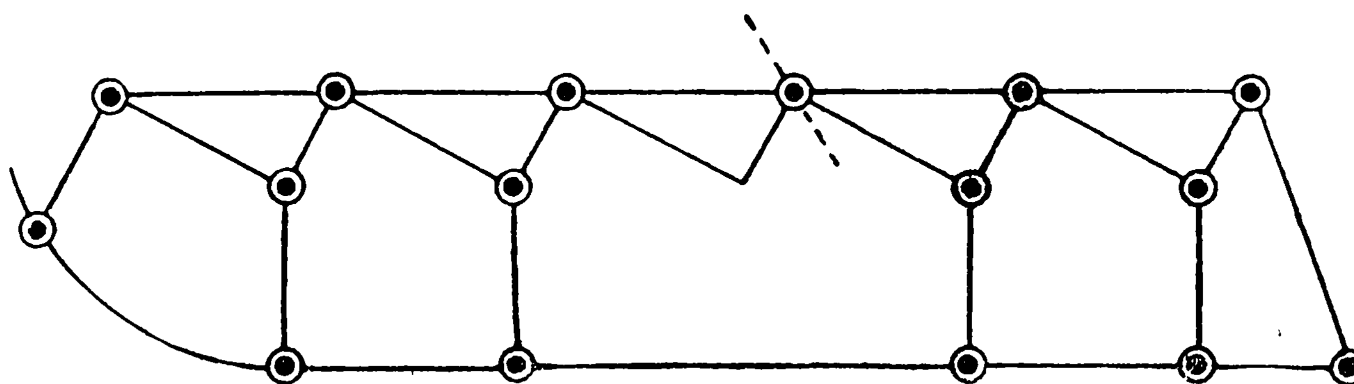
* Обычно под кривошипом разумеют звено, не только закрепленное в неподвижной точке, но и имеющее возможность около этой точки совершать оборот в 360°. Для нас последний признак отпадает, так как присутствие его зависит от осуществления определенных соотношений метрического характера, с нашей общей точки зрения нас вовсе не интересующих.

вательность отделения указáна нумерацией (см. фиг. 14). Отбросим теперь поводок среднего звена; разъединяем шарнир, прикрепляющий последнее к правой части цепи (фиг. 15). Очевидно, что эта правая часть, в которой крайнее левое звено снабжено лишь одним поводком, образует механизм только что рассмотренного типа (см. фиг. 14). Левая же часть, в которой



Фиг. 14.

лишившееся поводка звено должно рассматриваться как поводок, является простой открытой многоповодковой цепью нормального типа, прикрепленной к этому, образованному из

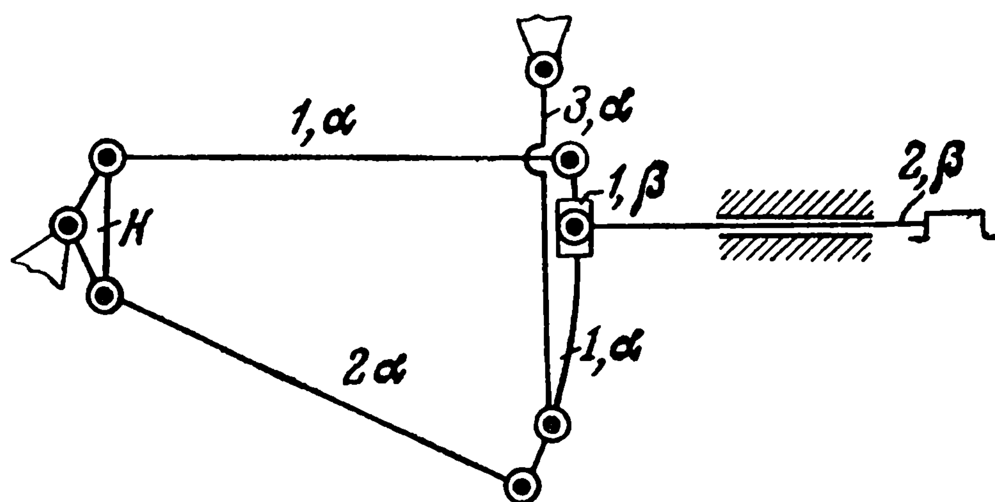


Фиг. 15.

простого кривошипа наслоением двухповодковых групп механизму, и превращает его в механизм более сложный.

Указанные сейчас механизмы, конечно, не единственные, которые возможно образовать методом наслоения простых открытых многоповодковых цепей, исходя из простого кривошипа; их характерный признак состоит в том, что поводки каждой цепи нормального типа все, кроме одного, присоединяются к неподвижной основе; между тем возможно прикрепление концов поводков и к подвижным звеньям при последовательном

усложнении механизма. Совершенно независимо от того, к каким звеньям или поводкам предыдущих цепей прикрепляются поводки следующей, условимся называть *механизмами первого класса* все механизмы, которые могут рассматриваться как полученные из простого кривошипа, посредством последовательного прикрепления одних только простых, открытых мно-



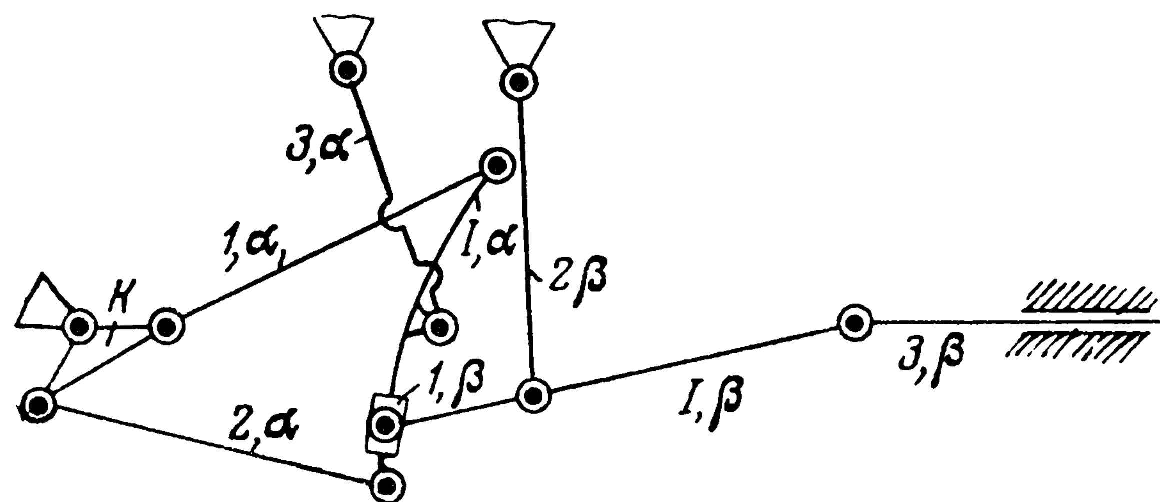
Фиг. А.

гоповодковых цепей нормального типа, или, что то же, последовательным отбрасыванием таких именно цепей могут быть упрощены до простого кривошипа.

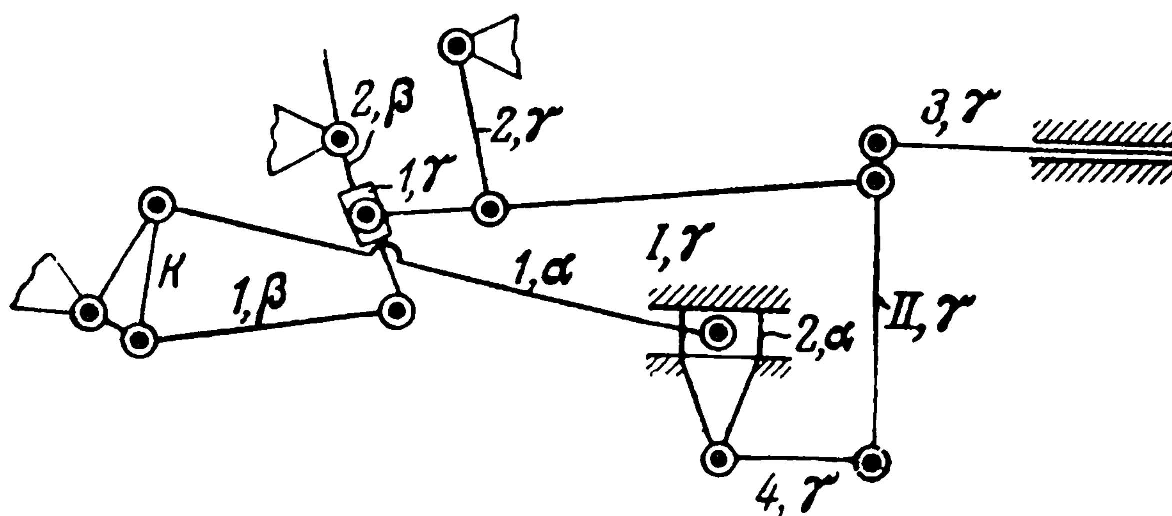
Если условимся порядок механизма первого класса определять в зависимости от наиболее сложной группы, входящей в состав его, и, кроме того, простой кривошип назовем механизмом первого порядка, как наиболее простой из всех возможных механизмов, то порядок механизма первого класса определяется числом поводков наиболее сложной многоповодковой цепи, входящей в состав его.

Давно размышляя над строением механизмов, автор сих строк мог отметить, что подавляющее большинство осуществляемых механизмов образовано наслоением сильвестровских диад, т. е. относится, согласно предыдущему, ко второму порядку механизмов первого класса. Наиболее сложные из употребительных механизмов оказались содержащими трехповодковую группу, каковы, например, кулиса Стефенсона (фиг. А), где она встречается один раз, кулиса Гуча, где она повторяется

дважды (фиг. В), один лишь из практически осуществляемых механизмов, по строению своему, казался загадочным: кулисный механизм Гейзингера (фиг. С) и его видоизменения (напри-



Фиг. В.



Фиг. С.

мер, кулиса P. M. Deely. Нетрудно убедиться, что он содержит четырехповодковую группу * и просто является единственным осуществленным представителем четвертого порядка механизмов первого класса. О практическом осуществлении каких-либо механизмов, не укладывающихся в число механизмов первого класса, автору не приходилось что-либо слышать.

* Чтобы удобнее разбираться в строении указанных здесь механизмов, мы обозначаем на чертеже каждую группу греческими буквами, в порядке их последовательного присоединения, поводки каждой группы нумеруем независимо арабскими цифрами с присоединением греческой буквы, характеризующей группу, и таким же образом, но римскими цифрами, отмечаем звенья цепи, входящей в состав многоповодковой группы. Кривошип обозначен буквой *K*.

Нельзя думать, что все другие механизмы, со строением которых нам предстоит ознакомиться, а также механизмы уже указанного нами класса, но порядка выше четвертого, не могли оказаться полезными в приложении. Скорее следует предполагать, что к этим более сложным образованиям не удалось дойти путем эмпиризма, а систематический путь, основанный на совершенном знании законов строения механизмов, до сих пор еще не был известен. Но согласится ли читатель с нашим мнением в этом отношении или нет, все же наше исследование должно быть продолжено, потому что пути научного мышления должны вести к исчерпывающему обозрению всех скрытых возможностей; практика покажет, найдутся ли среди этих возможностей пригодные для ее целей, т. е. практичные; автор в последнем не сомневается *.

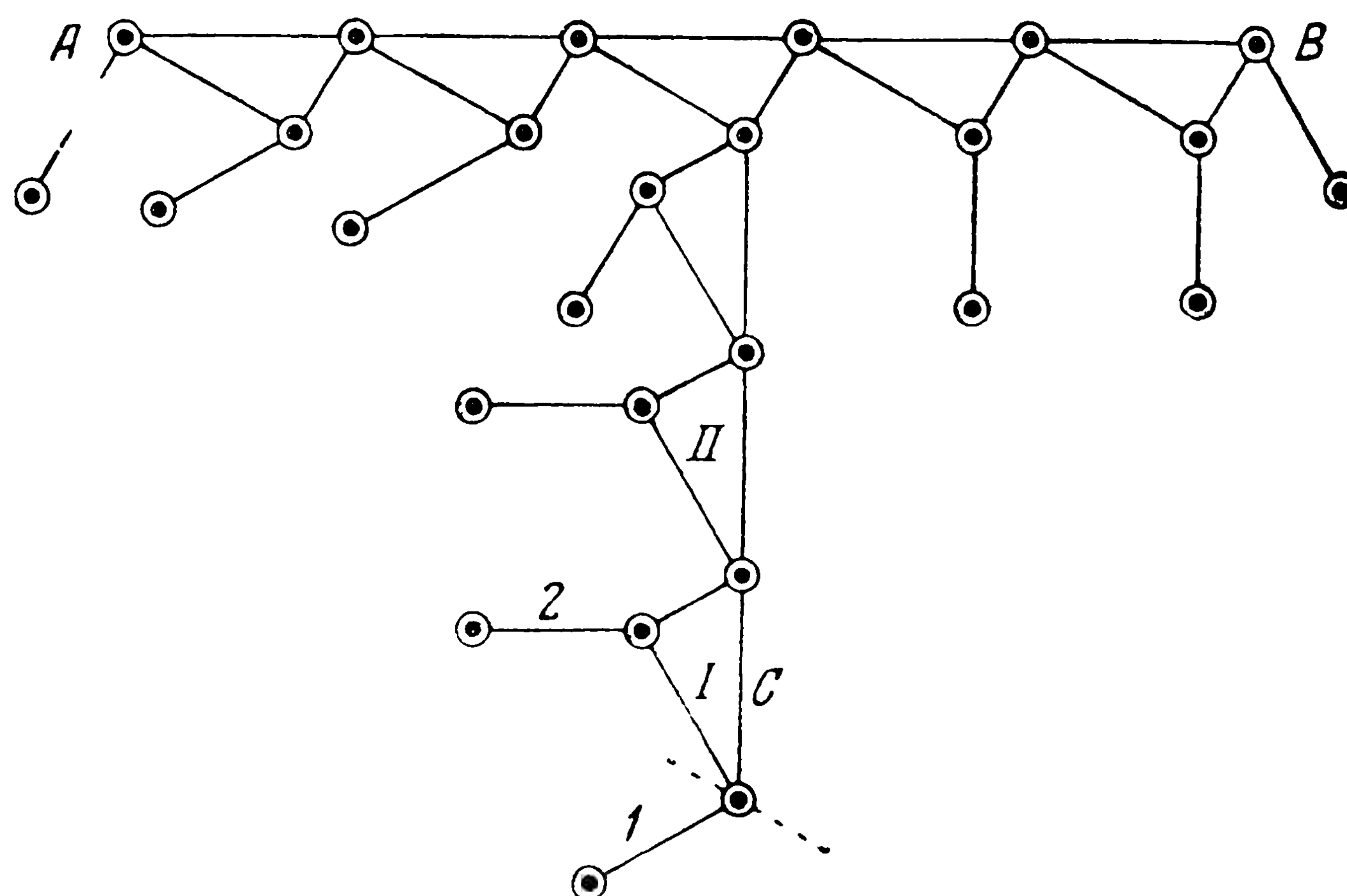
Мы рассматривали до сих пор лишь многоповодковые цепи, получаемые развитием поводка крайнего звена, начиная от пятиповодковой. Мы убедились, что развитие такого поводка простой открытой n-поводковой цепи не дает начала новым формам. Но с тем же правом, с которым мы развивали крайний поводок, можно приступить к развитию одного из средних поводков **. Заменим в группе (см. фиг. 5) поводок *4* трехшарнирным звеном с двумя поводками, в этом звене разовьем опять

* Тем временем автор пытался получить сведения о новейших паровозных кулисах, рассчитывая здесь найти, быть может, еще новый материал. Попутно мне были указаны еще некоторые другие механизмы, которые оказались мне неизвестными. Рассмотрение их обнаружило, что все они принадлежат ко второму порядку первого класса. Совершенно исключительным, однако, оказался исполняемый Путиловским заводом, описанный в «Железнодорожном деле» за 1911 г. механизм, изобретенный русским машинистом Савельевым,— паровозная кулиса, относящаяся по нашей классификации к шестому порядку механизмов третьего класса. На этот механизм внимание мое было обращено К. Э. Рерих. Разбор его относится к главе III.

** О последовательном развитии двух поводков одного крайнего звена говорить не приходится, потому что после развития первого из них второй становится во вновь полученной цепи поводком среднего звена.

один из его поводков и будем продолжать развивать всегда один из двух поводков вновь присоединяемого звена.

Результат трехкратного применения этого приема показан на фиг. 16. Мы замечаем, что на место поводка становится цепь, которой все звенья, кроме крайнего, снабжены одним поводком, последнее же — двумя. Всю группу можно рассматривать как



Фиг. 16.

состоящую из поводков, присоединенных к разомкнутой цепи, но не простой, а разветвленной. Развить можно, очевидно, и более одного среднего поводка первоначальной цепи; но можно приступить и к развитию поводков самих ответвлений. Развитие одного из поводков крайнего звена, очевидно, нового ответвления не даст, так как такую попытку мы уже делали и удостоверились, что при этом лишь увеличивается число звеньев данного ответвления; развитие же поводка каждого из средних звеньев ответвления дает начало новому ответвлению.

При изучении свойств такой разветвленной многоповодковой цепи нам придется обратить внимание на следующие пункты: во-первых, ознакомиться более подробно со строением такой

цепи, которую условимся называть сложной открытой многоповодковой цепью нормального типа, во-вторых, рассмотреть механизмы, которые могут быть получены из жесткого соединения ее с неизменяемой основой и, в-третьих, показать, что из распадающихся многоповодковых сложных открытых цепей лишь цепь, распадающаяся на простейшие нормальные, дает жесткое соединение, будучи пристегнута к неизменяемой основе *.

Сравнительно с простой цепью, в которой имелись лишь звенья двухповодковые и одноповодковые, сложная цепь содержит еще звенья бесповодковые, снабженные, так же как и все остальные звенья цепи, тремя шарнирами. Дело в том, что метод развития поводка прибавлением каждый раз к цепи по новому трехшарнирному звену, не изменяет числа шарниров раньше существовавших звеньев, а лишь уничтожает развиваемый поводок, на место которого становится двухповодковое звено. Поэтому всякий раз, когда мы развиваем поводок одноповодкового звена, т. е. устраиваем ответвление, мы образуем в цепи бесповодковое звено, будет ли это ответвление от основной цепи, или от одного из ответвлений. Так как каждое ответвление заканчивается двухповодковым звеном, а в простой цепи таких звеньев было лишь два, то число бесповодковых звеньев сложной открытой цепи нормального типа равно числу двухповодковых ее звеньев без двух.

Направляясь от какого-либо крайнего звена такой сложной цепи к соседнему и продолжая, таким же образом, итти дальше, непременно дойдем до звена бесповодкового. В самом деле, если бы мы встречали только звенья одноповодковые и затем пришли к двухповодковому, которое для цепи рассматриваемого нами

* Разбор свойств открытых разветвленных нормальных цепей, из-за большого числа индивидуально трактуемых случаев и сходности многочисленных элементарных доказательств, должен показаться читателю несколько громоздким. Вознаграждается он тем, что приводит к результатам, которые впоследствии, в случаях гораздо более сложных и запутанных, позволяют обходиться более совершенными общими приемами доказательств.

строения будет крайним, то ряд пройденных нами звеньев с их поводками образует простую, а не сложную, многоповодковую цепь, что противоречит предположению. Если же все время до конца будут встречаться одноповодковые звенья, то мы имеем дело с лишенной поводка крайнего звена, но тоже простой цепью, которая к тому же, при прикреплении к неподвижной основе, не может дать начало жесткому соединению. Ряд звеньев, начинающийся крайним, двухповодковым звеном и примыкающий к бесповодковому звену сложной открытой цепи, мы условимся называть *концом* или *концевою цепью.* Число концов цепи, равное числу двухповодковых звеньев, согласно предыдущему, на два больше числа бесповодковых звеньев.

Мы говорим здесь о всех концах, не отличая концов ответвлений от концов первоначальной простой цепи, из которой сложная образовалась методом развития поводков, потому что никаких существенных отличий между теми и другими отметить нельзя. В самом деле, совершенно условно, что̀ считать основной цепью (см. фиг. 16) и что̀ ответвлением; ответвление C примыкает к одному шарниру бесповодкового звена, но к двум остальным его шарнирам примыкают части A и B первоначальной цепи, тождественные по своему строению с ответвлением. Но и в общем виде легко показать, что данная сложная открытая цепь может быть образована методом развития поводков, по крайней мере, из стольких различных простых цепей, сколько сочетаний по два можно составить из числа ее концов.

С этой целью выделим два каких-нибудь конца данной нам сложной цепи, которые оставим нетронутыми, к остальным же концам последовательно применим прием, обратный развитию поводка, т. е. будем сначала в одном из концов до тех пор заменять конечное звено с его двумя поводками поводком, увеличивающим число поводков соседнего с ним звена на один, пока не дойдем до бесповодкового звена, которое, таким образом, превратится в одноповодковое. Таким образом, одновременно уничтожится один из концов цепи и одно бесповодковое

звено. Оставшаяся цепь будет цепью того же строения; в самом деле, если замена поводка одноповодкового звена образованием, названным концевой цепью, не изменяет типа цепи, то и обратная замена приведет снова к такой же цепи.

Можно, однако, убедиться в том же, рассматривая строение цепи, полученной заменой концевой цепи поводком. Из предыдущего можно было усмотреть, что необходимым признаком сложной открытой многоповодковой цепи изучаемого строения является присутствие в ней крайних звеньев, снабженных двумя поводками, и средних, либо одноповодковых, либо бесповодковых. При этом каждое из звеньев должно обладать тремя и только тремя шарнирами и число двухповодковых звеньев должно на два превышать число бесповодковых. Мы одновременно докажем достаточность этого признака и справедливость высказанного раньше положения.

С этой целью не будем утверждать, что данная нам цепь представляет собой цепь изучаемого типа, а допустим лишь, что она удовлетворяет указанным признакам. Двигаясь от крайнего звена к соседнему, мы можем встретить в нем либо бесповодковое звено, и тогда заменяем первое рассматриваемое звено, как единственное концевой цепи, поводком, либо мы встречаем одноповодковое звено и тогда переходим к единственному непосредственно за ним следующему звену; продолжая наш путь от звена к звену, мы должны обнаружить звено бесповодковое или притти к концу цепи, так как число последних не меньше двух (число бесповодковых звеньев не может быть отрицательным).

В последнем случае наша цепь оказалась простой, которая может быть рассматриваема как частный случай сложной, при отсутствии в последней бесповодкового звена, и потому этот случай не представляет для нас интереса. В первом же случае заметим, что ряд звеньев, примыкающих к бесповодковому (и нами пройденных), ничем не отличается от образования, названного нами концевою цепью; заменяем ее поводком. Результат интересует нас лишь постольку, поскольку можно

доказать, что вновь полученное образование снова удовлетворяет указанным признакам.

В самом деле, все оставшиеся звенья, кроме названного бесповодкового, которое превратилось в одноповодковое и притом среднее звено, так как к двум его шарнирам примыкают соседние звенья, сохранили полностью все свои признаки. Ведь их вообще не трогали, и положение их среди остальных звеньев не изменилось, т. е. не могло звено, бывшее крайним, стать средним, или наоборот. Вновь образовавшееся одноповодковое звено обладает тремя шарнирами и, как звено среднее, удовлетворяет всем признакам, которым удовлетворяли одноповодковые звенья данной цепи. Кроме того, сохранился и признак, определяемый соотношением между числами концевых и бесповодковых звеньев. Поэтому к результату можно применять последовательно тот же прием отбрасывания концевых цепей, с заменой каждой из них поводком, который мы применили к данному нам образованию, пока не будут уничтожены все бесповодковые звенья и концевых звеньев останется только два.

Мы уже видели, что при отсутствии последних образование будет простой многоповодковой цепью. Заменяя теперь в последней в обратном порядке поводки концевыми цепями, на место которых они стали, мы получим данное нам образование, которое теперь, несомненно, по способу его получения из простой, есть сложная открытая многоповодковая цепь.

Таким образом, заменяя концы сложной открытой цепи, за исключением двух раньше намеченных, в последовательном порядке, поводками, мы получим простую цепь, из которой данная может быть получена методом развития поводков; таких различных простых цепей можно получить по меньшей мере столько, сколько можно из числа концов составить сочетаний по два. Но возможно, что порядок отбрасывания поводков играет некоторую роль и что при тех же двух концах можно получить различные простые цепи; ниже будет доказана лемма, из которой следует, что этого не может быть.

На тех же основаниях, как и в случае простой открытой цепи, мы скажем, что сложная открытая многоповодковая цепь, присоединенная поводками к неизменяемой основе и лишенная одного из поводков, дает начало механизму.

В силу того, что поводок среднего звена можно заменять концевой цепью, и обратно, т. е. в силу эквивалентности * поводка и концевой цепи отбрасыванием, при тех же условиях, концевой цепи, мы также превращаем сложную открытую многоповодковую цепь в механизм.

Для рассмотрения других приемов образования механизмов из цепей того же типа, присоединенных к неподвижной основе, докажем следующую лемму.

От одного звена сложной открытой многоповодковой цепи к любому другому ее звену можно притти непрерывным рядом звеньев, но только единственным путем.

Заметим прежде всего, что процесс замены поводком концевой цепи, в состав которой ни одно из данных звеньев A и B не входит, не уменьшает числа путей, которыми можно от одного из них притти к другому. В самом деле, допустим, что от звена A можно притти к звену B путем, ведущим через звено C отбрасываемой концевой цепи; но звено C, как звено концевой цепи, имеет лишь два соседних звена. Если двигаясь от звена A к звену B, мы пришли к звену C со стороны бесповодкового звена, то дальше мы можем рассматривать только звенья концевой цепи до крайнего звена, и потому, если это есть путь, ведущий от звена A к звену B, то звено B должно быть одним из звеньев этой концевой цепи, что противоречит сделанному предположению. Если же мы пришли к нему со стороны крайнего звена, то придем к тому же выводу, повторив относительно звена A то, что только что было сказано про звено B. Так

* Мы будем говорить об эквивалентности двух различных образований в том смысле, что одно из них может стать на место другого, причем число степеней свободы системы, часть которой составляют такие образования, от такой замены не изменяется; в данном случае эквивалентность идет дальше, так как замена не изменяет самого типа цепи.

как путь от звена A к звену B не может, таким образом, итти через звено такой концевой цепи, которой ни одно из этих звеньев не принадлежит, то, очевидно, отбрасывая такую цепь, мы не изменяем числа путей, ведущих от звена A к звену B.

Возможно, что оба звена A и B принадлежат двум концевым цепям. Тогда, не трогая этих цепей, начнем отбрасывать последовательно все остальные, заменяя каждую из них поводком. Мы видели уже выше, что этот процесс приведет к уничтожению всех бесповодковых звеньев и к превращению цепи в простую, не изменяя числа путей между звеньями A и B; звенья A и B при этом не могли исчезнуть, так как концевые цепи, в состав которых они входят, остались нетронутыми. Но в простой цепи, как очевидно из способа образования ее последовательным присоединением одного звена к другому, каждые два звена соединены лишь простым рядом звеньев, образующим единственный путь между двумя ее данными звеньями. Так как преобразование сложной цепи в простую, согласно предыдущему, не изменило числа путей, ведущих от звена A к звену B, то это и есть единственный путь, которым в сложной цепи можно притти от одного из этих звеньев к другому.

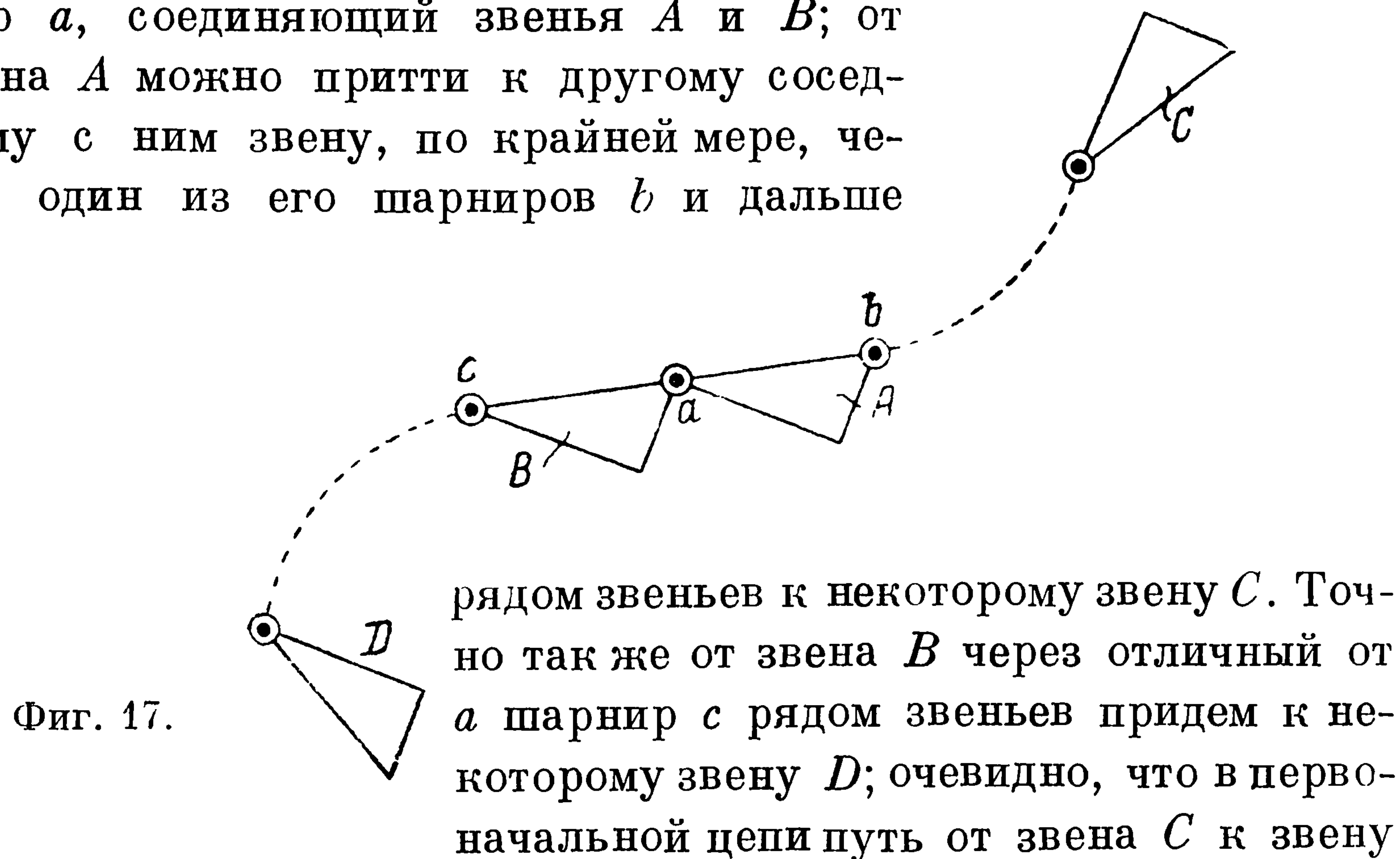
Как следствие из этого доказательства можно вывести, что число простых цепей, из которых данная сложная может быть образована присоединением ответвлений, не более числа сочетаний из всех концов сложной цепи по два.

Остается рассмотреть еще другие возможные случаи. Если бы звенья A и B принадлежали одной и той же концевой цепи, то лемма очевидна, потому что концевая цепь есть цепь простого строения. Рассмотрим поэтому случай общий. Независимо от положения данных звеньев, начнем последовательную замену концевых цепей поводками в любом порядке; отбрасывая конец за концом (концы эти не будут по числу и составу входящих в них звеньев тождественны с концами данной цепи, хотя последние будут в них содержаться), мы можем, в заключение, наткнуться на такой конец, который содержит одно из данных звеньев; этот конец не станем отбрасывать, а займемся остальными

концами. Если мы дальше наткнемся на конец, содержащий и второе из данных звеньев, то мы придем к первому из разобранных нами случаев, для которого лемма доказана; если же цепь преобразуется в простую, причем второе звено не отбрасывалось, то она также доказана.

Воспользуемся нашей леммой для доказательства следующего положения: уничтожением одного шарнира между звеньями сложной открытой многоповодковой цепи, прикрепленной к неизменяемой основе, образуются два механизма, связанные между собою лишь общей основою.

Допустим, что мы уничтожили шарнир a, соединяющий звенья A и B; от звена A можно притти к другому соседнему с ним звену, по крайней мере, через один из его шарниров b и дальше рядом звеньев к некоторому звену C. Точно так же от звена B через отличный от a шарнир c рядом звеньев придем к некоторому звену D; очевидно, что в первоначальной цепи путь от звена C к звену D (фиг. 17) ведет через шарнир a; в силу леммы этот путь — единственный, а потому после уничтожения шарнира a звенья C и D окажутся разъединенными. Таким образом, цепь распалась на разъединенные между собою части. Число этих частей, однако, не больше двух; в первоначальной цепи от любого ее звена можно было притти единственным путем к звену B; путь этот вел непременно через один из его трех шарниров; поэтому можно было от любого звена цепи притти к звену B, либо переходя шарнир a, либо не переходя его.



Фиг. 17.

В соответствии с этим все звенья первоначальной цепи мы разобьем на две группы; к первой группе будут принадлежать только звенья, и после разъединения шарнира *a* неразрывно связанные со звеном *B*, но теряющие, как мы только что видели, при этом связь со звеном *A*; ко второй группе, наоборот, будут принадлежать звенья, сохранившие свою связь со звеном *A*, но утратившие свою связь со звеном *B*. От каждого звена одной группы можно притти непрерывным рядом звеньев к любому звену той же группы, так как от каждого звена имеется такой путь, ведущий к одному и тому же из обоих звеньев *A* или *B*. Таким образом, при уничтожении шарнира *a* происходит разъединение цепи на две, но и только на две не связанных между собою части.

Если поводки начальной цепи были прикреплены к общей основе, то это же будет иметь место для поводков каждой из групп, которые в этом случае окажутся связанными через посредство поводков и общей основы.

Докажем теперь, что, разъединив шарнир *a*, соединяющий два наших звена *A* и *B* (см. фиг. 17) и присоединив по поводку к каждому из разъединенных звеньев, мы превращаем каждую из частей, на которые цепь распалась, в свою очередь, в многоповодковую открытую цепь нормального типа, сложную, или же простую. При доказательстве мы, конечно, будем пользоваться тем обстоятельством, что нам в предыдущем удалось установить признаки, которые достаточны для того, чтобы охарактеризовать подобного рода цепи; при этом простая цепь может рассматриваться, как частный случай сложной, в которой число бесповодковых звеньев равно нулю.

Нашему рассмотрению подлежат следующие возможные случаи:

I. Оба разъединяемых звена принадлежат концевой цепи:

а) одно из них двухповодковое;

б) оба одноповодковые.

II. Одно только из разъединяемых звеньев принадлежит концевой цепи.

III. Ни одно из тех же звеньев концевой цепи не принадлежит:

а) оба одноповодковые;

б) одно бесповодковое;

в) оба бесповодковые.

Случай Iа. Допустим, что звено A будет двухповодковым; отделив его и присоединив третий поводок, превращаем часть цепи, содержащую это звено, в трехповодковую группу, которая есть частный случай простой цепи. Что касается части цепи, содержащей звено B, то отделение двухповодкового звена и замена его поводком представляет собой прием, обратный приему развития поводка, и потому полученная цепь будет цепью того же типа.

Случай Iб. Допустим, что звено A принадлежит той части концевой цепи, которая, по разъединении шарнира, остается связанной с конечным двухповодковым звеном этой же концевой цепи. Тогда в группе звеньев, сохранивших связь со звеном A, только бывшее концевым звено будет двухповодковым, все же остальные звенья — одноповодковые. Концевая цепь есть цепь простого строения; поэтому, присоединив к звену A второй поводок, получим простую цепь одноповодковых звеньев, заключенную между двумя двухповодковыми звеньями, т. е. простую открытую цепь нормального типа. Что касается группы звеньев, примыкающих к звену B, то мы отбросили цепь концевого строения, примыкающую к этому звену, и на место ее ставим поводок. Так как звено B превращается теперь в конечное двухповодковое звено, остальные же звенья этой концевой цепи не подвергаются никаким изменениям, то первоначальная концевая цепь окажется замененной дугой с меньшим числом звеньев; от этого тип цепи не изменится. К тому же выводу можно притти короче, заметив, что отброшенная часть есть тоже цепь концевая и, как таковая, эквивалентна поводку в том смысле, что, заменив ее поводком, мы не изменяем типа первоначальной цепи.

Случай II. Допустим, что звено A принадлежит кон-

цевой цепи, звено B, — наоборот, ей не принадлежит. Так как концевая цепь примыкает к бесповодковому звену, то звено B может быть только таким звеном. По разъединении шарнира часть, примыкающая к звену A, будет концевой цепью и потому, как в предыдущем случае, присоединением к звену A второго поводка превращает эту часть в простую открытую цепь нормального строения *. Рассмотрим часть, примыкающую к звену B. Это звено в первоначальной цепи было бесповодковым; отброшенная часть есть концевая цепь, а для такой цепи, примыкающей к бесповодковому звену, доказано, что замена ее поводком не изменяет нормального типа открытой цепи.

Случай IIa. Прежде всего отметим, что цепь одноповодковых трехшарнирных звеньев всегда будет цепью простого строения, потому что к каждому звену примыкают только два соседних. Звенья A и B, по предположению, принадлежат такой цепи. Будут ли они единственные в ней, или к ним, в свою очередь, примыкает еще ряд одноповодковых звеньев, — цепь эта непременно упирается каждым из своих концов в бесповодковое звено. Это следует из сделанного нами предположения, что звенья A и B не принадлежат концевой цепи, в силу которого цепь одноповодковых звеньев не может замыкаться двухповодковым звеном. Так как в цепи нормального типа конечное звено не может быть одноповодковым, то остается только заключить, что цепь одноповодковых звеньев, к которой принадлежат звенья A и B, должна с каждой стороны упираться в бесповодковое звено.

По разъединении шарнира, связывающего звенья A и B, каждое из них сделается конечным звеном в той многоповодковой цепи, на которые данная распалась; присоединив к каждому из них поводок, мы заметим, что они обладают признаками, необходимыми для того, чтобы их можно было считать звеньями цепи нормального типа.

* Если бы звено A оказалось единственным звеном этой концевой цепи, то получилась бы трехповодковая группа.

Остается еще рассмотреть, скажем, в группе звеньев, примыкающих к звену A, цепь одноповодковых звеньев, заключенных между этим звеном и бесповодковым; очевидно, что в соединении со звеном A они образовали концевую цепь нормального строения и поэтому тоже, в совокупности, удовлетворяют необходимым признакам. Что касается остальных звеньев этой группы, то признаки их не подверглись изменениям вследствие отделения части, примыкающей к звену B. Что касается последней, то здесь приходится повторить все, только что сказанное относительно примыкающей к звену A части. Чтобы получить совокупность достаточных признаков, остается только доказать, что в каждой части соблюдается требуемое соотношение между числом концов и числом бесповодковых звеньев.

Допустим, что число концов, до разъединения шарнира, в части, примыкающей к звену A, было α; это значит, что от α концевых звеньев путь к звену A ведет не через подлежащий разъединению шарнир. Направляясь от любого из этих конечных звеньев к звену A, мы непременно должны натолкнуться на бесповодковое звено; в противном случае звено A было бы звеном концевой цепи. Заменим один из таких концов поводком; цепь, в которой шарнир α еще не разъединен, останется цепью нормального типа; при этом уничтожилось одно бесповодковое звено в части, примыкающей к звену A. Применение указанного приема можно продолжать, пока, желая отбросить концевое образование, мы не заметим, что между конечным двухповодковым звеном и звеном A нет бесповодковых звеньев; в таком случае этот конец есть единственный, содержащий звенья, примыкающие к звену A, а бесповодковое звено, к которому он должен примыкать, лежит уже в части, примыкающей к звену B. Мы уничтожили, таким образом, $(\alpha - 1)$ конец и одновременно $(\alpha - 1)$ бесповодковых звена, после чего последних в части, примыкающей к звену A, не оказалось. Итак, число бесповодковых звеньев в этой части было $(\alpha - 1)$.

Обращаясь теперь к первоначальной цепи, разъединяем

в ней шарнир и превращаем звено A в конечное двухповодковое. При этом мы не произвели каких-либо перемен в остальных α концах, от которых можно, и после разъединения шарнира, притти непрерывным рядом звеньев к звену A; но мы прибавили новый конец, начинающийся со звена A, и потому число концов будет теперь $(\alpha + 1)$, т. е. действительно, на два больше числа бесповодковых звеньев.

Для части, примыкающей к звену B, положение наше доказывается точно таким же образом.

Случай IIIб. Допустим, что A — звено одноповодковое, B — бесповодковое. Разъединив шарнир, можем к части, примыкающей к звену A, приложить полностью доказательство предыдущего случая. Если для разъединения шарнира число концов в этой части было α, то число бесповодковых звеньев в ней $(\alpha - 1)$. Что касается части, примыкающей к звену B, то последнее звено, по разъединении шарнира, превращается в одноповодковое и притом среднее, так как к нему раньше, кроме звена A, примыкало еще два звена.

Таким образом, это звено удовлетворяет необходимым требованиям, чтобы его можно было считать за звено открытой цепи нормального типа; признаки всех остальных звеньев не изменились вследствие отделения части, примыкающей к звену A.

Из достаточных признаков остается еще проверить соотношение между числом концов и числом бесповодковых звеньев вновь образовавшейся цепи. Допускаем, что число концов части, примыкающей к звену B, до разъединения шарнира было β; тогда число всех концов первоначальной цепи было $(\alpha + \beta)$. Число бесповодковых звеньев всей цепи получается $(\alpha + \beta - 2)$; вычитая отсюда число бесповодковых звеньев части, примыкающей к звену A, получим для части, примыкающей к звену B, всего $(\beta - 1)$ бесповодковое звено. Разъединяя шарнир и присоединяя поводок к звену B, мы превращаем это бесповодковое звено в одноповодковое, и число таких звеньев во вновь образовавшейся цепи будет $(\beta - 2)$. Нового конца при этом не образуется, так как звено B было и осталось

средним. Таким образом, число концов осталось прежним, т. е. β, и на два превышает число бесповодковых звеньев во вновь образовавшейся цепи.

Случай IIIв. Допустим теперь, что оба разъединяемых звена были бесповодковые. Число концов в каждой части, до разъединения шарнира, попрежнему назовем α и β. Руководствуясь такими же соображениями, как в предыдущем случае, скажем, что каждое звено обеих частей, по разъединении шарнира и присоединении к нему поводка, обладает признаками, необходимыми для того, чтобы его можно было считать звеном открытой цепи нормального типа. Чтобы пополнить число достаточных признаков, опять остается только сопоставить число концов и бесповодковых звеньев в каждой из вновь образовавшихся цепей.

Заметим, что число концов, по разъединении шарнира и снабжении звеньев A и B поводком, осталось в каждой части прежнее, как то было для одной из частей в предыдущем случае. В части, примыкающей к звену B, имеется по крайней мере, два конца, так как звено B осталось средним в цепи; перейдя к одному из соседних со звеном B звеньев и продолжая рассматривать дальше (от звена к звену), мы не можем уже вернуться к звену B; иначе между двумя из пройденных звеньев существовало бы два пути: один, минуя звено B, другой — через это звено. Следовательно, направляясь от звена B через один шарнир, мы непрерывной цепью звеньев можем притти к одному концу, направляясь через другой, можем притти только к другому концу цепи. Конечно, число концов по каждую сторону звена B может быть и больше одного.

Допустим, что, избрав некоторое концевое звено, мы приходим от него к звену B, не встречая бесповодкового звена, т. е. через посредство ряда одноповодковых звеньев. Допустим, что и по другую сторону звена B имеется такое концевое звено, от которого тоже на пути к звену B бесповодковых звеньев не встречается. В таком случае вновь образовавшаяся цепь будет про-

стой открытой цепью нормального строения, так как между двумя концевыми двухповодковыми звеньями заключается ряд одноповодковых звеньев (в числе их и звено B).

Чтобы разобраться в случае, когда в части, примыкающей к звену B, до разъединения шарнира были бесповодковые звенья, кроме звена B, обозначим два шарнира звена B, не примыкающие к звену A, через шарниры c и b. От любого концевого звена, примыкающего к B, можно притти к этому звену либо через шарнир b, либо через шарнир c. Разобьем в соответствии с этим все концы части, примыкающей к звену B, на две группы. Обращаемся к одной группе, предполагая, что шарнир α не был разъединен; выбираем в ней любой конец, допуская, что их больше двух. Тогда, направляясь непрерывным рядом звеньев от этого конца к звену B, мы непременно встретим бесповодковое звено; отбрасываем ведущую к последнему концевую цепь, заменяя ее поводком, причем уничтожается один конец и одно бесповодковое звено. Прием этот будем продолжать до тех пор, пока в этой группе останется только один конец; тогда, как мы видели в предыдущем случае, бесповодковых звеньев в этой группе не будет.

Если в другой группе, примыкающей к звену B, только один конец, то число уничтоженных концов равно $(\beta - 2)$, таково же в первоначальной цепи, не считая самого звена B, число бесповодковых звеньев в части, к этому звену примыкающей; это число бесповодковых звеньев сохранится и по отделении от звена B всей части, примыкающей к звену A. Так как число концов во вновь образовавшейся цепи равно β, то оно на два превышает число бесповодковых звеньев. Возможно, однако, что в другой, примыкающей к звену B группе, больше одного конца; тогда до тех пор будем прилагать к этим концам замену концевой цепи поводком, пока не останется один конец. Число всех уничтоженных концов в части, примыкающей к звену B, окажется опять $(\beta - 2)$ и равным числу уничтоженных бесповодковых звеньев, причем последних не останется. Опять заключаем, что во вновь образовавшейся

отделением звена A цепи число концов на два превышает число бесповодковых звеньев.

Что касается второй половины первоначальной цепи, состоящей из группы звеньев, примыкающих к звену A, то здесь останется повторить только что изложенное относительно первой половины этой цепи.

Итак, во всех случаях мы показали, что, разъединяя в сложной открытой многоповодковой цепи шарнир и присоединяя к обоим звеньям, которые соединялись этим шарниром по поводку, мы получаем открытую цепь нормального типа. Отсюда непосредственно следует, что, разъединяя шарнир в пристегнутой к неизменяемой основе такой же цепи и не присоединяя указанных поводков, мы получим два механизма. Таким образом, высказанное нами на стр. 49 положение может считаться доказанным.

Однако наше доказательство позволяет сделать еще один важный вывод: любую часть сложной многоповодковоей открытой цепи нормального строения можно от нее отделить и заменить поводком, причем получится снова открытая цепь нормального типа.

Таким образом, можно в этом смысле говорить об эквивалентности поводка и любой части сложной открытой многоповодковой цепи нормального строения.

Однако эту эквивалентность можно толковать и в более широком смысле. В самом деле, каждая из частей, на которые цепь указанного строения распалась, представляет лишенную одного поводка открытую цепь нормального типа. Предполагая, что поводки каждой части прикреплены к неизменяемой основе, можем из одной из этих частей получить жесткое соединение (цепь нормального типа, пристегнутую к неизменяемой основе) двумя способами: либо соединяем звено, содержавшее разъединенный шарнир, поводком с той же основой, либо присоединяем отделенную часть, восстанавливая шарнирное соединение обоих звеньев, содержавших разъединенный шарнир.

Таким образом, заменив в жесткой системе двухшарнирный стержень указанным способом лишенной поводка сложной открытой многоповодковой цепью нормального строения, мы получим снова жесткую систему. При этом, конечно, нет надобности прикреплять поводки заменяющей поводок цепи непременно к основе, потому что, разъединив шарнирное соединение любого поводка с основой, можем прикрепить конец поводка к любому другому звену бывшего жестким соединения, причем снова восстановится жесткое соединение (за исключением особых случаев); ведь разъединяя шарнир, мы сообщили системе две степени свободы, устраивая другой шарнир, лишаем ее их.

Итак, мы пришли к эквивалентности в самом общем виде стержня неизменяемой длины, соединяющего две точки данной системы и открытой цепи нормального типа, лишенной поводка (лишенное одного поводка звено и поводки этой цепи прикрепляются каждый одной точкой к точке данной системы). И то и другое лишает, как мы видели на частном примере, систему одной степени свободы; но если в частном случае, независимо от метрических отношений, введение такой цепи соответствовало наложению одной связи на систему, то, за исключением особых случаев, введение ее будет характеризоваться одною связью между координатами точек системы. В особых случаях эта связь может оказаться либо несовместной с остальными связями, наложенными на координаты точек системы, либо вытекающей из них, но алгебраическое выражение ее должно быть всегда одно и то же, и введение такой системы не может в одном случае быть охарактеризовано одним соотношением, в другом — n соотношениями.

Последним нашим положением нам не придется в дальнейшем пользоваться, но мы не считали удобным его обойти ввиду того, что известные, постоянно применяемые методы лишения системы одной степени свободы крайне ограничены.

Все до сих пор полученные из цепей изучаемого типа механизмы оказались такими же, но лишенными поводка и прикрепленными к неизменяемой основе цепями. Мы покажем

теперь, что все эти механизмы получаются из простого кривошипа наслоением либо простых, либо сложных цепей изученных типов.

Очевидно, что разобрать придется следующие случаи:

Лишается поводка звено: I. Крайнее, двухповодковое;

а) прилегающее к одноповодковому;

б) прилегающее к бесповодковому;

II. Одноповодковое концевой цепи, имеющее соседними звеньями:

а) два таких же звена;

б) двухповодковое и одноповодковое;

в) двухповодковое и бесповодковое;

г) одноповодковое и бесповодковое;

III. Одноповодковое звено, не принадлежащее концевой цепи, имеющее соседними звеньями:

а) два таких же звена;

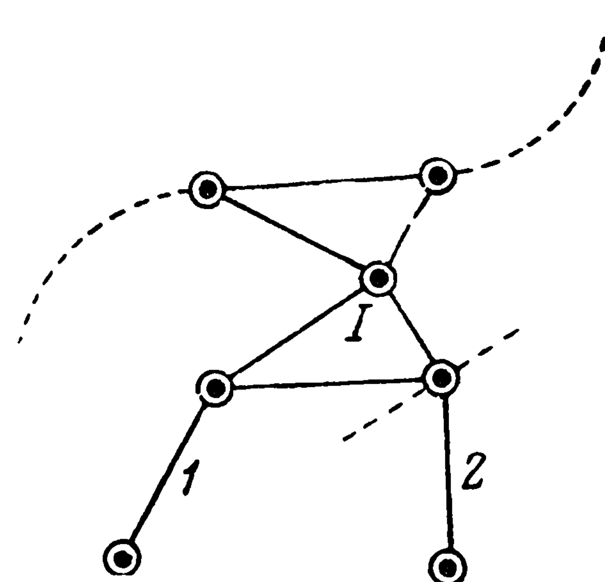
б) одно такое же звено и бесповодковое;

в) два бесповодковых.

Рассмотрим случай Iа. Обращаемся к фиг. 16, предполагая, что в ней концевая цепь *C* оставлена без изменения, поводки же любых других звеньев были как угодно развиты. Допускаем, что был опущен поводок *1*; считаем поводок *2* за кривошип и разъединяем шарнир, связывающий его с остальной цепью; остаток отличается от данной цепи нормального типа тем, что крайнее звено *I* лишилось поводков. Рассматривая его как поводок, прикрепленный к следующему звену *II* концевой цепи, замечаем, что последнее превращается в двухповодковое и притом крайнее: отделенная от кривошипа *2* часть будет поэтому цепью того же типа, в которой лишь один из концов будет иметь на одно звено меньше.

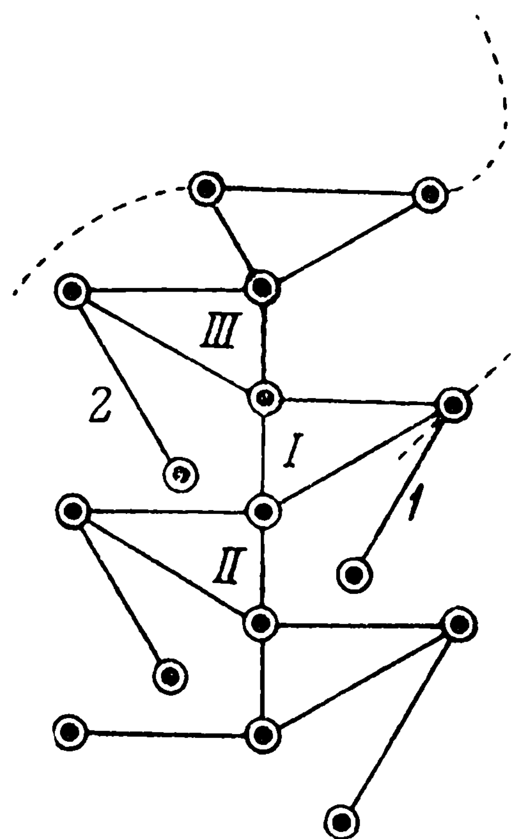
Переходим к случаю Iб. На фиг. 18 представлен интересующий нас конец; дальнейшее течение цепи схематически намечено пунктиром и может обладать любым количеством ответвлений. Рассматриваем поводок *1*, как кривошип по отделении поводка *2*; разъединяя шарнир, связывающий его с остальной

цепью, замечаем, что двухповодковое звено *I* превратилось в поводок. Такая замена есть прием, обратный развитию поводка, и, как известно, типа цепи не меняет.



Фиг. 18.

Случай IIа. Допустим, что нормальная цепь фиг. 19 лишена поводка *1*. Отбросив в первоначальной нормальной цепи концевую цепь, начиная со звена *I*, и поводок *2*, замечаем, что звено *III* превращается в поводок цепи, отличающейся от данной лишь тем, что последний заменил собою концевую цепь, начинающуюся со звена III. Результатом этой замены будет нормальная цепь, которую назовем цепью *A*. Заметив, что уничтожение поводка *1* превращает концевую цепь, начинающуюся со звена *1*, в простую цепь нормального типа, в которой звено *1* должно считаться вторым поводком звена *II*, отбрасываем сначала эту цепь, потом цепь *A* и получаем в остатке кривошип *2*. Присоединяя к нему те же части, кроме поводка *1*, в обратном порядке, получаем механизм, образованный требуемым способом.

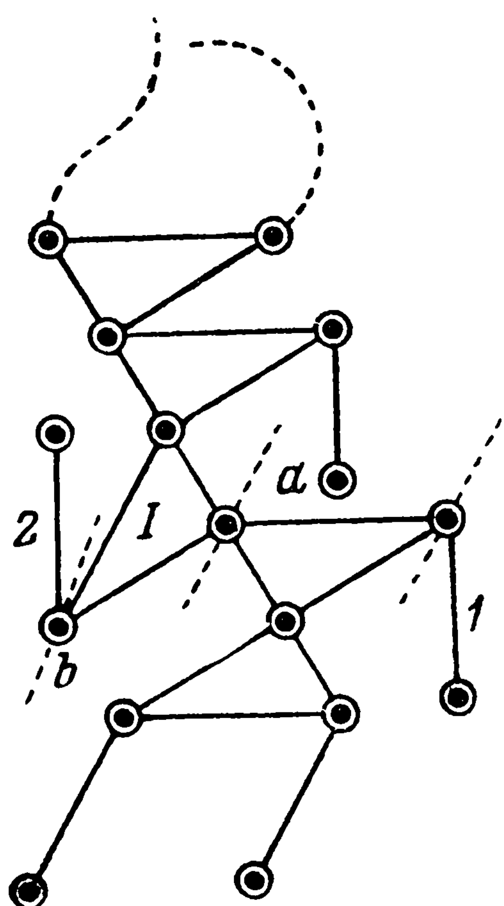


Фиг. 19.

Случай IIб (фиг. 20). Удаляемый поводок — *1*; сечением *a* отделяем трехповодковую группу; сечением *b* — сложную открытую цепь нормального типа, полученную из данной превращением в поводок всей концевой цепи, начинающейся со звена *I*, которое при этом и превращается в поводок; остается кривошип *2*.

Случай IIв (фиг. 21). Образуем механизм, удаляя поводок *1*; сечением *b* отсекаем нормального типа сложную

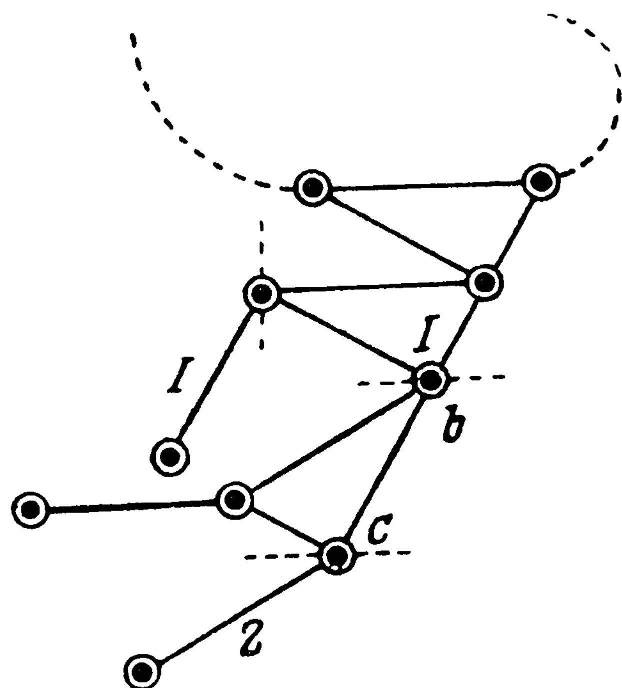
открытую цепь, в которой звено *I* является поводком; сечением *c* отделяем двухповодковую группу; остается кривошип *2*.



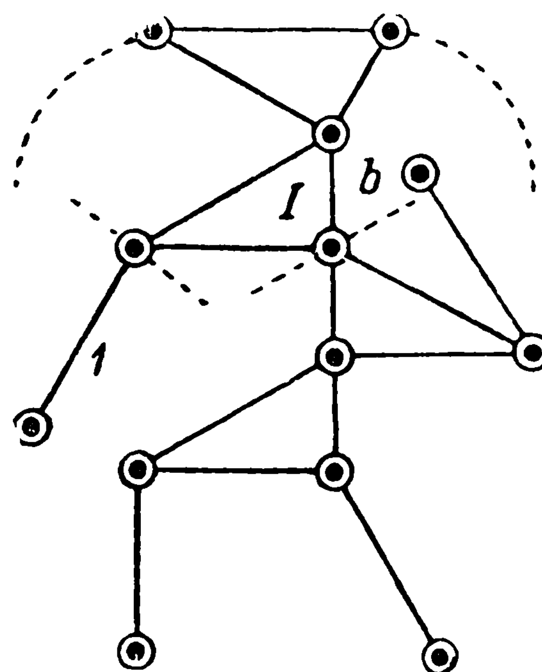
Фиг. 20.

Случай IIг. (фиг. 22). Отделением поводка *1* образуем механизм; сечением *b* отделяем сложную цепь нормального типа, в которой звено *I* играет роль поводка; остается цепь концевого строения, т. е. лишенная крайнего поводка простая нормального типа цепь, для которой уже доказано, что она дает начало механизму, состоящему из кривошипа и ряда двухповодковых групп.

Случай IIIа (фиг. 23). Допустим, что требуется удалить поводок *1*; оставим его пока на месте и проведем сечение *a*. Вся левее его лежащая часть *A*, как раньше доказывалось, будет механизмом, образованным удалением поводка крайнего звена цепи нормального типа, простой или сложной, и потому



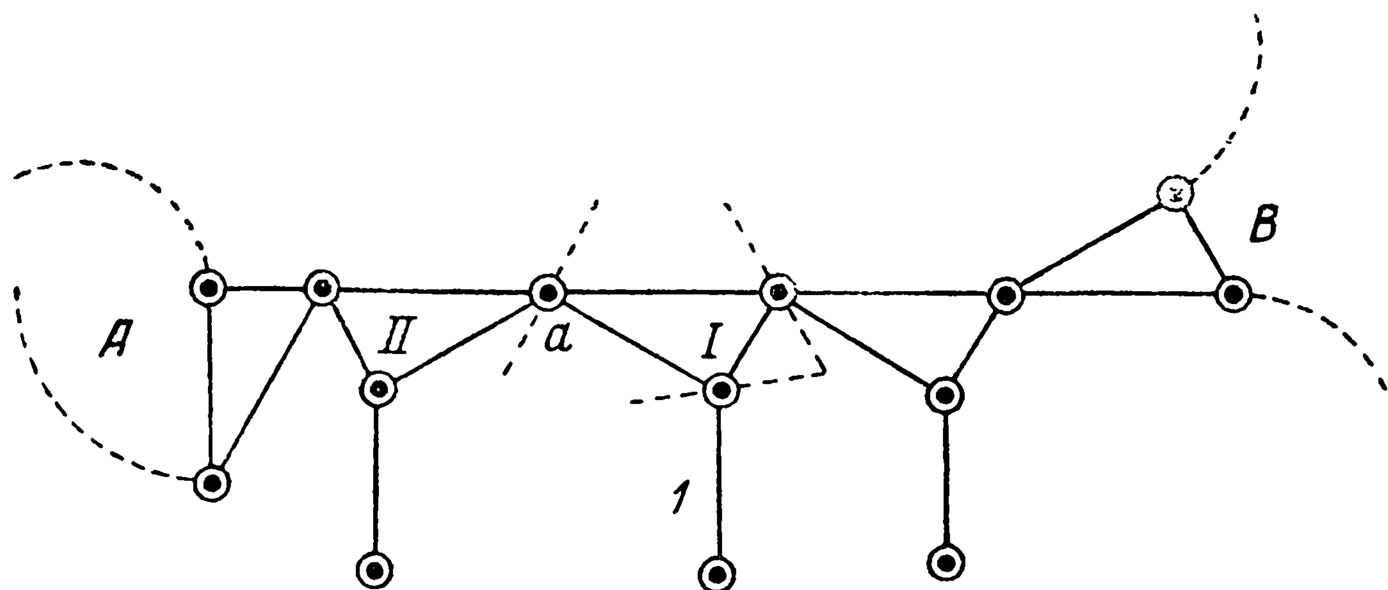
Фиг. 21.



Фиг. 22.

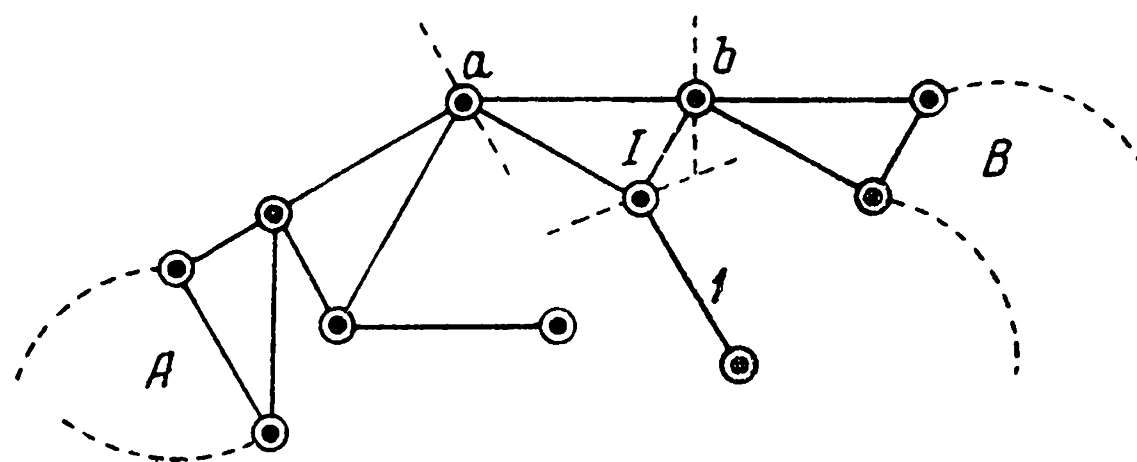
отделением таких же цепей приводится к кривошипу (случай I а, б). Часть *B*, лежащая правее сечения *b*, будет таким же

механизмом, но присоединением звена *1*, рассматриваемого, по отделении поводка *1* как поводок, превращается в цепь нормального типа, одним поводком присоединенную к звену *II* механизма *А*, остальными — к основе.



Фиг. 23.

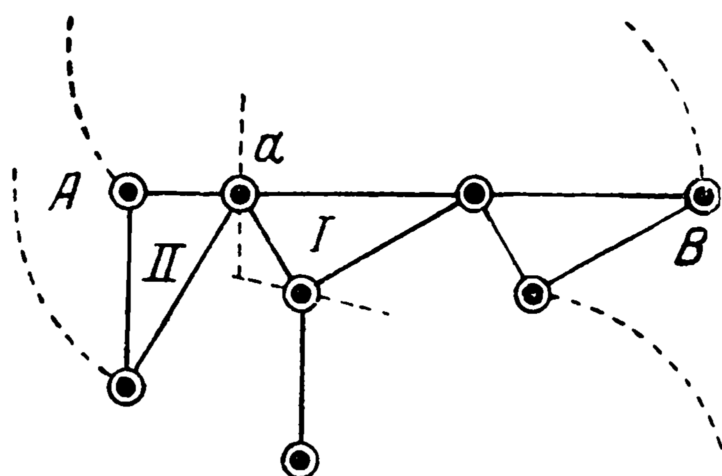
Случай IIIб (фиг. 24). Рассуждения вполне аналогичны примененным в предыдущем случае. Сечением *a* отделяем часть *A*, представляющую механизм, заведомо отделением цепей нормального типа приводящийся к простому кривошипу.



Фиг. 24.

Сечением *b* отделяем тоже механизм, который присоединением лишенного поводка звена *I* (поводка) превращается в цепь нормального типа, пристегнутую к механизму *A*.

Случай IIIг (фиг. 25). Проводим сечение *a* и отбрасываем всю лежащую правее часть, к которой принадлежит и подлежащий уничтожению поводок звена *I*; без последнего, как мы видели уже на фиг. 24, отбрасываемая часть есть открытая цепь нормального строения. Вся часть *A*, лежащая левее сечения *a*, представляет лишенную поводка такую же цепь; при этом поводка лишено звено *II*, которое будет средним, потому что к бесповодковому звену первоначально прилегало три звена, а отделилось одно. Возможно, что это лишенное поводка звено *II* опять граничит с двумя бесповодковыми, т. е. что в остатке получился опять механизм, соответствующий механизму в случае IIIг; тогда опять отделяем, только что указанным способом, от него цепь нормального типа.



Фиг. 25.

Очевидно, процесс этот повторять без конца нельзя, потому что всякий раз отделяется по крайней мере одно бесповодковое звено. Поэтому, если мы не придем раньше к другому случаю, то должны к нему притти, когда останется одно только бесповодковое. Итак, отделяя все время цепи нормального типа, мы должны притти к случаю, раньше разобранному, а следовательно, дальнейшим отделением цепей такого же типа— к простому кривошипу.

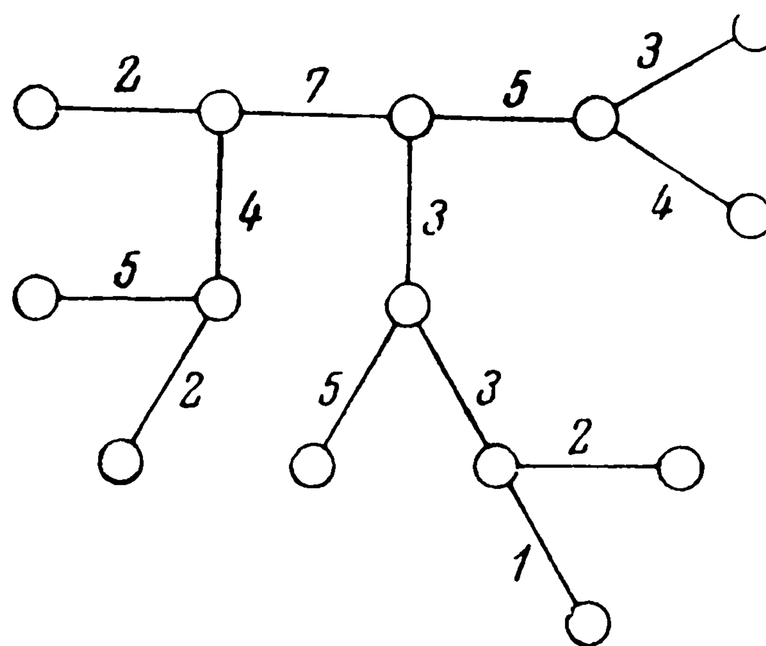
Рассмотренные сейчас механизмы не будут единственными, которые можно получить из простого кривошипа наслоением открытых многоповодковых цепей нормального типа, простых и сложных, потому что в них все время, за исключением одного поводка присоединяемой цепи, все остальные прикрепляются к неподвижной основе, чего в общем случае не будет.

Условимся всякий механизм, который отделением одних только многоповодковых открытых цепей нормального типа, только сложных, или же как простых, так и сложных, приво-

дится к простому кривошипу, называть механизмом второго класса.

Для краткости можно называть цепи, лежащие в основе образования механизмов первого класса, просто цепями первого класса, отличные же от них цепи, образующие механизмы второго класса, — цепями того же класса.

Цепи первого класса легко было разбить на цепи различных порядков, по числу поводков, которым вполне определяется такая нормальная цепь. Словесно определить строение сложной цепи второго класса так, чтобы установить количественное различие между каждыми двумя такими цепями, вряд ли возможно: для этого мало указать число поводков или даже число концов, или взамен их — бесповодковых звеньев. Надо еще указать, сколько одноповодковых звеньев в каждом конце, сколько их между каждыми двумя ближайшими бесповодковыми и каково расположение последних между собою; но возможно дать сокращенную графическую схему, вполне характеризующую такую цепь.



Фиг. 26.

С этой целью условимся обозначать кружками как двухповодковые, так и бесповодковые звенья, цепь же одноповодковых, ведущих от каждого такого рода звена к другому, обозначать прямою, с указанием числа промежуточных звеньев, которое может быть и нулем; такая схема показана на фиг. 26. В этом схематическом изображении цепь первого класса представится прямой с двумя кружками по концам и с цифрой числа одноповодковых звеньев. Если зарисуем ряд таких схем цепей, отбрасыванием которых механизм приводится к кривошипу, то мы получим некоторое понятие о строении механизма, однако далеко не полное, потому что, образуя механизм последо-

вательным прикреплением таких групп, необходимо еще знать, к какому звену какой из предшествующих групп прикрепить данный поводок; но если в схеме изобразить еще поводки, то схема не будет проще подлинного изображения цепи без метрических соотношений. Уже здесь мы видим, что описать строение механизма языком символических формул есть задача едва ли осуществимая.

Однако некоторое удобство представить при суждении о сложности механизмов знание числа концов цепей второго класса; поэтому условимся определять разряд такой цепи числом ее бесповодковых звеньев. С этой точки зрения всякая цепь первого класса может рассматриваться как цепь нулевого разряда второго класса.

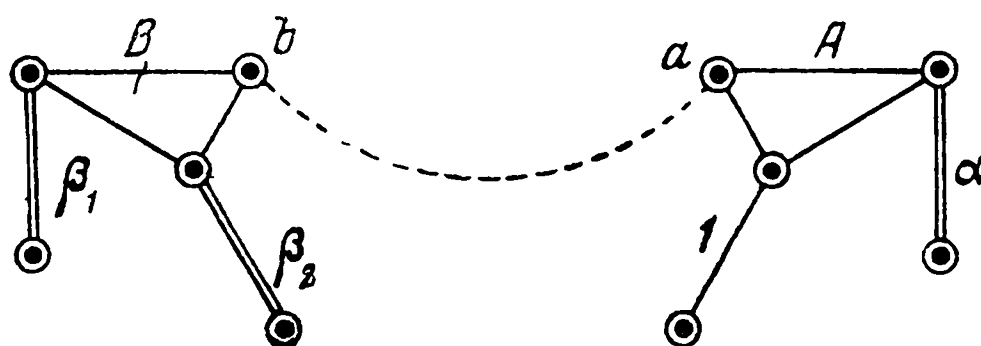
Разряд механизма второго класса будем определять разрядом высшей группы, образующей его.

Переходим к рассмотрению одного из наиболее важных свойств сложной открытой цепи нормального типа, заключающегося в том, что при перемещении одного поводка сложная открытая цепь нормального типа распадается на совокупность нескольких открытых цепей нормального типа.

Доказательство этого положения могло бы быть дано и раньше, но тогда бы оно свелось к рассмотрению весьма большого числа отдельных случаев. Мы могли убедиться, что, по положению, занимаемому в цепи, приходится различать двоякого рода звенья двухповодковые и семь родов звеньев одноповодковых (стр. 58). Число родов звеньев бесповодковых будет равно десяти, потому что к каждому бесповодковому звену примыкает три других звена, которые все или в перемешку будут бесповодковыми, одноповодковыми или двухповодковыми. С каждого звена, снабженного поводком можно взять поводок, т. е. это можно сделать девятью различными способами; перенести же его можно на любое звено из 19 родов; поэтому хотя рассмотрение каждого случая в отдельности элементарно, но всего пришлось бы рассмотреть 9×19, т. е. всего 171 случай. Число этих случаев еще значительно воз-

растет, так как нельзя обойти указанного различения. Ввиду крайней громоздкости такого метода доказательства, хотя формально и правильного, мы предпочли рассмотреть вопросы, связанные с переносом поводка в конце главы, причем теперь имеется возможность исходить из соображений более общего характера.

С этой целью мы воспользуемся тем, что от сложной открытой цепи можно отделить любую ее часть, заменивши ее поводком, причем получится снова цепь нормального типа. Чтобы

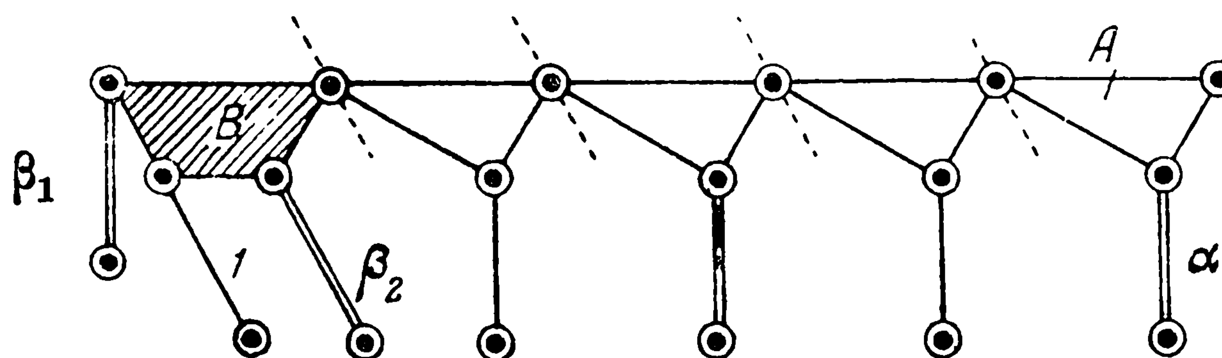


Фиг. 27.

сократить изложение, мы введем понятие символического поводка — так мы будем называть поводок, ставший на место отброшенной части цепи, воображая, что он олицетворяет собою эту часть. Если цепь с символическими поводками есть открытая цепь нормального типа, то и первоначальная цепь будет нормальной. Отсюда следует, что если какая-нибудь цепь, в которой имеются такие именно, т. е. олицетворяющие то же самое, символические поводки, распадается на совокупность открытых цепей нормального типа, то и начальная цепь распадается на такое же число таких же цепей.

Допустим, что со звена A цепи нормального типа мы переносим поводок на звено B этой же цепи. Допустим, далее, что звено A — одноповодковое, а звено B — бесповодковое. От звена A к звену B можно притти единственным путем, схематически показанным (фиг. 27) пунктирной кривой и притом через шарниры a и b. Кроме шарнира a и другого шарнира, в котором укреплен переносимый поводок *1*, звено A обладает еще третьим шарниром, разъединяя который мы отделяем от

всей остальной цепи часть α, которую заменяем символическим поводком того же наименования, изображенным двойной чертой. Разъединяя два шарнира звена B, отличные от шарнира b, отделяем две части β_1 и β_2, которые мы заменяем сивмолическими поводками тех же наименований. Простой ряд звеньев, ведущий от звена A к звену B, тоже может содержать бесповодковые звенья. Разъединяя единственный шарнир такого звена, который не лежит на пути от звена A к звену B, мы от каждого такого звена можем отделить часть, которую заменяем символическим поводком.



Фиг. 28.

Таким образом, мы уничтожили все бесповодковые звенья в простой цепи, ведущей от звена A к звену B; поэтому все промежуточные звенья будут одноповодковые. Так как звенья A и B обратились в конечные и притом двухповодковые звенья, то цепь с символическими поводками есть простая открытая цепь. Переносу поводка в действительной цепи соответствует перенос поводка с крайнего звена в нашей простой цепи на другое крайнее; от такого переноса простая цепь, как известно, распадается на трехповодковую группу и ряд двухповодковых, являющихся частным случаем открытых цепей (фиг. 28). В трехповодковой группе со звеном B заведомо имеется два символических поводка; таким образом, она олицетворяет некоторую более сложную открытую цепь нормального типа. Звено A дает двухповодковую группу с символическим поводком α, которая олицетворяет цепь нормального типа, получаемую из части α, присоединением к ней в звене раздела (так мы будем называть звено, содержащее разъединенный шарнир) поводка A,

остальные двухповодковые группы могут оказаться таковыми и в действительности, или же содержать по одному символическому поводку, превращающему их в более сложные открытые цепи нормального типа.

Мы исходили из предположения, что звено A было одноповодковым, звено же B — бесповодковым. Нетрудно убедиться, что в случае других каких-либо предположений доказательство останется то же, с той лишь разницей, что некоторые, или все три символических поводка α, β_1 и β_2 заменятся действительными, отчего общность наших рассуждений не пострадает.

В случае переноса более чем одного поводка совершенно так же, как в случае простой открытой цепи, приходится отличать первого и второго рода перенос второго поводка. В одном случае распавшаяся цепь распадается еще на более простые, во втором — на совокупность цепей, где, кроме нормальных, имеются цепи с избыточным и недостающим числом поводков. Относительно них остается дословно повторить все то, что было сказано по тому же поводу в случае простых открытых цепей.

Замена двух поводков крайнего звена в сложной открытой цепи нормального типа шарниром тоже не дает начала новой форме, так как такая замена только превращает, как и в случае простой цепи, крайнее звено в поводок следующего.

В результате всего нашего исследования мы можем сказать, что сложная открытая многоповодковая цепь нормального типа является вполне характерной формой, присутствие которой, если она образует последнее из наслоений в механизме, легко определить и, отделивши ее, превратить механизм в простейший.

ДОПОЛНЕНИЕ КО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Изучая нормальные многоповодковые цепи первого класса, мы показали, что существует лишь один тип таких цепей; доказательство наше основывалось на исследовании результатов перегруппировки поводков в нормальной цепи первого класса изученного нами типа. Равным образом, исходя из аналогичных оснований, мы пришли к заключению, что указанный нами тип нормальной цепи второго класса — единственный. Исходя из этих заключений, мы могли указать, что существует два типа нормальных цепей третьего класса с неразвитыми поводками, но и не больше, и что в основе цепей третьего класса с развитыми поводками лежат тоже только эти два типа, что и в них перестановкой поводков нельзя получить нового типа.

Все эти заключения, верные сами по себе, как оказалось при более внимательном рассмотрении, не могут считаться в достаточной мере доказанными. Целью настоящего дополнения являются указание и восполнение недочетов приведенных доказательств ввиду принципиальной важности вопроса, исчерпывающим ли образом обследованы нами возможные типы первых трех классов первого семейства нормальных многоповодковых цепей. Что касается четвертого класса, то известно, что он не исследован исчерпывающим образом.

Кроме того, нам предстоит внести довольно существенное изменение в применявшуюся до сих пор терминологию, которая, при изложении некоторых вопросов, оказалась неудобной. Предлагаемое изменение состоит в следующем.

Те многоповодковые цепи, которые мы до сих пор называли нормальными, будем называть первообразными нормальными

цепями. В понятие же нормальных цепей включим ряд других образований, расширив его круг. Под нормальной цепью будем разуметь всякую цепь, которая, будучи пристегнута концами поводков к неизменяемой основе, дает начало жесткому статически определимому образованию. Таким образом, нормальные цепи могут быть первообразными, но могут быть и составными; под составными цепями будем разуметь такие нормальные цепи, которые распадаются на совокупность первообразных цепей; последние в таком случае будем называть составляющими первообразными цепями.

Составляющие цепи могут быть расположены различными способами. Самое простое расположение будет последовательное, когда, пристегнув все образование к основе, заметим, что первая первообразная цепь всеми поводками прикрепляется к основе, вторая некоторыми поводками — к ней, другими — к основе, третья, в свою очередь, некоторыми поводками — к совокупности предыдущих, некоторыми — к основе и т. д. Возможно, однако, и параллельное присоединение нескольких цепей; можно, например, совершенно независимо друг от друга присоединить к основе несколько первообразных цепей, затем присоединить к совокупности их некоторую новую составляющую так, чтобы некоторыми поводками она соединялась с каждой из них. Каково бы ни было расположение составляющих цепей, те поводки, которые прикрепляются к основе, будем называть основными, те же, которые присоединяют каждую последующую цепь к звеньям или же поводкам предыдущих, — соединительными. Эти термины применялись нами и раньше, но только применительно к последовательному расположению составляющих цепей.

Сказанное относительно расположения составляющих цепей позволяет нам вывести два признака, из которых каждый в отдельности является необходимым и достаточным для того, чтобы данную нормальную цепь признать за составную.

П р и з н а к I. Для того чтобы нормальная цепь оказалась составной, необходимо и достаточно, чтобы в ней имелась

одна первообразная нормальная цепь, всеми поводками прикрепленная к основе.

Необходимость этого признака очевидна; при каком бы то ни было расположении составляющих цепей непременно одна из них должна быть всеми поводками прикреплена к основе, если вообразить всю нормальную цепь прикрепленной к основе. Соединительные поводки не могут быть получены раньше цепи, всеми поводками прикрепленной к основе.

Достаточность признака тоже легко доказывается. Допустим, что имеется в нормальной цепи группа звеньев, которая со своими основными поводками является первообразной нормальной цепью. Присоединив все образование к основе, разъединим временно шарниры, которыми остальные части образования примыкают к указанной первообразной цепи. Последняя вместе с основой образует жесткое целое, которое может быть принято за новую основу, а к ней уже присоединяются остальные части, если восстановить разъединенные шарниры. Таких частей может быть или несколько, не связанных между собой помимо новой основы, или одна. Но каждая из них должна быть признана за нормальную цепь, которая, в свою очередь, может быть составной, но может быть и первообразной.

Это следует из того, что все образование было в соединении со старой основой жестким; поэтому каждая из частей, присоединяясь к новой основе, состоящей из совокупности старой и указанной первообразной цепи, должна опять дать начало жесткому соединению. В самом деле, эти части не связаны между собою помимо новой основы; если бы две какие-либо из указанных частей этому условию не удовлетворяли, мы бы их признали за одну, а не за две части.

Так как каждая из частей к новой основе присоединяется совершенно независимо от другой, то присоединение следующей части не могло бы превратить в жесткое целое соединение предыдущей части с основою, если бы и без того оно не было жестким. Между тем все образование должно дать жесткое соединение со старой основой, потому что представляет

собой нормальную цепь. Это возможно лишь, если каждая из указанных частей с новой основой образует жесткое соединение. Последнее, кроме того, должно быть статически определимым, потому что в противном случае статическая неопределимость вошла бы и в соединение со старой основой всего образования. Это противоречит предположению, что последнее является нормальной цепью. Так как каждая из частей в соединении с неизменяемой основой дает начало жесткому и статически определимому образованию, то каждое из них представляет, в свою очередь, нормальную цепь; будет ли последняя первообразной или составной, но все образование уже во всяком случае будет составною цепью.

Признак II. Для того чтобы нормальная цепь оказалась составной, необходимо и достаточно, чтобы в ней имелась какая-либо первообразная нормальная цепь, соединенная с остальным образованием *только* концами своих поводков.

Необходимость этого признака совершенно очевидна. Образуя составную нормальную цепь, мы должны каждую следующую составляющую присоединять к совокупности остальных концами поводков. Если к звеньям или поводкам этой составляющей не будет присоединена концами своих поводков еще какая-либо дальнейшая составляющая, то доказываемый признак будет осуществлен. Но так как число составляющих конечно, то которая-нибудь из них должна быть последней, и потому одна составляющая, удовлетворяющая указанному признаку, наверно, найдется.

Достаточность указанного признака доказывается тоже легко. Допустим, что указанный нами признак осуществлен. Так как все образование — нормальная цепь, то соединение ее с основою — жесткое. Отделяем теперь ту первообразную цепь, которая соединена с остальным образованием только концами поводков. Мы знаем уже, что концы поводков будут теми точками, положение которых может быть дано независимо и определяет положение всех остальных точек первообразной нормальной цепи. Это следует из того, что, прикрепив эти точки

к неизменяемой основе, получаем жесткое и статически определимое соединение с основой. Другими словами, прикрепляя к основе концами поводков нормальную цепь, мы не вводим этим никакой связи между точками прикрепления, не вводим ее и между точками какой бы то ни было системы, к которым мы прикрепим концами поводков нормальную цепь. Поэтому ни присоединение к данному образованию нормальной цепи только концами поводков, ни отбрасывание такой цепи не изменяет числа степеней его свободы.

Так как данная нам нормальная цепь с основою образовала жесткое статически определимое соединение, то по отделении первообразной цепи, удовлетворяющей указанному нами признаку, оно должно остаться жестким потому, что число степеней свободы не должно измениться; оно должно остаться и статически определимым, так как иначе статическая неопределимость была бы присуща всему образованию. Следовательно, остаток есть нормальная цепь. Будет ли последняя первообразной или составной, все образование окажется составною нормальною цепью.

Переходим к рассмотрению недочетов тех доказательств, которыми мы пользовались, и убедимся в том, что указанные нами типы первообразных нормальных цепей первого и второго классов будут единственными. Начнем с указания одного обстоятельства, которое относится только к цепям второго класса.

Метод развития поводка привел нас только к таким первообразным нормальным цепям второго класса, в которых к узловым звеньям примыкает всего только три соседних звена. Считая доказанным, что всякая перестановка поводков, при которой цепь остается нормальною, превращает ее в составную, все же еще мы не можем утверждать, что другого типа первообразных нормальных цепей не существует. Ведь можно себе представить цепь второго класса с узловыми звеньями, к которым примыкает не три, а сколько угодно других звеньев. Что представляют собой подобного рода цепи, нами вовсе не исследовано. Хотя

метод развития поводка и не привел нас к подобного рода нормальным цепям, но образовать их можно, исходя из других соображений.

С этой целью вспомним, что класс цепи устанавливается совершенно независимо от числа и распределения поводков. Поэтому проще всего будет сначала отвлечься от поводков и рассмотреть, какие могут быть бесповодковые цепи второго класса. Тогда единственным признаком цепи второго класса явится то обстоятельство, что в ней не имеется замкнутого контура из звеньев. Из этого следует, что от одного ее звена к другому ведет только один путь и что по разъединении в ней шарнира она распадается на две не связанных между собою части.

Эти признаки отличают цепи второго класса от цепей классов высших, но присущи и цепям первого класса. От последних цепи второго класса отличаются тем, что в них имеются узловые звенья, т. е. звенья, к которым непосредственно примыкает более двух соседних звеньев; в цепях первого класса узловые звенья отсутствуют. Обе части, на которые распадается бесповодковая цепь первого класса по разъединении в ней шарнира, будут цепями либо первого, либо второго класса, в зависимости от того, будут ли в них узловые звенья, или нет, потому что, за исключением этого признака, остальные непременно сохранятся для каждой из частей порознь. Для сокращения речи будем говорить об узловом звене n-го порядка, если к нему шарнирно примыкает n звеньев.

Очевидно, что, снабжая звенья бесповодковой цепи поводками, получим многоповодковую цепь того же класса, что и бесповодковая, так как при определении класса цепи поводки во внимание не принимаются. При этом общие свойства бесповодковой цепи сохранятся и для многоповодковой. Если в нормальной первообразной цепи второго класса исследованного нами типа отбросим поводки, то убедимся, что в ней имеются только узловые звенья третьего порядка. Поставим же вопрос о том, нельзя ли образовать сначала бесповодковую цепь второго

класса, в которой имелись бы узловые звенья более высокого порядка, и нельзя ли, присоединив к ней поводки, превратить ее в нормальную цепь. Очевидно, что это можно.

Сначала образуем бесповодковую цепь второго класса, в которой имелись бы узловые звенья порядка выше третьего. С этой целью возьмем две цепи второго класса с узловыми звеньями третьего порядка и одно звено A одной из них свяжем шарнирно с узловым звеном B другой. Звено B станет узловым звеном четвертого порядка; вся цепь будет относиться ко второму классу, потому что узловые звенья в ней имеются, а основной признак, что от одного ее звена к другому ведет только один путь, будет удовлетворен. Последнее следует из того, что он удовлетворен порознь для каждой из частей, которые мы соединили, и что переход из одной части в другую может совершаться только через посредство звеньев A и B и единственного шарнира, их соединяющего. Можно, далее, к тому же звену B присоединить шарнирно еще звено третьей цепи второго класса с узловыми звеньями третьего или даже четвертого порядка и получить звено пятого порядка и т. д. Если бы мы захотели получить цепь, в которой все узловые звенья были бы выше третьего порядка, то можно было бы к каждому из таких звеньев присоединить шарнирно конечные звенья цепей первого класса, не содержащих узловых звеньев, причем второе конечное звено такой цепи первого класса останется конечным в полученном образовании. Итак, легко представить себе бесповодковую цепь второго класса, в которой имеются узловые звенья порядка выше третьего.

Нетрудно определить и число поводков, которое способно такую цепь превратить в нормальную. Мы знаем, что узловые звенья не могут быть порядка ниже третьего; для общности назовем звеньями второго и первого порядков звенья, имеющие, соответственно, два и одно соседних звена. Эти звенья узловыми не будут; звенья второго порядка будут средними, как, например, средние звенья цепи первого класса, звенья первого порядка будут конечными. Заметим, что в бесповодковой цепи

число шарниров звена и число, определяющее его порядок, будут равны между собой, так как два звена между собой двумя шарнирами связаны быть не должны; в многоповодковых цепях к этому числу шарниров, названных нами междузвенными, прибавятся еще шарниры, которыми присоединяются поводки.

Допустим же, что в бесповодковой цепи, содержащей всего n звеньев, будет всего n_1 звеньев первого порядка, n_2 звеньев второго порядка, n_3 звеньев третьего порядка и т. д., n_k звеньев k-го порядка. Если все эти шарниры разъединим, то получим для всех звеньев в совокупности $3n$ степеней свободы, потому что неизменяемая фигура в плоскости обладает тремя степенями свободы, а таких неизменяемых, не связанных между собою звеньев у нас n. Каждый шарнир, устроенный между двумя звеньями, если только при этом не введется статической неопределенности, что противоречило бы нашим допущениям, лишает совокупность указанных n звеньев двух степеней свободы. Поэтому, если мы хотим подсчитать число степеней свободы σ нашей бесповодковой цепи по восстановлении разъединенных шарниров, то из числа $3n$ нужно вычесть удвоенное число шарниров. Последнее получим, подсчитав число шарниров в каждом из звеньев порознь и взяв сумму полученных чисел. Число степеней свободы нашей бесповодковой цепи окажется:

$$\sigma = 3n - [n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + (k-1)\, n_{k-1} + kn_k].$$

Но в свою очередь:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{k-1} + n_k.$$

Следовательно:

$$\sigma = 2n_1 + n_2 - [n_4 + 2n_5 + \cdots + (k-4)\, n_{k-1} + (k-3)\, n_k]. \quad \text{(I)}$$

Эта формула справедлива для цепей любого класса. Замечательно, что узловые звенья третьего порядка вовсе не входят в выражение числа степеней свободы. Для всех бесповодковых

цепей, в которых не имеется иных узловых звеньев, кроме трехшарнирных, предыдущая формула примет вид:

$$\sigma = 2n_1 + n_2. \tag{1}$$

Чтобы связать бесповодковую цепь в жесткое целое с неизменяемой основой, которую представляем себе неподвижной, необходимо лишить ее указанного числа степеней свободы. Мы хотим этого достичь, присоединяя звенья цепи к основе при помощи поводков. Каждый поводок является осуществлением одной связи, и потому число поводков не может быть меньше указанного числа σ. Но число поводков, если бы мы добивались только жесткого соединения с основой, могло бы быть больше этого числа, потому что не всякая связь уменьшает число степеней свободы системы. Если связь вытекает из совокупности остальных, то она не влияет вовсе на число степеней свободы. Поэтому, если, вводя поводок, мы осуществляем последнего рода связь, то этот поводок не должен учитываться в числе σ поводков; он будет избыточным и может быть отброшен без нарушения жесткого соединения с основой. Но если многоповодковая цепь должна быть нормальной, то избыточных поводков в ней не должно быть, потому что осуществление связи, вытекающей из остальных связей, дает начало системе статически неопределимой, а соединение с основой нормальной цепи должно быть не только жестким, но и статически определимым. Поэтому число поводков нормальной цепи не может быть и больше указанного числа σ. Итак, чтобы превратить бесповодковую цепь в нормальную, необходимо снабдить ее числом поводков, именно определяемым формулой (I).

Но этого недостаточно. Важно еще правильным образом распределить поводки. Если, например, мы одно звено снабдим более чем тремя поводками, сохранив общее число σ, то цепь нормальной не будет, потому что с основой не даст жесткого соединения. Ведь звено, присоединенное тремя поводками к основе, образует с последней жесткое, статически определимое соединение; поэтому всякий следующий поводок, со-

единяющий то же звено с основой, будет осуществлением связи, вытекающей из остальных, и внесет статическую неопределимость. Такого рода связь может быть отброшена, без изменения числа степеней свободы системы; останется число независимых связей меньше, чем σ, и ясно, что жесткого соединения с основой не получится. Поэтому, говоря об избыточных поводках, мы не только будем иметь в виду поводки, которые превышают указанное число σ, но и все образование в целом, и те поводки, которые являются избыточными по своему положению, хотя бы число поводков равнялось нормальному σ или было меньше его.

Таким образом, избыточным условимся называть всякий поводок, по устранении которого число степеней свободы, связанной с основой многоповодковой цепи, не изменится. Если поводок избыточен по положению, то общее число поводков либо равно, либо меньше нормального; в противном случае он будет избыточным по числу всех поводков.

Итак, если мы бесповодковую цепь снабдим числом поводков σ, определяемым формулой (I), и если при этом распределение поводков будет правильным, т. е. таким, чтобы не оказалось среди них избыточных по положению, то получится цепь нормальная. Применяя этот прием к бесповодковым цепям второго класса с узловыми звеньями выше третьего порядка, получим нормальную цепь второго класса с такими же узловыми звеньями. Конечно, о распределении поводков формула ничего не говорит; не говорит она нам ничего и относительно того, можно ли этим путем получить первообразную цепь, или же полученные цепи второго класса будут непременно составными.

Весьма любопытно с точки зрения оценки метода развития поводка, что, с одной стороны, этим методом нельзя притти к нормальным цепям второго класса с узловыми звеньями выше третьего порядка, с другой же стороны — *эти цепи не могут быть первообразными, а только составными.*

Последнее и предстоит нам доказать.

Однако, кроме того, нам предстоит заняться еще заново вопросом о результате перегруппировки поводков в первооб-

разных нормальных цепях изученных типов. Мы считали доказанным, что всякая перегруппировка поводков первообразной нормальной цепи, при которой цепь остается нормальной, превращает ее в составную. Так, по крайней мере, формулируются наши прежние выводы в измененной терминологии. Пришли мы к ним следующим путем. Перенос поводков мы делили на перенос первого и второго родов. Для цепей первого и второго классов доказывалось, что перенос одного поводка всегда превращает первообразную цепь в составную; такой перенос в пределах данной первообразной цепи назывался переносом первого рода. Когда цепь после переноса одного поводка разбилась на несколько первообразных составляющих, то можно опять совершить перенос одного поводка со звена одной из составляющих на другое ее же звено, поступая таким же образом несколько раз подряд. Если данная перегруппировка поводков может быть достигнута последовательными переносами первого рода, то, очевидно, цепь разобьется только на составляющие, т. е. из первообразной нормальной цепи превратится в составную.

Желая изучить результат любой перегруппировки, мы руководствовались следующими соображениями. Результат этот может быть получен переносом каждого поводка только по разу. Поводки убираются только с тех звеньев, на которых число их должно быть уменьшено, и новые поводки на такие звенья не переносятся. Таким образом, в результате последовательных переносов число поводков одних звеньев все время возрастает, других — все время убывает. Не требует доказательства, что всякая перегруппировка поводков этим путем может быть достигнута. Далее, сперва переносятся поводки по одному, пока есть возможность совершать переносы первого рода. Если наступила такая комбинация, при которой нет уже возможности переносить поводки в пределах одной из составляющих цепей, чтобы осуществить заданную перегруппировку, то остается переносить поводки со звеньев одних из составляющих цепей на звенья других. Этот перенос назван нами переносом второго

рода. Здесь уже незачем переносить поводки по одному, а можно просто взять поводки с тех составляющих, где их больше, и разместить по составляющим, где их меньше.

Результат переноса второго рода был рассмотрен на стр. 31. Здесь доказано было, что перенос второго рода превращает цепь нормальную в ненормальную, не способную дать с основой жесткого соединения, потому что налицо оказались избыточные поводки. Таким образом, выходило, что если результат перегруппировки поводков может быть получен рядом последовательных переносов первого рода, то цепь остается нормальной, но будет составной. Если же пришлось прибегнуть к переносу второго рода, то цепь вообще не будет нормальной и потому не подлежит дальнейшему исследованию.

Хотя вопрос о переносе второго рода был разобран только при рассмотрении цепей первого класса, но доказательство, относящееся к результату его, было дано в общем виде, так что могло быть перенесено и, действительно, применялось нами на случай цепей второго и третьего классов. К сожалению, в доказательство вкралась досадная ошибка. Совершенно неверно, что перенос второго рода всегда превращает нормальную цепь в ненормальную. Убедиться в этом проще всего на примере, образовав составную нормальную цепь следующим образом. Возьмем трехповодковую группу, все поводки которой — основные, и к ней присоединим вторую такую же группу, у которой лишь два поводка — основные, а третий — соединительный. Если поводок первой группы перенесем на звено второй, то оба звена лишь поменяются ролями и цепь останется нормальной составной. Неверный результат в главе II был получен оттого, что при доказательстве часть и целое обозначены, по недосмотру, одной и той же буквой; именно буквой k обозначено все число соединительных поводков, а затем той же буквой обозначено число поводков части составляющих цепей, именно тех, число поводков которых при переносе второго рода уменьшилось. Наше заключение, относящееся к переносу второго рода, оказывается безусловно правильным лишь в том случае,

если число переносимых поводков больше суммы числа соединительных поводков тех составляющих цепей, число основных поводков которых при этом переносе увеличивается.

Такой прием изучения переноса второго рода не имеет никакой ценности для разбора результата переноса поводков в нормальных цепях. Вот почему мы и не занимаемся исправлением указанного доказательства, и на совершенно новых основаниях докажем, что указанные типы цепей первого и второго классов, а также третьего класса с развитыми поводками, будут единственными типами первообразных нормальных цепей, что поэтому всякая нормальная цепь с иным распределением поводков или с узловыми звеньями выше третьего порядка, если она есть цепь второго класса или если последние окажутся в концевых цепях цепи третьего класса, будет цепью составной*.

Положение I. В первообразной нормальной цепи не может быть иных концевых звеньев, кроме двухповодковых.

Если конечное звено будет трехповодковым, то это будет частный случай первообразной цепи первого класса, всеми поводками прикрепленной к основе, и цепь в силу признака I, будет составной, если она вообще будет нормальной. Более трех поводков вообще ни одно звено нормальной цепи иметь не может, так как тогда будут избыточные поводки. Если конечное звено будет одноповодковым, то оно вместе со своим поводком образует двухповодковую группу, причем к остальному образованию она примыкает только концом одного из своих поводков. Поэтому, в силу признака II, цепь, если она вообще относится к числу нормальных, будет составной. Бесповодко-

* Доказательство, основанное на неправильно разобранных свойствах переноса второго рода, было применено, благодаря своей краткости, после того, как у автора имелось уже другое доказательство, весьма сложное и длинное, основанное на рассмотрении весьма большого числа отдельных комбинаций в расположении поводков. Поэтому, несмотря на применение доказательства неправильного, доказываемые положения все же сами по себе правильны. Приводимое ниже доказательство будет уже третьим по числу и простым сравнительно с первоначальным.

вым конечное звено тоже быть не может; такое звено всегда может вращаться около шарнира, связывающего его с соседним, хотя бы все остальные звенья образовали жесткое соединение с основой; в этом случае цепь даже нормальною быть не может. Остается лишь заключение, что конечное звено будет двухповодковым.

Положение II. Если между некоторым звеном первообразной нормальной цепи и конечным звеном нет узловых звеньев, то все промежуточные звенья могут быть только одноповодковыми.

Допустим, что в цепи имеется некоторое звено A и что на пути от звена A к концевому звену B не встречается узловых звеньев. Если это так, то каждое из звеньев между A и B будет звеном второго порядка и вся цепь, примыкающая к звену A, включая и звено B, будет простой цепью; при этом она будет цепью концевой, так как содержит конечное звено B. Звеньев, снабженных более чем тремя поводками, в цепи не может быть, так как предположено, что цепь нормальная, и потому избыточных поводков ни по числу, ни по положению в ней не имеется; звеньев трехповодковых в ней тоже быть не может в силу признака I, так как предположено, что цепь — первообразная, следовательно, можно говорить лишь о звеньях одноповодковых, двухповодковых и бесповодковых.

Допустим, что между звеньями A и B, кроме одноповодковых, имеются еще бесповодковые и двухповодковые. Возьмем ближайшее к звену B такое звено C и предположим, что оно двухповодковое. Между звеньями B и C уже иных звеньев, кроме одноповодковых, не будет; число последних может равняться и нулю. В том и другом случае цепь, состоящая из звеньев B и C и промежуточных между ними, если последние существуют, будет нормальной первообразной цепью первого класса изученного типа, все поводки которой — основные, и в силу признака I все образование не может быть первообразной цепью.

Остается испытать лишь второе возможное предположение, что звено C бесповодковое. Если между звеньями B и C не будет

других звеньев, то можно звено C считать за соединительный поводок звена B, которое, кроме того, имеет еще два основных поводка. Получается трехповодковая группа, которая примыкает к остальному образованию только концом одного из своих поводков, именно соединительного поводка C. Если между звеньями B и C будут еще звенья, то, согласно допущению относительно положения звена C, это будут звенья одноповодковые. Считая опять звено C соединительным поводком, который должен быть отнесен к соседнему с ним, более близкому к звену B одноповодковому звену D, мы скажем, что последнее обладает двумя поводками: одним основным и одним соединительным, что между двухповодковыми звеньями D и B заключается группа звеньев только одноповодковых, число которых может равняться и нулю, а потому вся цепь, начинающаяся звеном D и кончающаяся звеном B, есть первообразная нормальная цепь первого класса изученного типа, которая к остальному образованию примыкает лишь концом соединительного поводка C. Все образование не может быть цепью первообразной в силу признака II.

Итак, допустив, что между звеньями A и B имеются иные звенья, кроме одноповодковых, мы пришли к выводу, что цепь может быть только составной; следовательно, в случае первообразной цепи между звеньями A и B могут оказаться только звенья одноповодковые.

Положение III. Существует лишь один тип первообразной нормальной цепи первого класса, в котором два конечных звена будут двухповодковыми, а все средние звенья — одноповодковыми.

Это есть простое следствие из двух предыдущих положений. Чтобы применить второе из них, нужно только под звеньями A и B, упомянутыми при его доказательстве, разуметь два конечных звена цепи первого класса.

В дальнейшем нам необходимо расширить пределы применимости метода развития поводка на случаи, к которым он до сих пор не применялся.

Пока мы этот метод применяли только к нормальным цепям, в которых нет избыточных поводков. В простейшем своем виде метод развития поводка представляет собой замену поводка двухповодковым звеном, шарнирно прикрепляемым к тому звену некоторого образования, в котором был укреплен поводок. После указанной замены цепь оставалась нормальной. Но этого еще мало: все изученные типы первообразных нормальных цепей после указанной замены оставались первообразными. Последнее заключение нельзя, конечно, распространить на типы неизученные.

Прием развития поводка можно было применять многократно, и тогда поводок заменялся в конечном итоге образованием, которое мы называли развитым поводком в самом общем виде или же нормальной концевой цепью. Применяя к последней слово «нормальная», следует помнить, что это слово здесь относится только к определенному распределению поводков. Пристегнутая к основе только концами поводков, она не дает начала жесткому соединению, так как для этого в ней не хватит одного поводка. По структуре своей развитой поводок тождествен каждой из частей первообразной цепи второго класса изученного нами типа, на которые последняя распадается, если в ней разъединить шарнир. При этом такая часть обратится в концевую цепь, только если ее присоединить к какому-либо образованию шарниром, устроенным в звене раздела; этот шарнир удобно называть началом концевой цепи. Последний термин удачно применяется и к случаю ненормальных концевых цепей. Нормальная концевая цепь никогда не мыслится в самостоятельном соединении с основой, а всегда в соединении с каким-либо другим образованием, к которому она примыкает только одним шарниром, названным нами ее началом. Все сказанное относительно замены поводка двухповодковым звеном относится и к замене его нормальной концевой цепью, которая при этом должна началом своим быть прикреплена к тому звену, к которому примыкал поводок.

На свойствах нормальных концевых цепей основан метод символического поводка, применявшийся для доказательства, что данная нормальная цепь — составная из первообразных цепей исследованных типов. Когда имеем дело с цепями неисследованных типов, то мы не можем утверждать, что первообразная цепь, по развитии в ней поводка, останется первообразною; возможно предположить, что она окажется составной. Поэтому, применяя метод символического поводка и получив в результате цепь первообразную какого-либо нового типа, мы не можем утверждать, что данная цепь тоже первообразная. Но мы можем утверждать, что если цепь будет составной, то по развитии в ней поводка она останется составною.

Каждая из первообразных составляющих по развитии поводка останется нормальной цепью. Если все эти составляющие останутся первообразными цепями, то число составляющих не изменится, в противном случае увеличится, но составною цепь непременно будет. Отсюда следует, что применение метода символического поводка в первообразной нормальной цепи непременно даст в результате цепь первообразную. Если бы получилась цепь составная, то, проделав обратное действие, т. е. заменив символический поводок нормальной концевой цепью, мы не вернулись бы к первоначальному образованию, а получили бы составную цепь вместо первообразной.

Теперь нам предстоит расширить пределы применения метода развития поводка и обратного ему метода символического поводка, основываясь на следующем положении.

> П о л о ж е н и е IV. Если в какой бы то ни было многоповодковой цепи, пристегнутой к неизменяемой основе, заменить поводок нормальною концевою цепью, то число степеней свободы относительно основы не изменится; равным образом не изменится число избыточных поводков, если последние вообще имелись.

Мы знаем уже, что нормальная концевая цепь, или развитой поводок, образуется посредством многократного применения приема замены поводка двухповодковым звеном. Поэтому доста-

точно доказать указанные свойства для случая этой простейшей замены.

Рассмотрим сначала случай, когда избыточных поводков нет. Удаляя один поводок в соединении цепи с основой, мы тогда заведомо сообщаем ему одну степень свободы; после этого звено, в котором был прикреплен поводок, не будет уже жестко связано с основою, иначе поводок был бы заведомо избыточным. Присоединение двухповодкового звена можно разбить на присоединение одноповодкового с последующим снабжением его поводком. Присоединение одноповодкового звена равносильно присоединению двухповодковой группы и не изменяет числа степеней свободы системы; один поводок этой группы — основной, другой же — соединительный и присоединяется к звену, которое может двигаться относительно основы; этот соединительный поводок в то же время образует то присоединяемое звено во всем образовании, которое мы назвали одноповодковым и к которому надо присоединить еще поводок. Это звено не связано неподвижно с основою, потому что оно же образует поводок двухповодковой группы, один конечный шарнир которой может двигаться относительно основы. Поэтому второй поводок не будет избыточным, и присоединение его снова лишит систему одной степени свободы. Итак, замена поводка двухповодковым звеном не изменила числа степеней свободы и не внесла избыточных поводков в цепь, в которой они не имелись.

Имея в виду это доказательство, не следует забывать, что мы говорим об избыточности поводка только с точки зрения структурной, т. е. называем поводок избыточным только в том случае, если он при всякой длине и при всяком положении будет избыточным. Если же существуют какая-либо определенная длина или определенные точки его закрепления в звене или основе, при которых он будет избыточным, то это зависит не от структурных свойств, а связано с некоторыми определенными метрическими соотношениями, представляя особый случай, который мы условились не рассматривать. Отсюда следует, что если какой-либо поводок является избыточным, то, по устра-

нении его в пристегнутой к основе цепи, звено, в котором он был укреплен, должно остаться жестко связанным с основою. В самом деле, каждый другой заменяющий его поводок, который свяжет какую-нибудь точку основы и какую-нибудь точку указанного звена, должен оказаться избыточным; это значит, что и в отсутствии указанного поводка всякая точка звена от всякой точки основы должна находиться на неизменном расстоянии, т. е. и без него звено жестко связано с основою.

Теперь переходим к случаю, когда в цепи имеются избыточные поводки. Возможно, что заменяемый поводок не относится к числу избыточных. Устраняем сначала все избыточные поводки и производим указанную замену.

Число степеней свободы первоначально данного и полученного образования будет одно и то же, потому что устранение избыточных поводков не изменило числа степеней свободы; оно осталось, по доказанному, таким же в результате произведенной замены, не внесшей в то же время новых избыточных поводков. По устранении избыточных поводков звенья, в которых они укреплялись, остались неизменно связанными с основою. Восстанавливая устраненные поводки, мы убедимся, что они, в силу этого, будут избыточными. Таким образом, те же поводки, которые были избыточными, ими и останутся. Восстановление их не изменит при этом числа степеней свободы образования. Для этого случая положение доказано.

Остается рассмотреть случай, когда заменяемый поводок относится к числу избыточных. Устраняя его, мы замечаем, что звено, в котором он был укреплен, остается неизменно связанным с основою; при устранении его число степеней свободы образования не изменилось в силу определения того, что называется избыточным поводком. Присоединение двухповодкового звена опять разбиваем на присоединение одноповодкового и снабжаем его вторым поводком. Одноповодковое звено окажется неизменно связано с основой, потому что оно может рассматриваться как соединительный поводок двухповодковой группы, в которой один конечный шарнир закреплен в ос-

нове, другой неподвижен относительно ее. Поводок этого звена не может быть избыточным, потому что, устранив его, мы не получаем жесткого соединения звена с основой, так как звено может вращаться около своего единственного шарнира. В присутствии же поводка это же звено жестко связано с основой; поэтому второй поводок этого звена заведомо окажется избыточным; присоединение его не лишит системы степени свободы. Итак, в силу указанной замены число степеней свободы не изменилось, и на место избыточного поводка стал другой такой же поводок, т. е. не изменилось и число избыточных поводков.

Положение IV расширяет рамки применения метода символического поводка, позволяющего вместо данного образования рассматривать цепь, упрощенную заменой некоторых нормальных концевых цепей символическими поводками. До сих пор мы знали, что если упрощенная цепь будет первообразной нормальной изученного типа, то и данная цепь будет первообразной нормальной цепью независимо от типа цепи. Если упрощенная цепь будет нормальной составной, то и данная будет такой же цепью, если же, наоборот, данная будет заведомо первообразной, то первообразной будет и упрощенная цепь, если она только нормальная. Теперь же относительно последнего исчезают всякие сомнения, и мы можем утверждать, независимо от типа цепи, что если данная цепь была нормальной, то упрощенная цепь будет заведомо нормальной; если данная цепь обладала избыточными поводками, то таким же числом избыточных поводков будет обладать и упрощенная цепь, и наоборот.

После этого мы можем перейти к ближайшему рассмотрению возможной структуры первообразной нормальной цепи второго класса. Начнем с рассмотрения структуры простых концевых цепей, т. е. содержащих звенья не выше второго порядка. Здесь можно доказать положение, справедливость которого распространяется за пределы цепей второго класса.

П о л о ж е н и е V. В первообразной нормальной цепи простая концевая цепь может быть составлена только из

одноповодковых звеньев, заканчивающихся двухповодковым звеном.

Что конечное звено будет двухповодковым, следует из положения I; что все остальные звенья, если они вообще существуют, будут одноповодковые, следует из положения II; при этом за звено A, упомянутое при его доказательстве, следует считать то, к которому концевая цепь примыкает своим началом, за звено B — конечное ее звено.

Положение VI. В первообразной нормальной цепи вилка не может содержать более двух ветвей.

Мы помним, что под вилкой мы разумели совокупность нескольких простых концевых цепей, укрепленных началом в одном и том же звене; эти концевые цепи назывались концами, или ветвями, вилки.

До сих пор мы имели дело только с вилками, содержавшими не более двух ветвей, потому что узловые звенья были у нас третьего порядка. Если мы предполагаем возможность существования в цепи второго класса узловых звеньев высшего порядка, приходится иметь в виду и вилки с бо̀льшим числом ветвей. При этом следует различать вилки двоякого рода, которые условимся называть правильными и неправильными. Вилку условимся называть правильной, если узловое звено, к которому она примыкает, обладает лишь одним шарниром сверх тех, которые служат началами отдельных ветвей вилки; такое узловое звено, по отбрасывании вилки, окажется конечным. Вилку, которая этому условию не удовлетворяет, будем называть неправильной; по отбрасывании ее узловое звено, к которому она примыкала, не окажется конечным. Доказываемое здесь положение относится как к правильным, так и к неправильным вилкам.

В силу предыдущего положения, если цепь первообразная, ветви вилки относятся к концевым цепям нормального типа. Допустим, что их три. Упрощаем образование, заменив эти концевые цепи поводками; если узловое звено было бесповодковое, то оно после замены окажется трехповодковым, и все

его поводки будут основными; в силу признака I упрощенное образование будет составной цепью; но тогда данное образование не может быть первообразной цепью, и мы пришли к противоречию. Возможно предположить, что звено, к которому примыкала вилка, имело еще один или несколько поводков. Тогда по введении символических поводков оно будет снабжено более чем тремя поводками; упрощенная цепь будет содержать избыточные поводки и заведомо нормальной не будет; в силу положения IV нормальной не будет тогда и данная цепь. К тому же заключению придем, если вилка содержала более трех ветвей. Итак, вилка не может содержать ни трех, ни более ветвей, если цепь должна быть нормальной и первообразной; две ветви, как мы знаем по примеру нормальных первообразных цепей второго класса изученного типа, она может содержать; меньше двух ветвей в вилке не может быть по самому ее определению.

Положение VII. Во всякой цепи второго класса имеются правильные вилки.

Это есть следствие того, что в цепи второго класса звенья не могут образовать замкнутого контура и что число звеньев предполагается конечным. Допустим, что в цепи второго класса не имеется правильной вилки. Взяв любое узловое звено, заметим, что оно при этом условии имеет не меньше двух таких шарниров, к которым не примыкает простой концевой цепи. Следовательно, через эти шарниры от рассматриваемого звена путь ведет к двум разным узловым звеньям; иначе бы примыкающие в них образования были простыми цепями и притом концевыми, так как замкнутых не имеется. Поэтому, имея узловое звено B, мы можем притти от него к двум другим узловым звеньям A и C через два различных его шарнира; при этом звенья A и C можно условиться называть смежными с B в том смысле, что на пути от B к ним не встретится узловых звеньев, а имеются лишь звенья второго порядка. Так как эти соображения должны у нас относиться к любому из узловых звеньев, если правильных вилок не имеется, то к любому

узловому звену *B* можно притти от смежного с ним узлового звена *A* через один шарнир и через другой шарнир звена *B* перейти к другому, смежному с ним узловому звену *C*. Поэтому или число узловых звеньев должно быть бесконечным, или, пройдя ряд звеньев, мы должны вернуться к исходному звену. Первое противоречит предположению, что цепь имеет конечное число звеньев, второе — тому, что она относится к цепям второго класса.

Положение VIII. В первообразной нормальной цепи второго класса узловые звенья, к которым примыкают правильные вилки, будут звеньями трехшарнирными и бесповодковыми.

Что указанные звенья будут третьего порядка, следует из того, что, в силу положения VI, вилка содержит только две ветви; так как вилка правильная, то, кроме двух шарниров, в которых она примыкает, имеется в узловом звене только один еще третий, междузвенный его шарнир. Узловое звено должно быть бесповодковым и, следовательно, трехшарнирным, потому что, применяя метод символического поводка, т. е. заменяя вилки поводком, в результате получим нормальную и первообразную цепь только в том случае, если узловое звено бесповодковое; иначе оно превратится либо в трехповодковое звено, и цепь будет составной, если она нормальная, либо в звено, содержащее больше трех поводков, и тогда цепь даже нормальной не будет.

Положение IX. Единственно возможный тип нормальной первообразной цепи второго класса есть тот, который получается методом развития поводка из единственного же типа первообразной нормальной цепи первого класса.

Допускаем, что перед нами имеется первообразная нормальная цепь второго класса, тип которой еще не установлен. Будем к ней применять метод символического поводка. Применение этого метода основано на положении IV. Мы убедились уже, что применение метода символического поводка к перво-

образной нормальной цепи всегда дает в результате тоже цепь нормальную и первообразную. На основании положения VII можем утверждать, что в данной нам цепи имеются правильные вилки и, в силу положения VI, — что каждая вилка имеет две ветви, представляющие каждая нормальную концевую цепь. Наконец, положение VIII позволяет утверждать, что узлорые звенья, к которым эти вилки примыкают, будут трехшарнирными и бесповодковыми.

Обратимся к одной из правильных вилок и заменим каждую из ее ветвей символическим поводком; тогда бесповодковое, к которому примыкала вилка, обратится в конечное двухповодковое звено. Упрощенную цепь назовем первым преобразованием. Оно содержит на одно узловое звено меньше данной цепи и тоже будет нормальной первообразной цепью, если такой была данная. Поэтому в первом преобразовании тоже имеются правильные вилки, из которых каждая имеет две ветви, представляющие нормальные концевые цепи, примыкающие к трехшарнирному бесповодковому узловому звену. Опять отбрасываем одну из вилок, превращая узловое звено, к которому она примыкала, в конечное двухповодковое; получаем второе преобразование. Оно обладает всеми теми же свойствами, как и первое и первоначальная цепь.

Будем продолжать все те же действия, пока это окажется возможным. Каждое следующее преобразование содержит на одно узловое звено меньше предыдущего, потому что всякий раз мы уничтожаем одно узловое звено, превращая его в конечное двухповодковое; при этом каждый раз мы убеждаемся, что уничтожаемое узловое звено было в первоначальной цепи трехшарнирным и бесповодковым, следовательно, звеном третьего порядка. Продолжение все тех же действий окажется невозможным, когда будут уничтожены все узловые звенья, т. е. когда получится цепь первого класса. При этом мы успели, однако, убедиться, что все узловые звенья первоначально данной цепи были звеньями третьего порядка и, следовательно, в нормальной первообразной цепи второго класса узловых

звеньев порядка выше третьего не может быть. Если и могут быть нормальные цепи второго класса с узловыми звеньями порядка выше третьего, то они будут составными. Таким образом, один из вопросов, которому посвящено наше дополнение, уже решен.

Каждое из преобразований представляет собой нормальную первообразную цепь; поэтому этим свойством должно обладать и последнее из них; это есть цепь первого класса. Тип первообразной нормальной цепи этого класса — единственный и нами установлен. От данной цепи к последнему преобразованию мы пришли последовательным применением метода символического поводка; этот метод состоит в том, чтобы на место развитого поводка ставить простой. Метод же развития поводка состоит как раз в обратном действии: на место простого поводка ставить развитой. Поэтому, проходя от последнего нашего преобразования в обратном порядке все промежуточные до данной цепи, заметим, что каждое из них получается из предыдущего, более простого по методу развития поводка.

Итак, исходя только из предположения, что данная нормальная цепь второго класса будет первообразной, мы пришли к заключению, что она может быть получена из первообразной нормальной цепи первого класса методом развития поводка. Этим вполне определяются распределение в ней поводков и характер узловых звеньев, потому что тогда она представляет тот именно тип первообразной нормальной цепи второго класса, который был нами изучен во второй главе. Итак, доказано, что всякая первообразная нормальная цепь второго класса принадлежит именно к этому типу, что изученный тип и есть единственный. Всякий иной тип нормальной цепи второго класса, будет ли он отличаться от указанного расположением поводков или характером узловых звеньев, будет цепью составной.

Этим исчерпывается наше дополнение, поскольку оно относится непосредственно к содержанию второй главы. Однако неправильно разобранные свойства переноса второго рода на-

шли себе применение еще при исследовании цепей высших классов, снабженных развитыми поводками. Было показано, что нельзя ни переставить поводки в пределах нормальной концевой цепи, ни перенести некоторое число их на основной контур или обратно, с последнего на концевую цепь, не превращая цепи в составную. И это положение само по себе верно, правильно доказано для случая переноса одного поводка, и лишь для случая переноса более одного поводка способ доказательства неправилен. Ввиду этого нам остается доказать еще следующее положение.

П о л о ж е н и е X. В любой нормальной первообразной цепи концевые образования могут относиться лишь к тому типу, который представляет собой развитой поводок.

Необходимо для доказательства распространить положения VII и VIII на концевую цепь, когда последняя есть часть первообразной нормальной цепи. Мы помним, что концевой цепью называется цепь второго класса, одним шарниром примыкающая к остальному образованию, в нашем случае — к основному контуру. Если этот шарнир устроен в каком-либо из средних звеньев цепи второго класса, положение VII непосредственно приложится к концевому образованию, так как каждая вилка осталась нетронутой. Возможно, однако, что шарнир устроен в концевом звене; от последнего ведет цепь звеньев второго поряда к некоторому звену высшего порядка, т. е. узловому; эта промежуточная цепь может и вовсе отсутствовать.

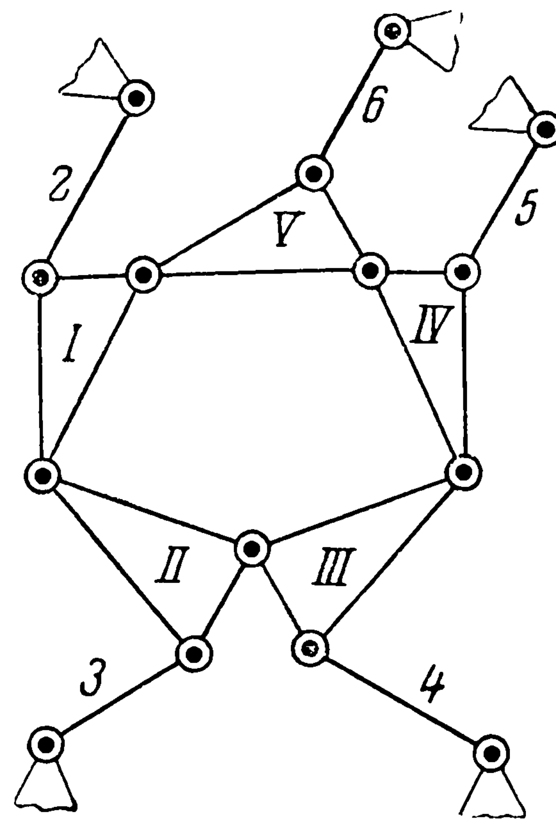
Отделяем от всей цепи второго класса концевое звено вместе с указанной промежуточной цепью. Если в остатке получится цепь второго класса, то к ней применяется положение VII, если же цепь первого класса, то было только одно узловое звено, к которому и примыкала правильная вилка в двух его не подвергшихся разъединению шарнирах. После этого на концевую цепь, составляющую часть первообразной цепи, непосредственно можно перенести заключение положения VIII, применив дословно то же доказательство. Затем применим прием символического поводка совершенно в том виде, как это

делалось при доказательстве положения IX. Уничтожив все узловые звенья, получим простую концевую цепь, причем упрощенное образование должно остаться первообразной и нормальной цепью. Эта цепь, в силу положения II, представляет собой развитой поводок, а первоначально данная представит тогда дальнейшее развитие того же поводка.

Глава третья

ПРОСТЫЕ МНОГОПОВОДКОВЫЕ ЗАКРЫТЫЕ ЦЕПИ НОРМАЛЬНЫХ ТИПОВ С ПРОСТЫМИ И РАЗВИТЫМИ ПОВОДКАМИ

Если в открытой простой цепи нормального типа, пристегнутой к неизменяемой основе, мы устраним по одному поводку обоих крайних звеньев, то получим систему с двумя степенями свободы; соединяя теперь два ее крайних звена шарниром между собой, мы снова лишаем систему обеих степеней свободы, т. е. получаем систему жесткую. Так, из фиг. 5 получена фиг. 29.



Фиг. 29.

Мы замечаем, что в этом новом образовании все звенья — одноповодковые, что концевых звеньев в нем вообще нет, а к любому звену примыкает два и только два соседних; по этому последнему признаку цепь должна быть названа простой; в силу же того, что в ней не имеется концевых звеньев, она будет замкнутой или закрытой. От каждого звена такой цепи к любому другому звену ведут два пути: первый из них тождествен с тем, который существовал в открытой цепи, из которой образовалась закрытая, второй ведет через звенья, бывшие концевыми в открытой цепи, и через вновь образованный между ними шарнир. Если поводки такой закрытой цепи пристегнуть к звеньям механизма, то получится новый механизм, так как положение концов поводков определяет, с теми же

оговорками, которые нами делались в начале работы относительно открытых цепей нормального типа, положение любой точки, принадлежащей поводку или звену закрытой цепи. Это очевидно из того, что в соединении с неизменяемой основой получается соединение не только жесткое, но и статически определимое *. Последнее обстоятельство показывает, что и эта цепь, как и все изученные нами раньше типы, пригодна для образования механизмов методом наслоения, и указанный здесь тип простой замкнутой цепи одноповодковых звеньев на этом основании будет называться нами нормальным.

Однако рассмотренный сейчас тип не будет единственным нормальным, так как в противоположность открытым цепям перенос поводка не вызывает распадения замкнутой цепи на простейшие, многократное же его повторение может дать начало новым формам, которые тоже приходится признать за типы нормальные. Только что рассмотренный тип замкнутой цепи мы будем называть простой замкнутой цепью нормального типа с однообразным распределением поводков.

Ввиду тех особенностей, которые представляет в замкнутой цепи вопрос о переносе поводка, обращаемся теперь к изучению его и к образованию цепей, отличающихся от только что указанного типа смешанным распределением поводков.

Так как чертеж замкнутой цепи и ее частей нам нередко придется повторять по нескольку раз, только с различным распределением поводков, то для упрощения удобно ввести некоторые условные обозначения, вроде примененных к сложной открытой цепи на схеме фиг. 26.

Цепь одноповодковых звеньев мы условимся так же, как и там, обозначать чертою, с указанием числа таких звеньев; последнее в рассуждениях общего характера, когда число звеньев несущественно для получения результата, может быть и опущено. Кроме того, придется ввести обозначения для бес-

* Более строгое доказательство последнего положения приводится ниже.

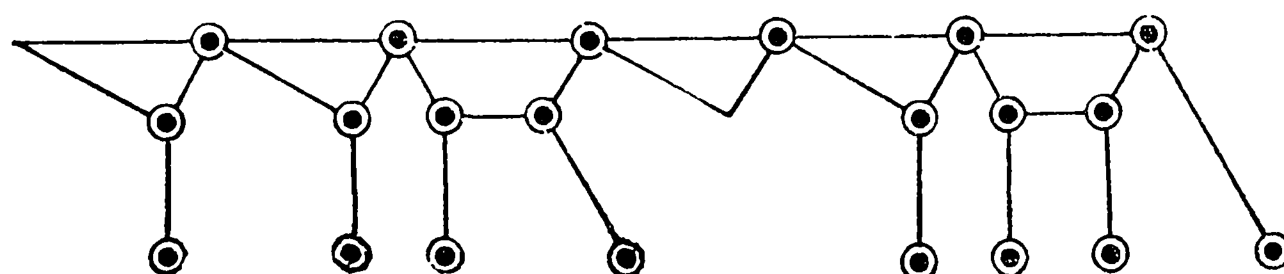
поводковых звеньев, которые будем обозначать кружком, как и на фиг. 26, и для двухповодковых звеньев, которые будут обозначаться двумя кружками; трехповодковые звенья условимся обозначать тремя кружками, а одноповодковые, только в некоторых случаях, где приходится остановить внимание на таком звене, — одним кружком, перечеркнутым по диаметру. В этих обозначениях замкнутая цепь с однообразным распределением поводков может быть представлена просто в виде замкнутой окружности, содержащей пометку о числе ее звеньев.

Говоря о распадении простой закрытой цепи на простейшие, легко заметить, что эти простейшие цепи могут быть только простые и притом открытые многоповодковые цепи. В самом деле, разъединение одного шарнира в простой замкнутой цепи уничтожает только один из путей, ведущих от одного звена цепи к другому, т. е. не разделяет цепи на две самостоятельные части, а лишь превращает ее в открытую цепь; последняя может быть только простой, потому что каждое из ее звеньев имеет не более двух соседних, как то имело место в замкнутой цепи.

Разъединение второго шарнира, необходимое, чтобы разбить цепь на две части, не может увеличить числа путей, ведущих от одного звена одной из двух частей, на которые распадается теперь полученная первоначально простая цепь, к другому звену той же части; поэтому открытая цепь может распадаться только на открытые же. В силу указанных соображений простая замкнутая цепь может распасться тоже только на ряд простых цепей. По соображениям, подробно изложенным при изучении того же вопроса в простых цепях (стр. 30—35), нас будет интересовать только распадение на простые цепи с нормальным числом поводков.

В нашем схематическом изображении открытая простая цепь одноповодковых звеньев изображается прямой. Отсюда легко перейти к такому изображению любых частей замкнутой цепи, которое не требует изготовления особых клише, а может быть выполнено средствами любой типографии; таким

изображением будем также пользоваться там, где этого достаточно. С этой целью условимся изображать цепь одноповодковых звеньев рядом черточек, число которых можно брать равным числу звеньев такой цепи. Если требуется особенно выделить одноповодковое звено, то будем обозначать его цифрой *I*, бесповодковое звено — буквой O, двухповодковое — буквой Θ, трехповодковое — буквой T; все изображение цепи будем заключать в прямые скобки. При этих условиях схема [- -ΘO - T] является изображением цепи фиг. 30.



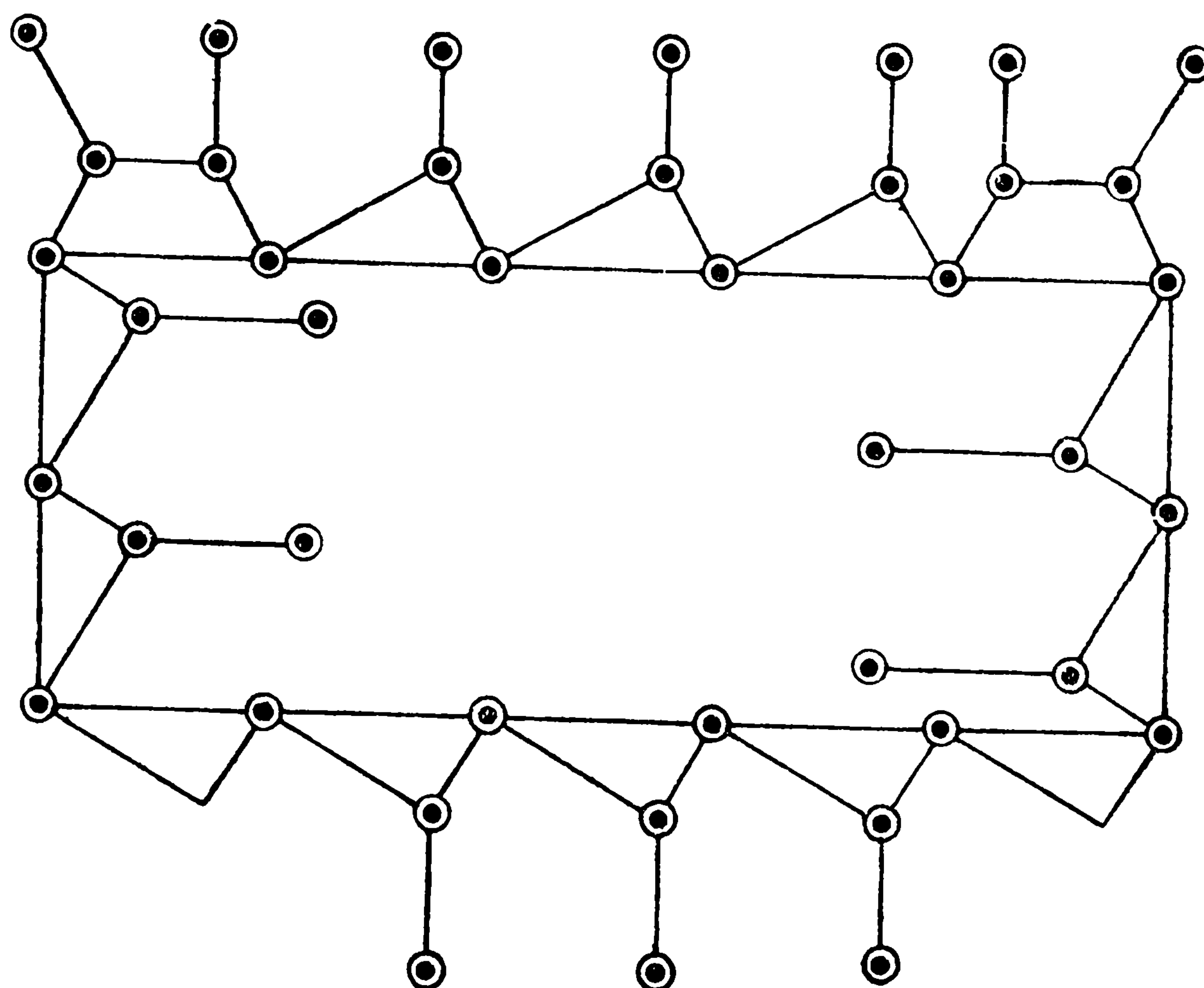
Фиг. 30.

Условимся причислять к цепям нормального типа всякую простую замкнутую цепь, которая не распадается на открытые цепи нормального типа, и притом, будучи пристегнута к неизменяемой основе концами поводков, дает начало жесткому, статически определимому соединению.

Докажем теперь, что замкнутая простая цепь с нормальным числом поводков и смешанным их распределением, образующая жесткое соединение с неизменяемой основой, всегда распадается на открытые цепи нормального типа, если в ней имеется два бесповодковых звена, связанных между собой цепью одних только одноповодковых звеньев, т. е. если в ней встречается группа звеньев вида [O - - - - - O].

Исследуя распадение замкнутой цепи, удобно представлять себе ее пристегнутой к неизменяемой основе. Будучи взята самостоятельно, цепь вида [O - - - - - O], содержащая

n одноповодковых звеньев, ничем не отличается от цепи нормального типа [Θ - - - Θ], содержащей *n* — 2 одноповодковых. Если простая открытая цепь оканчивается бесповодковым звеном, то последнее ничем не отличается от поводка и должно рассматриваться, как поводок предпоследнего звена. С этой точки зрения тождественны также цепи видов [O - - - - - O] и [Θ - - - - O]. Между тем, существенно различно, будет



Фиг. 31.

ли в изображении замкнутой цепи форма [O - - - - - O], или же две другие [Θ - - - - O], или [Θ - - - Θ].

Представляя себе эти формы в замкнутой цепи, пристегнутой к неизменяемой основе, скажем, что в форме [Θ - - - Θ] все поводки — *основные*,, в том смысле, как мы это слово употребляли на стр. 31, между тем как в форме [Θ - - - - O] поводок, которым служит бесповодковое звено, прикреплен не к основе, а к звену остальной части цепи и потому может быть назван *соединительным*. В цепи вида [O - - - - - O] имеется два соединительных поводка, полученных за счет бесповодковых звеньев.

Отделяя от жесткого соединения с основой замкнутой простой цепи (фиг. 31) со смешанным распределением поводков нижнюю цепь вида [О - - - - - О], замечаем, что в остатке должно получиться жесткое соединение. В самом деле, мы отделили простую цепь нормального типа, пристегнутую к соединению остальной части цепи с основой только концами поводков. Присоединение такой цепи к какой бы то ни было системе не изменяет числа степеней свободы последней, потому что концы поводков могут быть расположены, как угодно. Положения их устанавливают те независимые данные, которые определяют положения всех остальных точек цепи нормального типа; поэтому и отделение цепи нормального типа от любой системы, к которой она пристегнута только концами поводков, даст начало более простой системе с тем же числом степеней свобод. Отсюда следует, что если однообразное распределение поводков замкнутой цепи, содержащей по поводку на каждое звено, нарушено так, что соединение с основой осталось жестким, то, отделяя цепь вида [О - - - - - О], получим в остатке жесткое соединение остальной части цепи с основой. Оставшаяся в этом случае цепь будет либо нормального типа открытая простая цепь, либо распадется на ряд таких цепей. Распасться на цепи с избыточными и недостающими поводками она не может потому, что цепь, распадающаяся таким образом, не дает жесткого соединения с основой (стр. 30—33).

Наоборот: *если в простой замкнутой цепи с нормальным числом поводков, по отделении от нее простой цепи одноповодковых звеньев, замыкающейся двумя бесповодковыми, т. е. цепи вида [О - - - - - О], получится цепь, распадающаяся на простые цепи с ненормальным числом поводков, то первоначальная цепь в соединении с неизменяемой основою не дает жесткого соединения.*

Оставшаяся по отделении цепи вида [O - - - - - O] цепь непременно будет иметь нормальное число поводков, раз последнее условие соблюдалось в первоначальной цепи. Если в замкнутой цепи было m звеньев и m поводков, а в отделяемой n одноповодковых звеньев, то в остатке будет $(m - n)$ поводков и $[m - (n + 2)]$ звена, т. е. число поводков на два превышает число бесповодковых звеньев, что нормально для простой открытой цепи. Однако хотя общее число поводков всегда будет нормально, но распределение их может оказаться таким, что получится распадение остатка на цепи с избыточными и недостающими поводками; в таком случае как остаток, так и первоначальная цепь не дают с основой жесткого соединения.

Итак, с одной стороны, мы показали, что присутствие в простой замкнутой цепи с нормальным числом поводков и смешанным их распределением двух бесповодковых звеньев, отделенных только цепью звеньев одноповодковых, является признаком, достаточным для того, чтобы указанная цепь распалась на простейшие. С другой стороны, характер остатка дает нам признак, необходимый и достаточный для того, чтобы судить о том, образует ли первоначальная цепь, содержащая группу звеньев вида [O - - - - - O], в соединении с неизменяемой основой, жесткую систему или нет; если нет, то вопрос сводится опять к рассмотрению совокупности открытых цепей, среди которых имеются цепи с избыточными и недостающими числами поводков.

Примечание. Частным случаем цепи вида [O - - - - - O] является цепь [OO], которая представляет собой не что иное, как двухповодковую группу и цепь вида [O*I*O], т. е. трехповодковую группу.

Указанные в предыдущем положении цепи не могут быть непосредственно отнесены к цепям, где имеется ряд звеньев типа [Θ - - - - - Θ], потому что такая цепь не может быть устранена, если не изменить числа степеней свобод системы. Такая цепь связана с соединением остатка и неизменяемой основы не только концами поводков, а еще, кроме того, двумя

шарнирами, которыми крайние ее звенья присоединяются к двум звеньям остатка (см. фиг. 31).

Отметим теперь два необходимых признака распадения простой одноповодковой цепи с нормальным числом поводков на открытые цепи нормального типа. Они состоят в том, чтобы в первоначальной цепи одновременно существовали как два двухповодковых звена, отделенных цепью одноповодковых звеньев, так и два бесповодковых, отделенных такой же цепью.

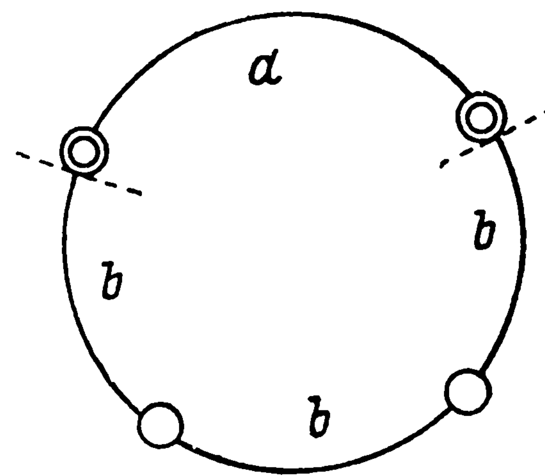
Существование группы [Θ - - - - - - Θ], очевидно, необходимо, если цепь распадается на открытые цепи нормального типа. Последнее обстоятельство показывает, что вместо того, чтобы присоединять в неподвижной основе замкнутую цепь нормального типа, можно присоединить к ней сначала одну простую открытую цепь, потом к совокупности ее с основой — вторую и т. д. Самая первая из этих цепей, будучи присоединена к основе всеми своими поводками, и дает непременно начало группе вида [Θ - - - - - - Θ], которая и сохранится при присоединении дальнейших цепей.

Покажем теперь, что существование в замкнутой простой цепи группы вида [Θ - - - - - - Θ], непременно влечет за собой существование другой группы вида [O - - - - - - O].

Обозначим всю группу звеньев [Θ - - - - - - Θ] через a, совокупность всех остальных звеньев замкнутой цепи — через b. Допустим, что часть a содержит q звеньев, причем число ее поводков должно быть $(q + 2)$; допустим, что число звеньев части b будет p; тогда число всех звеньев замкнутой простой цепи с нормальным числом поводков, равно как и число последних, будет $(p + q)$. Следовательно, в части b число поводков будет $(p — 2)$, т. е., по крайней мере, на два звена поводков не хватит; последнее предположение будет иметь место, если (фиг. 32), кроме двух бесповодковых звеньев, все остальные будут одноповодковые; тогда наше положение доказано. Однако возможно и другое распределение поводков, которое получится из указанного переносом поводков.

Очевидно, что перенос поводка с одноповодкового звена

на бесповодковое, по существу, ничего не меняет; поэтому будем переносить подряд несколько раз поводок с одноповодкового звена на одноповодковое же; при этом каждый раз образуется по одному бесповодковому звену и по одному двухповодковому. Так как вначале было два бесповодковых звена и за счет каждого двухповодкового образовалось по одному новому бесповодковому, то в результате число звеньев двухповодковых, в части b, на два меньше числа бесповодковых; между s бесповодковыми звеньями этой части имеется (s —1) промежуток. Если хотя бы в одном из этих промежутков нет двухповодкового звена, то доказано (см. примечание на стр. 101) существование группы вида [O - - - - - O]; такой промежуток непременно найдется, так как в части b мы имеем только (s — 2) двухповодковых звена.



Фиг. 32.

Возможно, конечно, образование, кроме двухповодковых звеньев, еще трехповодковых или даже многоповодковых; тогда, однако, соотношение получается еще менее выгодное, так как каждое такое звено получено за счет образования более чем одного бесповодкового.

Мы доказали, совершенно независимо от предположения, что цепь распадается на цепи нормального типа, а исходя только из допущения, что число поводков замкнутой простой цепи будет нормальное, что присутствие в ней группы [Θ - - - - - - Θ] влечет за собою присутствие в той же цепи группы [O - - - - - O]. Но присутствие второй группы является признаком достаточным, чтобы цепь либо распалась на цепи нормального типа, либо не могла быть отнесена к нормальному типу сама, как не дающая жесткого соединения с неизменяемой основою. Очевидно, что все сказанное здесь по поводу присутствия группы [O - - - - - - O] должно быть полностью отнесено и к присутствию в цепи группы [Θ - - - - - - Θ], которое тоже

достаточно для того, чтобы цепь распалась, но не предрешает характера этого распадения.

Нам не придется вовсе изучать замкнутые простые цепи с нормальным числом поводков, в которых встретятся звенья, содержащие более чем два поводка, ибо для распадения простой замкнутой цепи с нормальным числом поводков достаточно, чтобы в ней было хотя бы одно звено, снабженное более чем двумя поводками.

Допустим, что имеется n-поводковая замкнутая цепь, что в ней одно из звеньев содержит $(k+2)$ поводка, где $k>0$. На остальные $(n-1)$ звено придется, таким образом, $(n-k-2)$ поводка, т. е. число бесповодковых звеньев будет $(k+1)$, если предположить, что все остальные звенья — одноповодковые. Если бы k равнялось единице, то, выделив трехповодковое звено, получили бы в остатке цепь такую же, как часть b (см. фиг. 32). Мы видели уже, что никакой перестановкой поводков в этой части нельзя добиться того, чтобы не получилось группы вида [O - - - - O], присутствие которой является признаком того, что цепь распадается. Если бы k было больше единицы, то вместо части b получилась бы цепь, отличающаяся от нее бóльшим числом бесповодковых звеньев.

В результате после любой перестановки поводков число бесповодковых звеньев было бы бóльшим, чем до этой перестановки, когда их было только два; в таком случае избежать присутствия в цепи образования [O - - - - O] и подавно не придется — цепь непременно распадается.

Итак, мы пришли к выводу, что *к числу нормальных могут быть отнесены только те из простых замкнутых цепей с числом поводков, равным числу звеньев цепи, в которых на звено приходится не более двух поводков.*

Можно, однако, и этот вывод формулировать еще точнее, заметив, что каждое двухповодковое звено образуется за счет

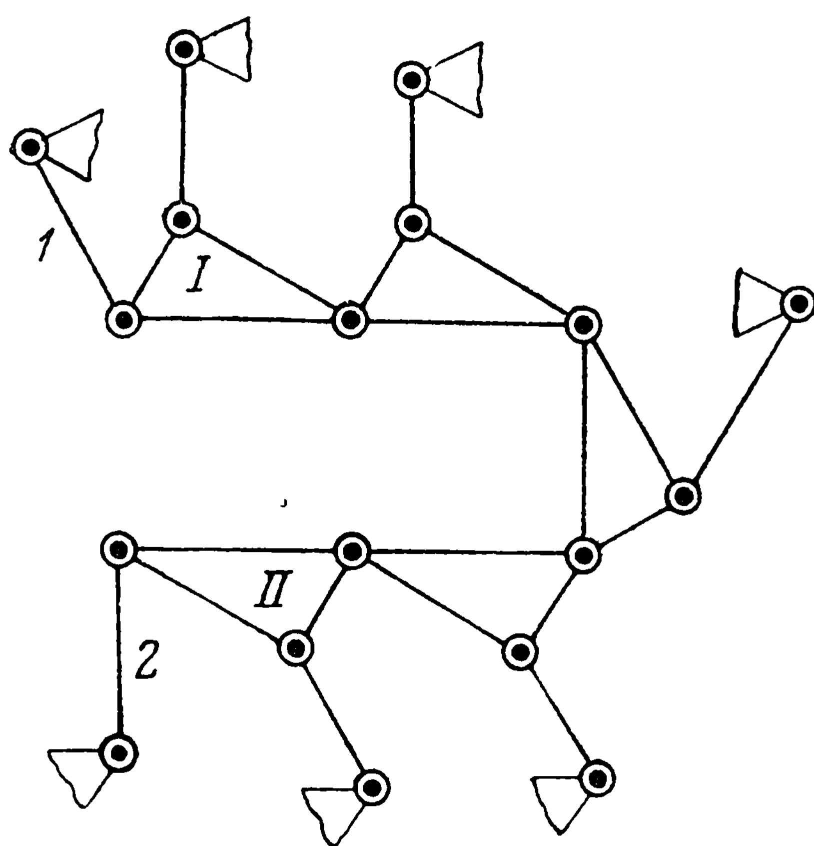
появления бесповодкового, и помня, что в цепи не должно быть двух смежных двухповодковых или бесповодковых звеньев, т. е. разделенных только цепью одноповодковых. В таком случае мы заключаем, что, кроме нормального типа с однообразным расположением поводков, возможен только один нормальный тип со смешанным их расположением. Тип этот отличается тем, что в нем число звеньев двухповодковых равно числу звеньев бесповодковых, причем те и другие чередуются между собой, будучи отделены (не обязательно) только цепью одноповодковых звеньев.

Нам остается, однако, еще доказать, что этот второй тип замкнутой цепи не только может быть, но и на самом деле будет типом нормальным. В самом деле, соединение цепи второго типа с неизменяемой основой получается из соединения с ней первого типа перестановкой поводков. Но уже в случае простой открытой цепи мы убедились, что такая перестановка может повести к образованию соединения нежесткого. Удаление в системе определенного числа независимых связей и введение такого же числа новых связей изменят число степеней свободы системы, если хотя бы одна из вновь вводимых связей окажется следствием совокупности некоторых из остальных. Чисто математическое значение такой связи сводится к нулю: ее можно просто отбросить, физическое же осуществление подобной связи дает начало системам, которые, по крайней мере в отдельных своих частях, статически неопределимы.

С этой точки зрения недостаточно строго доказана нами даже жесткость соединения с неизменяемой основой замкнутой простой цепи с однообразным распределением поводков. Ведь это соединение получилось из соединения с основой открытой цепи не методом развития поводка, о чем в своем месте было доказано, что применение его, в общем случае, не изменяет жесткости соединения, а устранением двух связей

(поводков крайних звеньев) и введением двух новых (образование шарнира, связывающего два крайних звена). Таким образом, необходимо сначала для замкнутой цепи с однообразным расположением поводков доказать строже, что ее соединение с основой будет жестким.

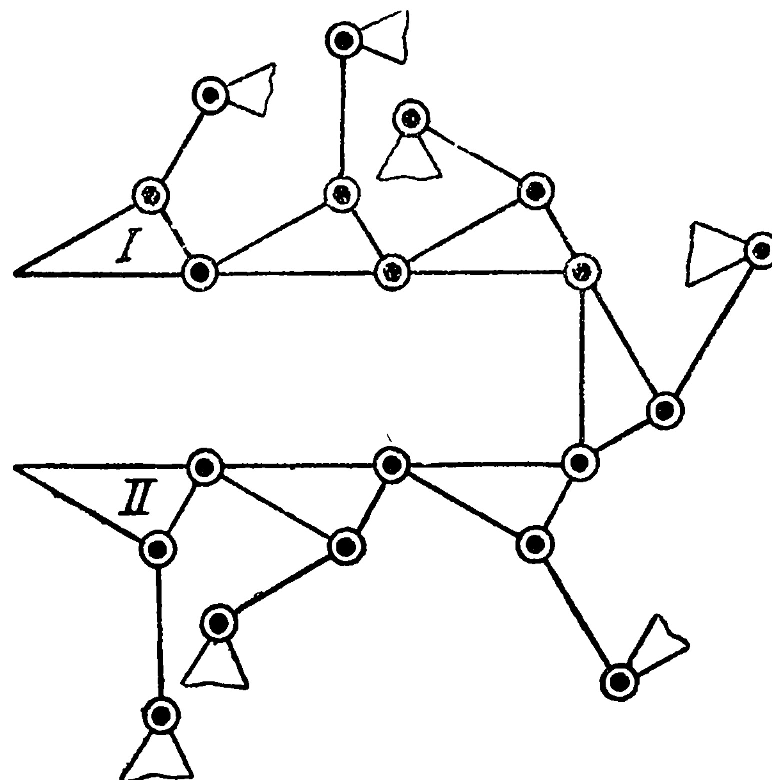
В последнем случае оно будет непременно и статически определимым, как полученное из жесткого статически определимого заменой двух условий двумя новыми.



Фиг. 33.

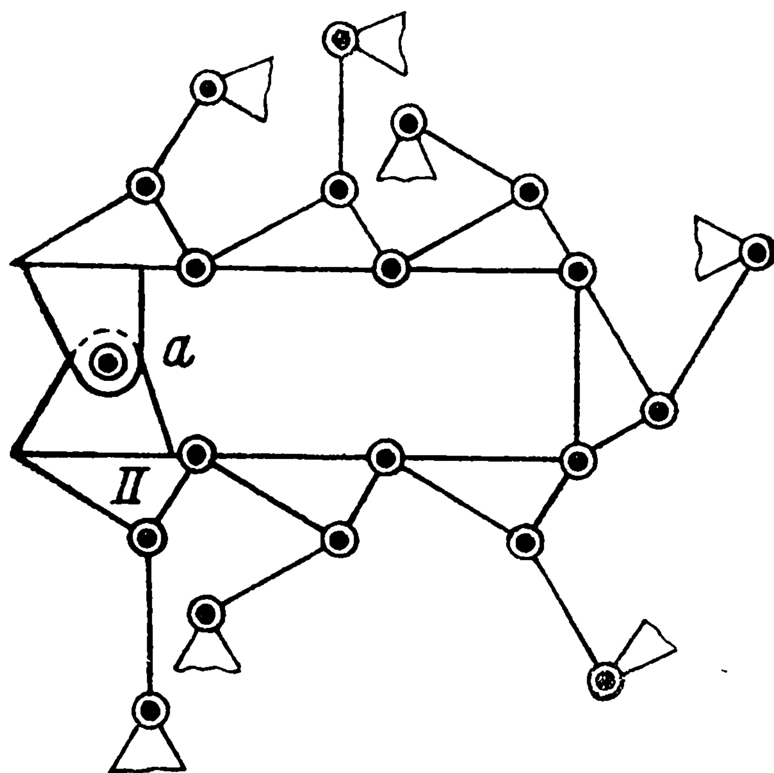
Допустим, что нам дана какая-нибудь простая открытая многоповодковая цепь нормального типа (фиг. 33). Связи, наложенные на систему, образованную присоединением этой цепи к неизменяемой основе, все могут быть написаны в виде равенств постоянной величине расстояний между шарнирными точками, соединенными стержнями неизменяемой длины, так как и трехшарнирные звенья можно себе представить образованными из трех двухшарнирных стержней; при этом координаты точек прикрепления поводков к основе будут считаться постоянными. Так как цепь (фиг. 33), будучи пристегнута к неизменяемой основе, дает, в общем случае, начало статически определимому жесткому соединению, то среди уравнений связей, содержащих в качестве переменных хотя бы декартовы координаты точек, нет таких, которые были бы следствиями остальных и которые могли бы быть отброшены без изменения числа степеней свободы системы. Не может быть и уравнений связей, не совместных с остальными, если предположим, что мы действительно пристегнули нашу цепь к неизменяемой основе, что сделать всегда возможно. Устраняем поводки *1* и

2 крайних звеньев *I* и *II*; в результате получится система с двумя степенями свободы (фиг. 34) *. Связывая после этого шарниром *a* две точки звеньев *I* и *II*, совмещающиеся при каком либо положении последней системы, мы получаем простую замкнутую цепь, пристегнутую к той же основе (фиг. 35). Устройство шарнира *a* соответствует наложению на систему двух связей, требующих, чтобы координаты двух определенных точек звеньев *I* и *II* оставались равными.



Фиг. 34.

Мы не будем, однако, заниматься исследованием аналитических выражений связей, а будем исходить из соображений другого характера. Шарнир *a* (фиг. 35) можно образовать, наложив на систему с двумя степенями свободы (фиг. 34) две связи, требующие, чтобы точка *a* звена *II* оставалась на постоянном расстоянии от двух точек *b* и *c* звена *I*, т. е. соединив звенья *I* и *II* стержнями *ba* и *ca* (см. фиг. 38).

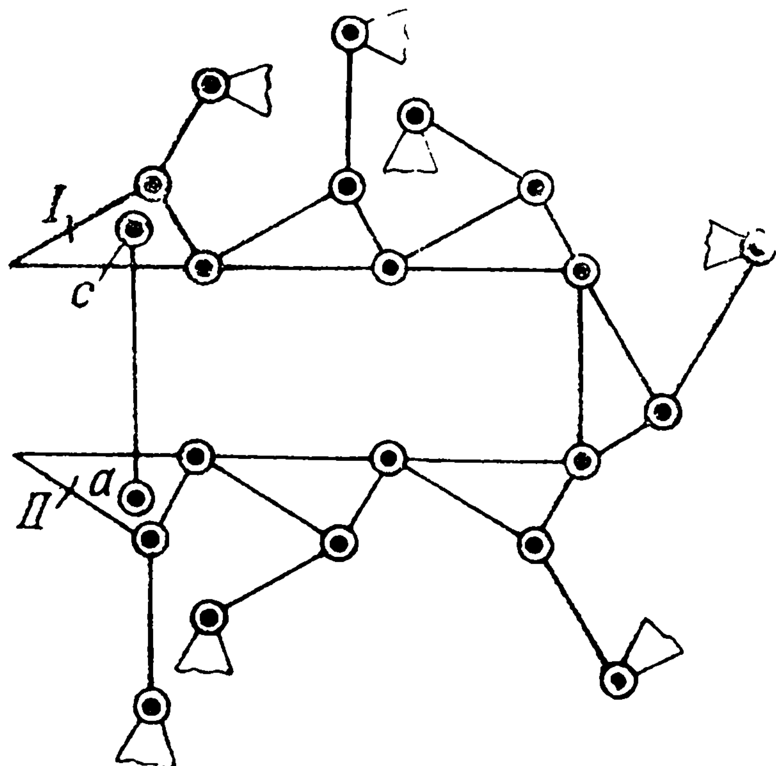


Фиг. 35.

Допустим, что стержень *ca* вводится первым. Возможно предположить, что он представляет собой осуществление связи, вытекающей из остальных, которым подчинена система с двумя степенями свободы фиг. 34. Это значило бы, что при

* Получена из цепи, содержащей на два звена больше, чем показано на фиг. 33.

всех возможных движениях этой системы точка a и без того описывает окружность радиуса ac около c; в таком случае или точки a и c какие-либо особые точки и можно найти вместо них две другие точки, для которых постоянство взаимного расстояния в системе (см. фиг. 34) не имеет места, или же любая точка звена II находится на постоянном расстоянии от любой точки звена I, т. е. совокупность звеньев I и II можно рассматривать как одно жесткое соединение, как одно звено.



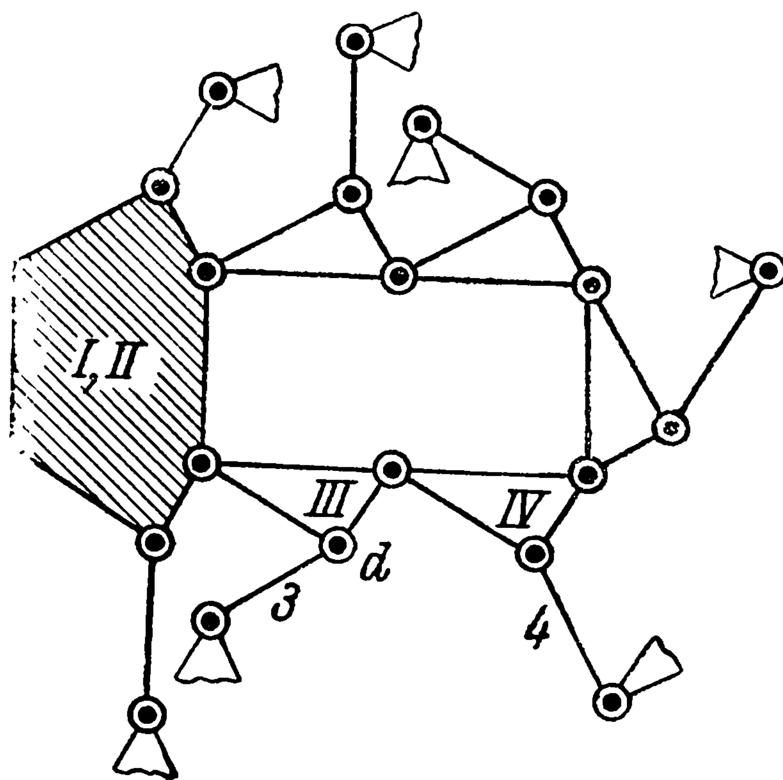
Фиг. 36.

Допустим сначала последнее; подвижность системы не изменится, если мы действительно соединим, независимо от остальных связей, звенья I и II в жесткое целое, образующее из них одно жесткое звено (фиг. 37). Все перемещения, возможные для системы (фиг. 36), возможны также для системы (фиг. 37). Следовательно, последняя есть тоже система с двумя степенями свободы.

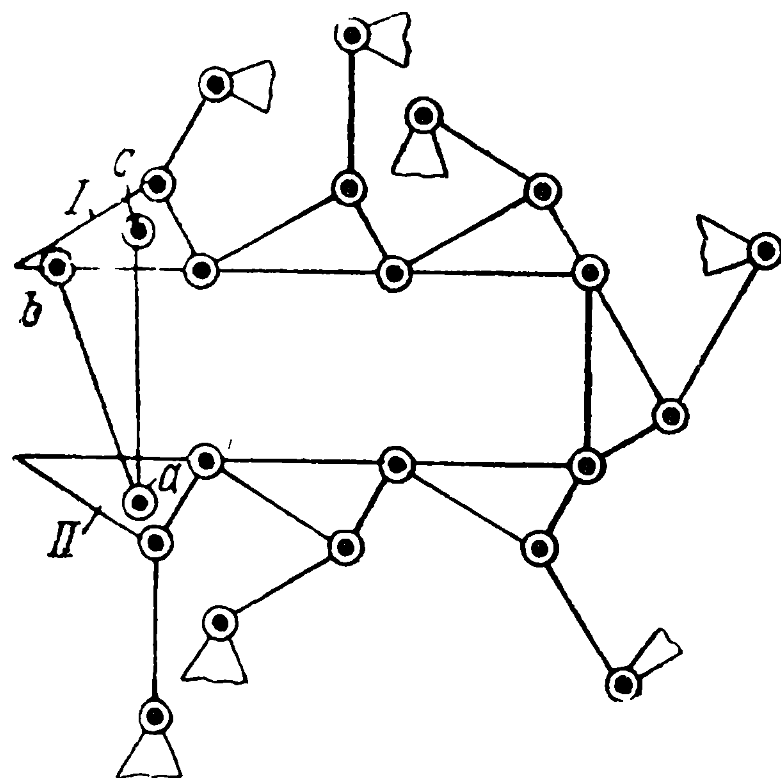
Устраняем две связи, которым эта система подчинена, удаляя сначала поводок 3, а затем звено III; останется знакомый нам механизм, который получается из простой открытой цепи нормального типа устранением поводка крайнего звена. Допуская, следовательно, что точки a и c находятся в системе (см. фиг. 34) на неизменном расстоянии и что это не какие-либо особые точки, мы пришли к выводу, очевидно, несостоятельному, что система с двумя степенями свободы устранением некоторых связей может быть обращена в систему с одной степенью свободы. От рассмотрения особых случаев, как мы указали в самом начале нашей статьи, будем уклоняться, разбираясь только в общих случаях. Поэтому, допуская, что точки a и c представляют особую пару точек, выберем другую пару, соединяя которые стержнем ca, мы не осуществляем связи

вытекающей из остальных; тогда введение стержня *ca* превращает нашу систему с двумя степенями свободы в механизм.

Теперь вводим (фиг. 38) стержень *ba*; возможно, что он представляет собой осуществление связи, вытекающей из остальных, которым подчинен механизм (см. фиг. 36). В таком случае либо точка *b* — особенная (мгновенный центр в относительном движении звеньев *I* и *II*), либо *a* такая точка, либо, наконец, все точки звеньев *I* и *II* остаются при движении механизма на постоянном расстоянии друг от друга, т. е. эти оба звена движутся, как одно жесткое целое. Если *b* — мгновенный центр в относительном движении звеньев *I* и *II*, то заменим эту точку другой точкой звена *I*; если то же относится к *a*, то *c* уже не будет мгновенным центром; меняем поэтому роли точек *a* и *c*, выбирая точку *b* в звене *II* (фиг. 39) и устраивая стержень *bc*, причем *b*, *c* и *a*, вообще говоря, произвольно избранные точки. Для нас существенно важно лишь то, что шарнирное соединение обоих звеньев дает начало жесткой системе, когда точка, в которой шарнир осуществляется (в нашем случае *a* или *c*), не является особой точкой.



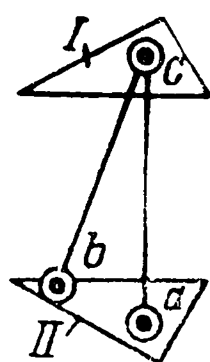
Фиг. 37.



Фиг. 38.

Доказательство, в последнем случае, можно было бы

формулировать еще иначе. Совершенно недопустимо предположение, что в механизме такой структуры, как на фиг. 36, мгновенный центр звеньев *I* и *II*, независимо от размеров и расположения частей, непременно должен находиться в *a*. Те же общие соображения, которые заставили бы думать, что он находится в конце *a* соединительного стержня *ca*, должны привести тогда к заключению, что он находится и в другом конце того же стержня, т. е. в точке *c*, так как не существует в структуре механизма признаков, отличающих один конец стержня от другого. Таким образом, если бы мгновенный центр действительно оказался в *a*, то это было бы случайностью, особым случаем, а не непременным следствием из структуры механизма. Вероятно, в таком случае достаточно изменить направление одного из поводков, чтобы перевести мгновенный центр в другую точку.



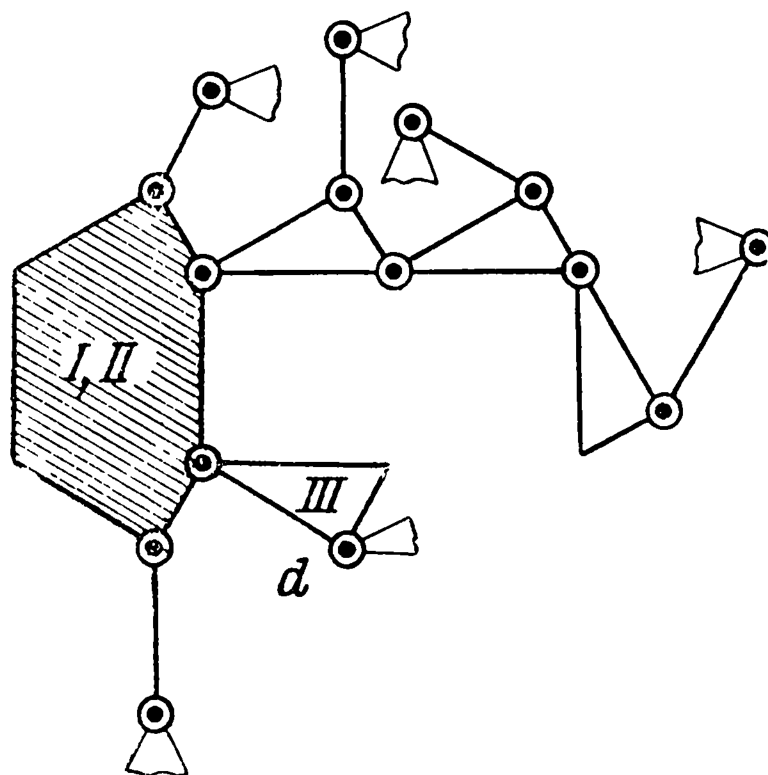
Фиг. 39.

Нам остается разобрать еще третье предположение, что в механизме (см. фиг. 36) звенья *I* и *II* движутся, как одно целое, и что это будет следствием структуры механизма, т. е. что это свойство будет сохраняться независимо от метрических соотношений в этом механизме.

Итак, допущено, что, видоизменяя фиг. 37, но сохраняя ее структуру, мы всегда будем иметь механизм. Отделим в этом механизме звено *III* и поводок *3*; в результате, как было указано раньше, получается система, известная нам как механизм. Введение в последний звена *III* и поводка *3* является, в таком случае, осуществлением двух связей, вытекающих из остальных, которым последний механизм подчинен. Если мы теперь вместо поводка *3* поставим другой поводок, прикрепленный в той же точке звена *III*, но имеющий другое направление, то получим систему, по структуре не отличающуюся от изображенной. По предположению, и она должна быть механизмом; но тогда образование обоих поводков, как прежнего *3*, так и нового, является осуществлением связи, вытекающей из тех связей, которым подчинен механизм, получаемый удалением

только поводка *3*. Если это так, то и прикрепление в точке *d* второго поводка не стеснит движения механизма; последняя, следовательно, неподвижна и, прикрепляя ее шарнирно к основе, мы, в общем случае, снова получим механизм. Удаляем в последнем последовательно поводок *4* и звено *IV*, т. е. освобождаем механизм от двух связей.

В результате получается знакомое нам жесткое соединение с основой (фиг. 40), отличающееся от такого же соединения с основою открытой простой цепи нормального типа тем, что поводок с одного крайнего звена перенесен на другое, на звено *I*,*II*. Итак, последнее наше предположение, состоящее в том, что в механизме, показанном на фиг. 36, звенья *I* и *II* движутся, как одно жесткое целое, привело к несостоятельному выводу, что, освобождая от связей некоторую систему с одной степенью свободы, можно в результате получить систему неподвижную.



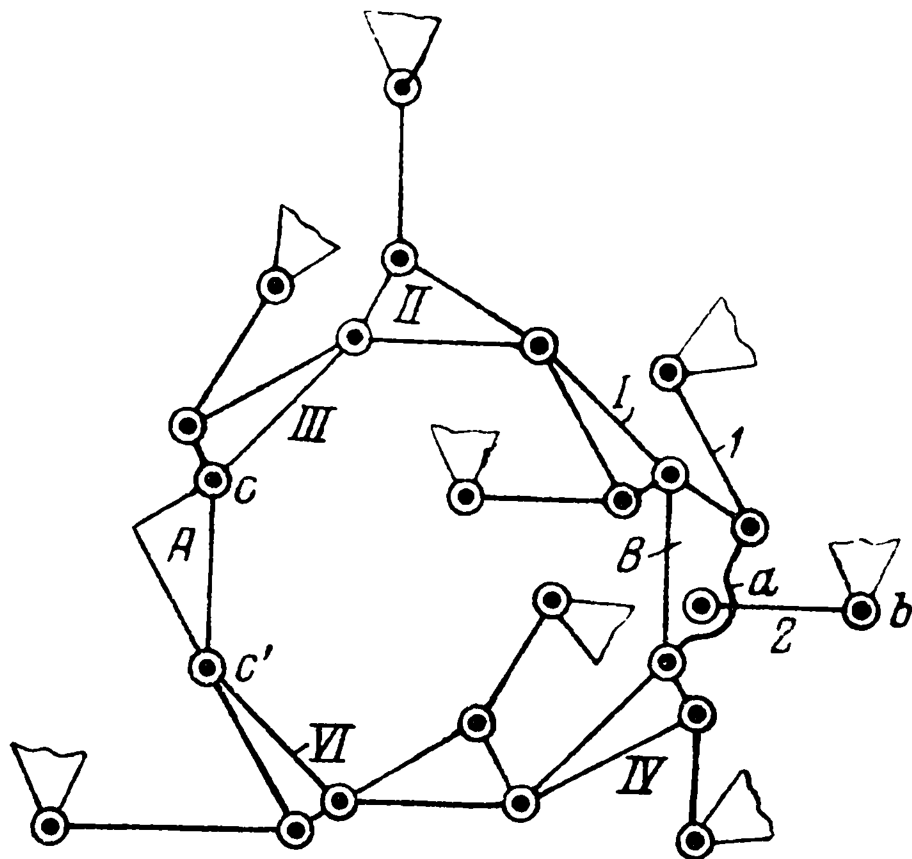
Фиг. 40.

Из приведенных соображений следует, что мы были правы, считая в общем случае соединение с основой замкнутой простой цепи с однообразным расположением поводков жестким.

Нам остается доказать, что второй тип простой замкнутой многоповодковой цепи, который мы пока еще предположительно считали за нормальный, будет таковым в действительности, т. е., что и он, будучи пристегнут к неизменяемой основе, дает начало жесткому соединению. С этой целью покажем сначала, что цепь, полученная из соединения с основой замкнутой цепи с однообразным расположением поводков переносом одного поводка, всегда дает с основой жесткое соединение.

Чтобы перенести поводок (фиг. 41) с некоторого звена *A* на звено *B*, можно лишить сначала первое из этих звеньев

его поводка, а затем соединить поводком две совершенно произвольно избранные точки, из которых одна принадлежит звену *B*, другая — основе. Так как в предыдущем мы доказали, что соединение первоначальной цепи с основой было жестким и статически определимым и число связей равно поэтому только необходимому для жесткости числу, то удалением поводка звена *A* образуется механизм.



Фиг. 41.

Если бы при движении этого механизма некоторая точка *a* звена *b* описывала окружность, центром которой служила бы точка *b*, то, соединив поводком *a* с *b*, получили бы тоже механизм; но для этого, как видим, необходимо особую точку звена *B* соединить с особой точкою основы. Если бы даже все точки звена *B* описывали окружности, то и тогда механизм был бы сохранен только, если каждую такую точку соединить поводком с определенной (особой) точкой основы. Какую бы кривую точка *a*, при отсутствии поводка *2*, ни описывала, если направление второго поводка звена *B* не совпадает с направлением нормали к траектории этой точки, присоединение его делает невозможным не только конечные, но и бесконечно малые движения этой точки, так как в присутствии поводка скорость этой точки должна быть нормальна к направлению поводка. Если только в механизме, образованном из соединения с основой простой цепи удалением поводка звена *A*, точка *a* двигалась, то устройство поводка *2* является, в общем случае, осуществлением связи, не вытекающей из остальных связей, которым подчинена система с одной степенью свободы, частным

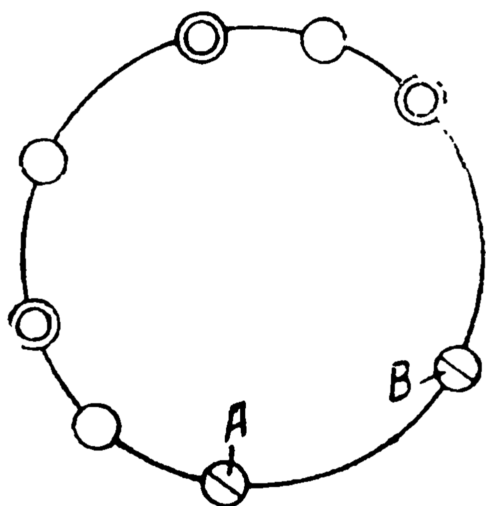
случаем которой является наш механизм; следовательно, полученная система (фиг. 41) будет жесткой.

Возможно, однако, что в механизме, полученном удалением поводка звена A, точка a была неподвижною; тогда не только присоединение поводка 2, но и еще второго, не показанного на чертеже, поводка, укрепленного в a, не стеснит движения последнего; но тогда звено B в механизме будет неподвижным, как прикрепленное к основе тремя поводками. Удаляем теперь в механизме звено A; в остатке остается соединение с основой открытой простой цепи, полученное из такой же цепи нормального типа переносом поводков по одному с каждого крайнего звена на среднее B. Такое соединение нам известно уже как жесткое в общем случае. Таким образом, мы опять пришли к несостоятельному выводу, что уничтожение одной из связей, которым подчинена система с одной степенью свободы, превращает ее в систему неизменяемую; остается поэтому только согласиться с тем, что за исключением случаев особых, из нашего рассмотрения исключенных, всегда простая замкнутая цепь с одним бесповодковым и одним двухповодковым звеном и с нормальным числом поводков дает жесткое соединение с основой, т. е. может быть причислена к цепям нормальных типов.

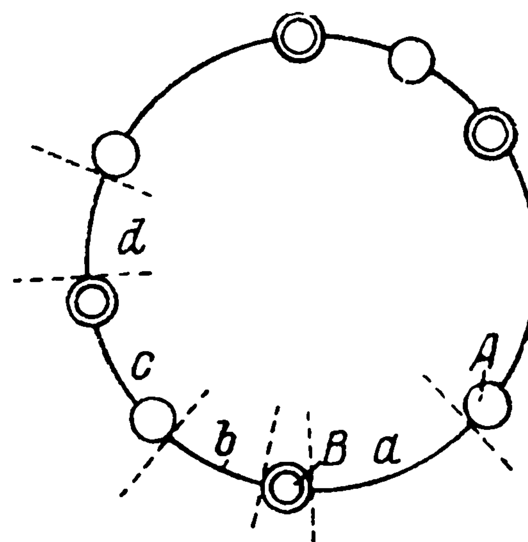
Переходим теперь к рассмотрению общего случая цепи, в которой двухповодковые и бесповодковые звенья чередуются, или непосредственно примыкая друг к другу, или будучи отделены цепью одноповодковых. Докажем, что если такая цепь (фиг. 42), содержащая n бесповодковых и столько же двухповодковых звеньев, образовала с основой жесткую систему, то то же самое будет иметь место и для цепи, полученной из нее перестановкой одного поводка (фиг. 43), содержащей $(n+1)$ пару таких звеньев. Для случая же одной пары положение это в предыдущем доказано.

Доказательство наше, по существу, будет такое же, как и в предыдущем случае. Желая образовать двухповодковое звено B (фиг. 43), мы лишаем предварительно поводка звено A

(фиг. 42) и тем превращаем жесткую систему в механизм. Если в этом механизме звено B не неподвижно, то оно может иметь не более одной неподвижной точки; в таком случае, можно любую другую точку этого звена соединить поводком с любою точкой основы и получить соединение жесткое, лишь бы соответствующая точка основы не лежала на нормали к траектории, описываемой той точкой звена B, к которой прикрепляется поводок.



Фиг. 42.



Фпг. 43.

Другое предположение, что звено B при движении механизма, образованного удалением поводка звена A, остается неподвижным, ведет к противоречиям. В самом деле, отождествляем тогда звено B с основой и удаляем звено A (фиг. 43). Удаление звена A по тем же причинам, как и раньше (фиг. 41), соответствует уничтожению одной из связей, которым была подчинена система, образовавшая механизм. Между тем при удалении звена A в предположении неподвижности звена B получается жесткая система: часть a, примыкающая к звену B справа, состоит из одноповодковых звеньев, образующих каждое со своим поводком по двухповодковой группе; одна из этих групп соединена с основой (звено B считается слившимся с основою) двумя поводками, следующая примыкает к этой соединительным поводком, а второй поводок прикреплен к основе и т. д., как и на фиг. 41 при удалении звена A.

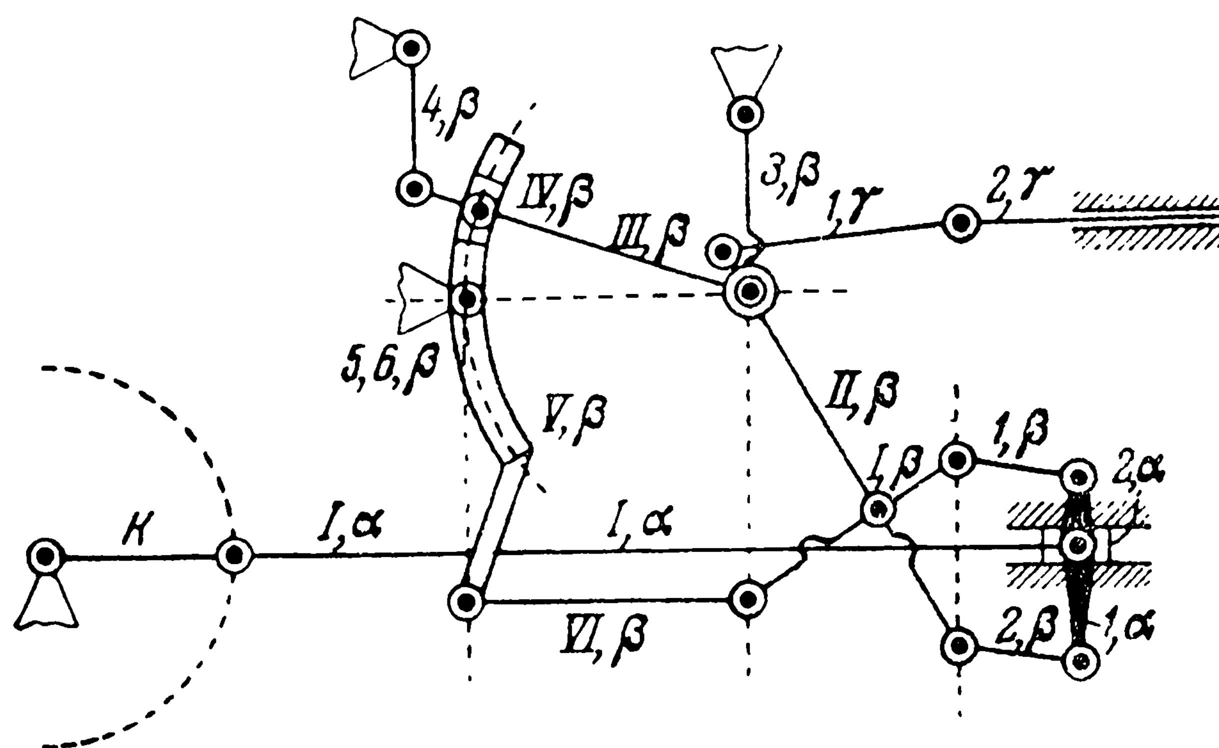
Таким образом, вся часть a прикреплена жестко к основе. То же скажем относительно группы b одноповодковых звень-

ев, примыкающих к звену B слева. Далее идет группа C вида [O - - - - - Θ], в которой звено соединяется с последним звеном группы b; но так как все звенья последней уже слились с основой в одно жесткое соединение, то группа C превращается в жесткое соединение с основой нормальной цепи вида [O - - - - - Θ]; далее пойдет повторение того же: сначала группа одноповодковых звеньев d, потом опять группа вида [O - - - - - Θ]. Это повторение будет продолжаться, пока не будут исчерпаны все пары бесповодковых и двухповодковых звеньев (число их будет парное, потому что начальное число было парным и мы исключили из рассмотрения пару звеньев A и B). Наконец, останется группа одноповодковых звеньев, примыкавшая раньше к звену A и отсоединенная теперь от части d; последовательно каждая из групп будет сливаться в одно жесткое соединение с основой. Если между парой звеньев Θ и O не окажется одноповодковых звеньев, то на место цепи вида [O - - - - - Θ] станет только трехповодковая группа, представляющая частный случай последней. Исключив, таким образом, возможность неподвижности звена B, мы приходим к убеждению, что соединение с основой простой многоповодковой замкнутой цепи с чередующимся расположением двухповодковых и бесповодковых звеньев в общем случае будет жестким.

Итак, можно сказать, что простая замкнутая многоповодковая цепь образует два нормальных типа, в которых число поводков равняется числу звеньев цепи и которые столь же характерны, как и ранее изученные нормальные типы; присутствие такой цепи, когда она образует последнее из наслоений в механизме, легко может быть усмотрено, а механизм отделением ее превращается в простейший.

Нормальный тип простой замкнутой цепи со смешанным распределением поводков может, однако, дать начало еще

одному видоизменению, которое получается через шарнирное прикрепление того же звена к основе или звеньям механизма. Таким путем, например, жесткое соединение с основой цепи (см. фиг. 41) переходит в другое жесткое соединение, если отбросить поводки звена B, а одну точку последнего соединить шарнирно с основой. Оправданием такой замене служит то же обстоятельство, которое позволило нам из открытой нормаль-



Фиг. D.

ной цепи получить замкнутую. Доказательство жесткости полученного соединения в общем случае может быть дано с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, которые будут основываться на том, что при удалении одного поводка звено B уже нельзя считать неподвижным; подробное развитие их не рассматриваем.

Легко усмотреть, что шарнирное прикрепление звена цепи к основе или к некоторому звену механизма представляет лишь частный случай прикрепления с помощью двух поводков. В общем случае можно прикрепить концы двух поводков присоединяемой к механизму многоповодковой цепи к двум различным звеньям механизма.

Рассмотрим частный случай прикрепления, когда концы обоих поводков пристегиваются к одному и тому же звену ме-

ханизма. Сблизим в этом случае точки прикрепления поводков в двухповодковом звене присоединяемой цепи до полного совпадения; тогда два поводка образуют двухповодковую группу, пристегнутую к упомянутому звену механизма, и сливаются с ним в одно жесткое соединение. Поэтому точка, в которой звено присоединяемой цепи прикрепляется шарнирно к обоим поводкам одновременно, может быть отождествлена с точкою

Фиг. Е.

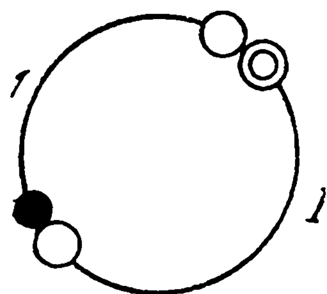
звена механизма, и мы приходим к шарнирному прикреплению звена присоединяемой цепи к одному из звеньев механизма. Тот же прием употреблялся нами применительно к фиг. 38.

Вследствие только что указанного соображения мы не будем замкнутую цепь, содержащую, вместо двухповодковых, звенья, шарнирно закрепляемые, выделять в особый тип. Такие звенья, в отличие от двухповодковых, будем условно на чертежах обозначать небольшим сплошным черным кружком.

В качестве примера механизма, в состав которого входит замкнутая простая цепь, приводим упомянутую выше кулису Савельева * (фиг. D). Мы замечаем в этом механизме

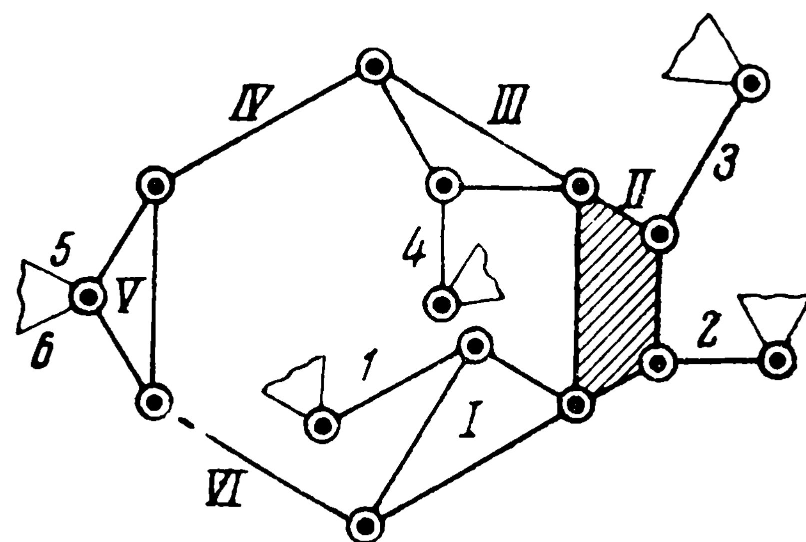
* «Железнодорожное дело», 1911 г., № 48. На фиг. Е указано видоизменение этого механизма, там же описанное, которое относится к первому классу.

наслоение трех групп, обозначенных буквами α, β и γ. Первая и последняя будут двухповодковые группы, группа же β представляет шестизвенную замкнутую простую цепь, в которой имеется два бесповодковых звена, именно камень кулисы *IV* и тяга *VI*; двухповодковыми являются сама кулиса *V* (шарнирно закреплена) и одно из звеньев—*II* или *III*, смотря по тому, к которому из них мы отнесем поводок *3*, прикрепленный к их общему шарниру; два остальных звена будут одноповодковыми. Схема этой цепи изображена на фиг. 44 и 45. Здесь двухповодковым звеном считается *II*, но цепь не распадается на простейшие и в том случае, если перенести с него поводок *3* на звено *III*; поводки *5* и *6* заменены шарнирным прикреплением звена *V*.



Фиг. 44.

Мы убедились в предыдущем, что замкнутые простые цепи обоих нормальных типов не распадаются на простые открытые цепи таких же типов. Однако это обстоятельство не мешает нормальной цепи со смешанным распределением поводков распасться на простые открытые цепи с недостающими и с избыточными числами поводков. Мы уже вначале указали на то, что образованием новых механизмов из существующих присоединением такого рода цепей, отличных от нормального типа, мы заниматься не будем по двум причинам: первая из них та, что любой механизм, из числа подлежащих нашему рассмотрению, может быть получен из простого кривошипа методом наслоения одних только цепей нормальных типов; вторая заключается в том, что введение таких цепей ведет к многозначности в классификации.



Фиг. 45.

В виде примера, иллюстрирующего эти положения, рассмотрим присоединение простой замкнутой цепи нормального типа со смешанным распределением поводков. Присоединяемая цепь, как мы теперь наверно уже знаем, не может быть заменена совокупностью последовательно присоединяемых других цепей нормальных типов. Поэтому, держась последовательного отделения от механизма групп типов нормальных, мы не можем отделить от механизма вместо этой группы какую-нибудь другую нормальную группу. Допустив же параллельно образование механизмов из цепей с избыточными и недостающими поводками, мы не только вводим двойственность в основу нашей классификации, но и полную многозначность.

В самом деле, если в нашей цепи было n бесповодковых звеньев и столько же двухповодковых, то мы можем вместо того, чтобы присоединить все образование целиком, сначала присоединить одну из групп вида [Θ - - - - - O - - - - - - - Θ], но таких групп можно выделить, очевидно, не одну, а n групп, начиная с любого двухповодкового звена. Здесь многозначность появляется уже при выборе первой группы, содержащей на один поводок меньше простой цепи нормального типа. В остатке получается цепь вида [- - - O - - - Θ - - - O - - - Θ - - - O - - - Θ - - - O]. Эту цепь нужно присоединить к предыдущей, соединенной с основой или механизмом; но и это дальнейшее присоединение можно сделать различным образом. Можно теперь дальше пытаться обойтись цепями нормального типа и тогда присоединить последовательно, идя слева направо, сначала три двухповодковые группы [- - -], потом нормальную цепь [O - - - Θ], в которой бесповодковое звено обращается в поводок следующего за ним одноповодкового, далее, опять группу [- - -], потом [O - - - Θ] и т. д., пока в остатке не получится группа вида [O - - -], которую можно рассматривать, как [Θ - -], т. е. как цепь, имеющую против нормальной одним поводком меньше.

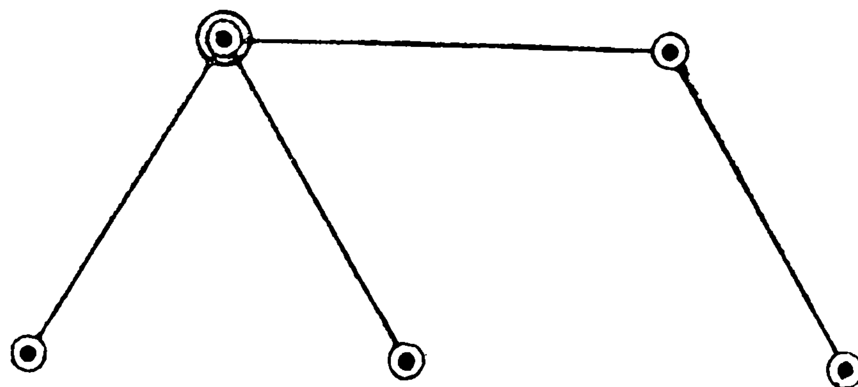
Но в таком случае почему бы не начать слева такой же группой, какой мы кончили справа, т. е. присоединять группы

последовательно таким образом: [- - - O], [- - -], [Θ - - - O], [- - -] и т. д. Наконец, можно поступать еще и так: сначала присоединить [- - -], потом лишенную трех поводков трехповодковую группу [O], далее [- - -], потом лишенную одного поводка трехповодковую группу [Θ]. Одним словом, построив механизм из цепей с ненормальным числом поводков, мы можем его представить построенным из подобного рода цепей весьма разнообразными способами и потому об единстве взгляда на структуру данного механизма говорить не придется.

Мы видим, таким образом, что об определенной структуре можно говорить только для тех механизмов, которые построены присоединением цепей нормальных типов, если условиться не основывать структуры их на комбинациях цепей типов ненормальных. В самом деле, если мы образовали механизм последовательным присоединением цепей нормальных типов, то отделить последовательно можно только эти цепи. Каждая из них на простейшие нормальных типов не разбивается, иначе мы бы ее не признали нормальной при образовании механизма; она бы отличалась от нормальной расположением поводков. Совокупность нескольких таких цепей тоже не могла бы считаться за нормальную по той же причине. Последовательное отделение можно было бы вести только однообразно, т. е. отделять только то и только в последовательности обратной, что было последовательно присоединено при образовании механизма; двух взглядов на структуру такого механизма при указанных условиях не могло бы быть *.

* Следует отметить, что можно присоединить к данному механизму совершенно независимо две или больше нормальных цепей параллельно; тогда, конечно, по существу, безразлично, какую отделить первой при анализе механизма. Кроме того, при слиянии шарниров возможно распадение цепи на простейшие, которое не указывается расположением поводков. Трехповодковая группа, в которой слилось два шарнира, распадается на совокупность двух двухповодковых групп (см. фиг. 46), но это не грозит внести двойственности во взгляд на структуру данного механизма; нужно лишь твердо держаться принципа: распадающуюся цепь заменять суммою ее частей.

Итак, если теория многоповодковых цепей и метод образования механизмов наслоением таких цепей могут привести к единству взгляда на структуру механизмов и к определенной, однозначной классификации, из этой структуры вытекающей, то мы только в том случае достигли бы этой цели для всех рассматриваемых нами механизмов, если бы оказалось возможным любой мыслимый механизм разбить на совокупность таких групп, и только в этом случае.



Фиг. 46.

Мы переходим к изучению тех механизмов, которые образуются вследствие удаления одного поводка в жестком соединении простой замкнутой цепи нормального типа с основой. Структура этих механизмов чрезвычайно проста: они состоят из кривошипа и простой замкнутой цепи нормального типа, содержащей столько же звеньев, сколько содержала первоначальная цепь, из которой механизм образовался.

Удаляя в жестком соединении с основой цепи поводок, мы образуем бесповодковое звено. Будем считать за кривошип один из оставшихся поводков одноповодкового звена; к нему присоединяется шарнирно звено той же замкнутой цепи; это присоединение эквивалентно двум поводкам, следовательно, к кривошипу присоединяется цепь, полученная из данной образованием двухповодкового (шарнирно закрепляемого) звена за счет появления бесповодкового. Если первоначальная цепь была с однообразным распределением поводков, то механизм не распадается на кривошип и простейшие цепи, потому что для распадения замкнутой простой цепи необходимо присутствие по крайней мере двух бесповодковых звеньев. Если же в цепи уже имелось бесповодковое звено, то возможно, что

присоединяемая к кривошипу цепь распадается на простейшие *.

Удаление поводка в цепи со смешанным распределением поводков, если за кривошип приходится считать поводок двухповодкового звена, дает всегда начало механизму, в котором присоединенная к кривошипу замкнутая цепь распадается на простейшие. В этом легко убедиться, заменяя шарнирное присоединение к кривошипу двумя поводками; тогда эта цепь будет содержать трехповодковое звено, а такая цепь, по доказанному, всегда распадается на открытые цепи. В результате такого распадения будет, однако, стоять на месте упомянутой трехповодковой группы двухповодковая, в которую первая переходит вследствие замены двух ее поводков шарниром (в простых открытых цепях нормального типа замена двух поводков крайнего звена шарниром, как мы убедились в свое время, только понижает порядок цепи).

К простой замкнутой цепи применим теперь метод развития поводков. Очевидно, поводок можно развить либо в простую концевую цепь (в предыдущей главе других концевых цепей мы не знали), если развивать последовательно поводок крайнего звена, либо в сложную концевую цепь, которая получится из простой развитием поводков ее средних одноповодковых звеньев. Сложная концевая цепь тождественна по своему строению с теми образованиями, которые получаются из сложной открытой цепи разъединением в ней шарнира. Убедиться в этом проще всего, образовав двумя способами простую замкнутую цепь с развитыми поводками. Первый из них уже указан,

* Очевидно, что результат анализа грозит быть многозначным в зависимости от того, какой из поводков считать за кривошип. К вопросу об устранении этой двойственности мы вернемся впоследствии, так как его решить нужно будет не только для этого частного случая. Здесь заметим только, что в практически применяемых механизмах имеется всегда звено, которое «вводит» движение (по Рело: «einführt»). В силу особенностей вращательного движения, таким звеном бывает обычно звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной точки; такое звено, собственно говоря, до сих пор и называлось кривошипом.

второй будет состоять в том, что, преднаметив к развитию определенные поводки, мы развиваем их в простой открытой цепи, из которой хотим получить замкнутую, и затем только смыкаем предназначенные к смыканию звенья простой цепи. Строение всех образований, полученных за счет поводков первоначальной открытой цепи вследствие смыкания, очевидно, не изменится, а то, что мы условились называть сложной концевой цепью, до смыкания могло быть отделено от сложной открытой цепи разъединением шарнира.

Отсюда следует, что от любого звена сложной концевой цепи можно притти непрерывным рядом звеньев к любому другому ее звену только одним способом. Последнее обстоятельство позволяет всегда отличить звенья первоначальной простой цепи, в которой поводки подверглись развитию, от звеньев концевых цепей. В самом деле, допустим, что некоторое звено A принадлежало замкнутой цепи до развития поводков; отметим некоторое конечное звено C одной из концевых цепей; эта цепь получена развитием поводка некоторого звена B первоначальной цепи и от звена B к звену C ведет лишь один путь через шарнир, в котором был укреплен поводок; но от звена A к звену B ведут два пути; поэтому от звена A к звену C можно тоже притти двумя путями. Наши рассуждения окажутся несостоятельными, если звено B окажется тождественным со звеном A, так как тогда от звена A к звену C будет иметься только один путь, но и тогда не трудно отличить звено A от звеньев концевой цепи. С этой целью оставим нетронутым весь ряд звеньев, ведущих от A к C; если среди них есть бесповодковые звенья, то разъединяем в них тот из шарниров, через который не лежит путь от звена A к звену C, а на место отделенной части ставим символический поводок. Когда все бесповодковые звенья на пути от A к C окажутся, таким образом, замененными одноповодковыми, то к звену A прилегает простая концевая цепь. Звено A отличается от звеньев этой цепи либо тем, что оно бесповодковое (если в первоначальной простой замкнутой цепи оно было одноповодковым),

либо тем, что оно четырехшарнирное (если оно было двухповодковым).

Итак, *применив к простой замкнутой цепи одного из нормальных типов прием развития поводков, мы в полученном образовании всегда можем отличить первоначальную цепь.*

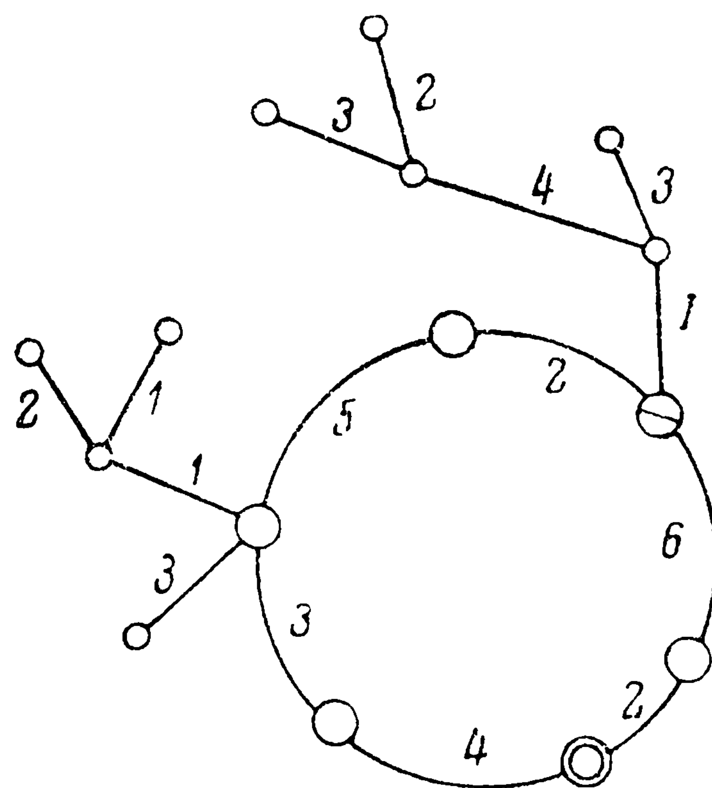
Последнее обстоятельство является существенным различием между отношением сложной открытой цепи к той простой, из которой она образовалась и которую нельзя отличить по виду сложной цепи, и отношением замкнутой цепи с развитыми поводками к такой же цепи с простыми поводками, давшей ей начало. Вот почему мы отнесли сложную открытую цепь к иному классу, нежели простую, и не склонны это сделать с рассматриваемым теперь новым образованием, которое все же является простой замкнутой цепью, только с развитыми поводками. Эти цепи, равно как и механизмы, содержащие в виде наслоений такие цепи и, кроме них, только цепи первых двух классов, мы будем относить к третьему классу.

Сложность строения простой замкнутой цепи с развитыми поводками не столько зависит, по нашему мнению, от того, сколько развито поводков, сколько от сложности развития этих поводков, поэтому мы предлагаем в основу классификации положить число концевых звеньев простой замкнутой цепи с развитыми поводками, так, чтобы им определялся разряд цепи. С этой точки зрения простая замкнутая цепь с простыми поводками будет цепью нулевого разряда третьего класса. Кроме разрядов, можно различать порядки, причем порядок определяется числом звеньев простой замкнутой цепи с простыми поводками, из которой образовалась цепь данного разряда развитием ее поводков.

Схема нормальной цепи третьего класса шестого разряда и 28-го порядка показана в условных обозначениях на фиг. 47; концевые звенья, всегда двухповодковые, обозначены простыми кружками, как и в случае открытой простой цепи.

Примечание. Следует отметить, что цепи третьего класса могут быть порядка не ниже третьего, так как замкнутая цепь из трех звеньев представляет жесткое соединение и должна рассматриваться, как одно жесткое звено. Так, например, цепь нулевого разряда и третьего порядка третьего класса представляет не что иное, как трехповодковую группу.

Нам нужно теперь приступить к исследованию, с одной стороны, того, какое влияние оказывает перенос поводков на структуру закрытых простых цепей разрядов выше нулевого, с другой стороны, того, что получается в результате удаления одного поводка.



Фиг. 47.

О переносе поводков в пределах замкнутой цепи нулевого разряда, давшей начало данной цепи высшего разряда, говорить почти не придется. В самом деле, вместо того, чтобы предварительно развивать несколько поводков, а затем перенести некоторые из оставшихся в пределах первоначальной цепи, можно получить то же образование, предварительно совершив перенос одних поводков и затем уже развитие других. Чтобы установить, не распадается ли цепь нулевого разряда, нужно было определить, чередуются ли в ней звенья бесповодковые и двухповодковые. Для цепи с развитыми поводками, образованной из нормальной цепи нулевого разряда со смешанным распределением поводков, этот признак придется формулировать иначе, помня, что метод развития поводка не изменяет числа шарниров звеньев. Признаком того, что цепь высшего разряда образовалась из нераспадающейся цепи нулевого разряда и потому не распадается сама на сложные открытые цепи,

служит то обстоятельство, что в замкнутом контуре, образованном звеньями первоначальной простой цепи, чередуются звенья четырехшарнирные с двухшарнирными.

Таким образом, решается вопрос о переносе поводков в пределах основного полигона, как мы условимся называть совокупность звеньев той цепи нулевого разряда, которая дала начало цепи с развитыми поводками. Нам остается перейти к вопросу о переносе поводка с некоторого звена C нормального типа простой замкнутой цепи с развитыми поводками на некоторое звено D той же цепи, причем по крайней мере одно из этих звеньев входит в состав концевой цепи. При этом придется отметить следующие случаи:

I. Перенос совершается в пределах одной и той же концевой цепи.

II. Перенос совершается со звена концевой цепи на звено основного полигона:

а) лишается поводка крайнее звено;

б) лишается поводка среднее звено.

III. Перенос совершается со звена основного полигона на звено концевой цепи.

IV. Перенос совершается со звена одной концевой цепи на звено другой.

Случай I. Обозначим через A звено основного полигона, к которому примыкает та концевая цепь, в пределах которой требуется произвести перенос поводка, через B — звено концевой цепи, которым последняя примыкает к звену A. Разъединим шарнир между звеньями A и B и присоединим поводок β к звену B. По доказанному в предыдущей главе, отделенная от основного полигона концевая цепь при этом перейдет в нормального типа открытую цепь, которая, после требуемого переноса поводка со звена C на звено D, распадается на ряд таких же цепей нормального типа. Одной из этих цепей должно принадлежать звено B, причем от этой последней цепи можно будет последовательно отделить все остальные, так как звено B, как крайнее, принадлежит одной из крайних це-

пей. Теперь, удаляя поводок β, превращаем эту последнюю, нормального типа открытую цепь в концевую и присоединяем обратно звено B шарниром к звену A. В результате получится нормального типа простая замкнутая цепь с развитыми поводками, которую назовем α и которая отличается от данной такой же цепи только тем, что одна из концевых цепей последней заменена концевой цепью с меньшим числом звеньев.

Присоединяя теперь (в порядке обратном, чем тот, в котором они отбрасывались, чтобы выделить нормального типа цепь со звеном B) остальные открытые цепи нормальных типов, снова восстановим первоначально данное нам образование, которое, очевидно, состоит, таким образом, из цепи α, к которой пристегнут ряд других открытых цепей нормального типа.

Случай II а. Допускаем, что звено C — одно из концевых звеньев; под звеньями A и B будем разуметь такие же звенья, как и в предыдущем случае. Кроме концевой цепи, содержащей звенья B и C, поставим на место остальных концевых цепей символические поводки; такая замена вполне законна, т. е. не изменит результата наших рассуждений, так как в любой момент можно себе представить символические поводки развитыми в концевые цепи первоначального вида. Отметим, далее, звенья, образующие путь от звена A к звену C; если среди них встречаются бесповодковые, то разъединяем тот из трех шарниров, который не лежит на пути от звена A к звену C; при этом отделяется всякий раз некоторая концевая цепь, на место которой тоже ставим символический поводок. После этого весь ряд звеньев между звеньями A и C окажется состоящим из одноповодковых звеньев, а после переноса поводка со звена C на звено D основного полигона и это крайнее звено превратится в одноповодковое. От полученного образования отделяем сначала двухповодковую группу, состоящую из звена C и его поводка, потом другую такую же группу, состоящую из следующего за ним на пути к звену A, и т. д., пока не дойдем до звена B с его поводком. Все отделенные части, по замене их символических поводков соответствующими

концевыми цепями, будут нормального типа открытые цепи. Нетрудно убедиться, что остаток либо распадается на совокупность таких же цепей, либо есть цепь третьего класса.

В самом деле, этот остаток может рассматриваться как результат отделения от первоначально данной цепи той концевой цепи, которая примыкает к звену A основного полигона, замены остальных концевых цепей символическими поводками и снабжения звена D поводком. Так как отделенная от звена A концевая цепь могла бы тоже быть заменена поводком, причем получилась бы из первоначально данной цепи цепь нулевого разряда третьего класса, то результат может рассматриваться, как полученный от перенесения в последней поводка со звена A на звено D. Если цепь нулевого разряда не была цепью с однообразным распределением поводков, то такой перенос поводка может ее разбить на простые открытые цепи нормальных типов, которые, по замене символических поводков концевыми цепями, перейдут отчасти или все в такие же сложные цепи. Если же такого распадения не произойдет, то по замене символических поводков концевыми цепями остаток представит собой цепь третьего класса.

Итак, в нашем случае перенос поводка всегда разбивает цепь на простейшие цепи нормальных типов, среди которых, однако, не всегда будет встречаться цепь третьего класса.

С л у ч а й IIб. Рассмотрение его аналогично предыдущему. Отмечаем опять звенья, ведущие от звена A к звену C; так как звено C не будет концевым звеном, то найдется в нем один шарнир, не лежащий на пути между звеньями C и A и не принадлежащий поводку. Больше одного такого шарнира в нем быть не может, потому что звено C не может быть бесповодковым. Разъединяя этот шарнир, отделяем от данного нам образования концевую цепь, на место которой ставим символический поводок. Так как раньше звено C было одноповодковым, то символический поводок превращает его в конечное двухповодковое звено. Другой поводок подлежит переносу на звено D, вследствие чего все сводится к предыдущему случаю.

Случай III. Звено C, с которого берется поводок, принадлежит основному полигону; звено D, на которое он переносится, — концевой цепи. До переноса поводка заменим символическими поводками концевые цепи как примыкающие к звеньям основного полигона, кроме содержащей звено D, так и примыкающие к бесповодковым звеньям (аналогично с предыдущими случаями), лежащим на пути от звена A к звену D. Если звено D — конечное двухповодковое звено, то этим и окончится введение символических поводков, если оно — среднее, то может оказаться в нем либо один, либо два шарнира, не лежащих на пути от звена D к звену A, при разъединении которых отделяется цепь концевого типа; заменяя и эти (обе или одну) цепи символическими поводками, превратим звено D в конечное двухповодковое. Между звеньями A и D имеется теперь только цепь одноповодковых звеньев. Переносим поводок со звена C на звено D и разъединяем шарнир между звеньями A и B; в качестве отделяемой части будем рассматривать ту, которая содержит основной полигон. Последний содержит на два поводка меньше нормы, так как один мы убрали со звена C, а отделенная концевая цепь, в свое время, развилась за счет поводка звена A. Но так как шарнирное прикрепление звена A к остатку равносильно закреплению двумя поводками, и с такими закреплениями в закрытых цепях приходится считаться, ставя мысленно на место такого шарнирного укрепления два поводка, то отделенная часть представляет собой нулевого разряда цепь третьего класса, которая, благодаря присутствию символических поводков, если не распадается на простейшие, то переходит в высший разряд.

Обращаясь теперь к остатку, по отделении основного полигона, отделяем от него род двухповодковых групп, состоящих из одноповодковых звеньев с их поводками, начиная со звена B.

Таким образом, дойдем до звена D, которое благодаря переносу поводка со звена C стало трехповодковым, а в присутствии символических поводков представляет более сложную открытую

цепь. Итак, и в этом случае, вследствие переноса поводка, цепь распалась на простейшие нормальных типов.

Случай IV. Звенья C и D принадлежат двум различным концевым цепям. Приемы доказательств заимствуем из двух предыдущих случаев, с каковой целью заменяем символическими поводками все концевые цепи, примыкающие к основному полигону, кроме обеих концевых цепей, содержащих звенья C и D, которые превращаем в простые, с конечными звеньями C и D, пользуясь опять-таки приемом символических поводков. После этого совершаем перенос поводка. Тогда, как в случае II, удастся отделить сначала всю концевую цепь, содержащую звено C, разбив ее на ряд двухповодковых групп; затем, считая за два поводка шарнир, соединяющий звено основного полигона с концевой цепью, содержащей звено D, отделяем нормального типа замкнутую простую цепь нулевого разряда и, наконец, как в случае III — ряд двухповодковых групп, пока не останется трехповодковое звено D.

Итак, перенос одного поводка всегда разбивает простую замкнутую цепь с развитыми поводками на простейшие, за исключением случая переноса поводка с одного звена основного полигона на другое его звено, где о результате переноса можно судить по признакам вполне аналогичным тем, которые указывались для цепей нулевого разряда.

Что касается переноса более, чем одного поводка, то о нем приходится сказать то же, что говорилось по этому поводу в остальных случаях, в частности, на стр. 30—33.

Цепь третьего класса с развитыми поводками является так же, как и все ранее рассмотренные типы цепей нормальных типов, вполне характерной формой; ее легко узнать, если она образует последнее из наслоений в механизме, который отделением ее превращается в простейший.

Переходим к рассмотрению механизмов, образуемых из простых замкнутых цепей с развитыми поводками удалением в жестком соединении такой цепи с основой одного поводка.

Начнем с удаления поводка одного из звеньев основного полигона. Предварительно заменим все концевые цепи символическими поводками и тем преобразуем нашу цепь в цепь нулевого разряда. Удалением одного поводка последняя распадается на механизм, составленный из кривошипа и простой замкнутой цепи с нормальным числом поводков, которая может либо быть нормального типа, либо распадается на открытые цепи нормальных типов.

Если в полученном механизме на место символических поводков поставить отброшенные концевые цепи, то каждая из нормальных цепей перейдет в нормального же типа цепь, только более сложную, а механизм останется механизмом, потому что образование, в которое он превратился вследствие учета символических поводков, все же составлено из кривошипа и наслоения цепей нормальных типов.

К тому же заключению можно притти и иным путем, заметив, что применением символических поводков вместо концевых цепей заменяется лишь многократное повторение приема развития поводка, а применение последнего не изменяет числа степеней свободы системы, в чем мы убедились на примере жесткого соединения с основой цепей нормальных типов.

Что касается удаления поводка со звена одной из концевых цепей, то эту манипуляцию можно заменить двумя другими уже известными нам: переносом поводка на звено основного полигона и удалением его отсюда. Мы видели, что после переноса поводка с концевой цепи последнюю можно удалить целиком, как составленную из ряда открытых цепей нормальных типов, которые последовательно отделяются; назовем совокупность этих цепей через α. В остатке получится либо третьего класса цепь, либо цепь, распадающаяся на открытые цепи нормальных типов. Как то, так и другое образование при удалении одного поводка, если они были пристегнуты к неизменяемой основе, превращается в механизм, состоящий из кривошипа и ряда нормальных цепей. Остается только пристегнуть к этому механизму удаленную группу α, чтобы получить тот более

сложный механизм, который образуется удалением поводка в концевом образовании данной замкнутой цепи с развитыми поводками.

Итак, удаление поводка в жестком соединении с основой замкнутой цепи как с простыми, так и с развитыми поводками, превращает последнее в механизм, состоящий из кривошипа и наслоения ряда цепей нормальных типов.

Глава четвертая

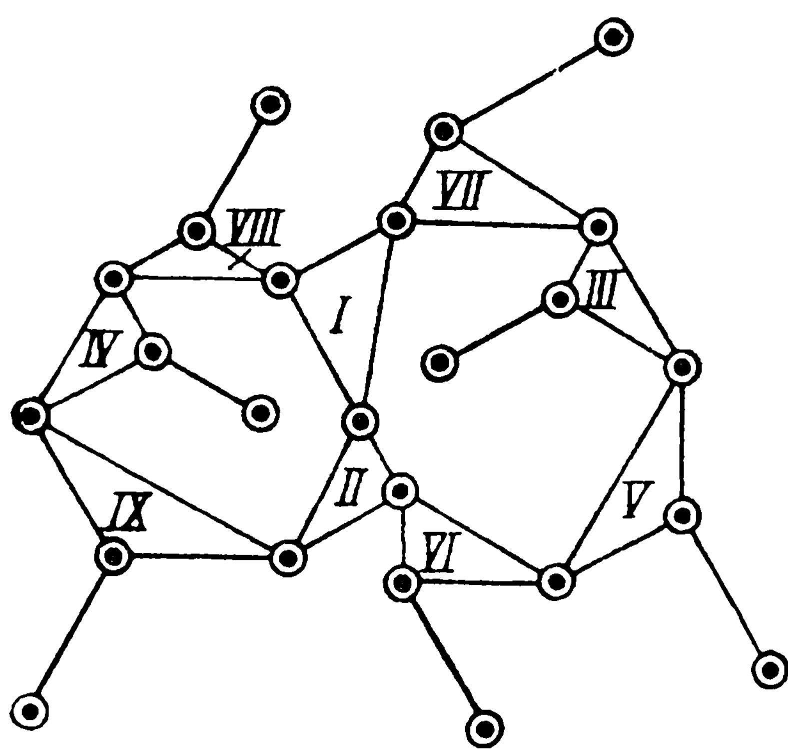
МНОГОПОВОДКОВЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ЦЕПИ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА. ЦЕПИ С ЗАМКОВЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ. ОСНОВНОЙ ТИП ЦЕПЕЙ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА. ОБХОДНОСТЬ. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНЫХ АНОМАЛИЙ. ТИП С МНОГОШАРНИРНЫМИ БЕСПОВОДКОВЫМИ. ПРОВЕРКА ЦЕПЕЙ, ПО ВИДУ ОТНОСЯЩИХСЯ К ЭТОМУ ТИПУ. ПЕРЕСТАНОВКА И РАЗВИТИЕ ПОВОДКОВ. ОБЩИЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОТНЕСТИ НЕИЗВЕСТНУЮ ЦЕПЬ К ЧЕТВЕРТОМУ КЛАССУ

Из жесткого соединения с основой любой нормальной цепи третьего класса, т. е. независимо от разряда, порядка или типа ее, можно получить жесткое соединение с основой, устранив два поводка в каких-либо двух несмежных звеньях основного полигона и соединив между собою эти звенья шарниром. Первая из этих манипуляций соответствует удалению двух связей, вторая — введению двух новых связей. Против жесткости вновь полученного соединения можно сделать такие же возражения, какие были нами сделаны по поводу образования замкнутой цепи из открытой в предыдущей главе, и аналогичными приемами (стр. 104—115) их опровергнуть *. Только что указанный процесс можно повторить над другими звеньями вновь полученного образования сколько угодно раз и, таким образом, получить весьма сложные образования.

Чтобы разобраться в многообразии этих новых образований, которые мы будем называть сложными замкнутыми цепями, предполагая их отделенными от основы, мы, однако, откажемся от образования их из иного рода цепей третьего

* Подробный разбор вопроса см. ниже.

класса, кроме цепей нулевого разряда, и с однообразным распределением поводков. Результаты же перераспределения поводков и развития их будет удобнее изучить, проделывая соответствующие манипуляции уже над готовыми сложными цепями, полученными по только что указанному более простому способу. Это позволит нам познакомиться со свойствами этих цепей в более систематическом изложении.

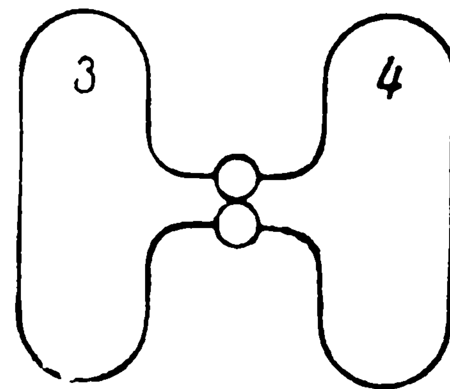


Фиг. 48.

Итак, в простой замкнутой цепи нулевого разряда с однообразным распределением поводков отбросим поводки двух несмежных звеньев (ибо соединение двумя шарнирами двух звеньев является статически неопределимым) и эти же звенья соединим между собою шарниром. Так как при этом соединении число шарниров каждого звена не изменилось, то мы получили цепь, в которой все звенья — трехшарнирные (фиг. 48). Эту же цепь в условных наших обозначениях видим на фиг. 49; кривыми обозначены цепи одноповодковых звеньев с указанием числа этих звеньев в каждой такой цепи. Совокупность лишившихся поводков и соединенных между собою шарнирно двух звеньев *I* и *II* (см. фиг. 48) будем называть замком, а каждое из этих звеньев в отдельности — замковым звеном.

Устраивая замок, мы, очевидно, из цепи, содержащей один замкнутый полигон, составили цепь, состоящую из двух замкнутых полигонов, в которых замковые звенья являются общими. В самом деле, раньше от звена *I* к звену *II* вело два пути; теперь же прибавился третий путь непосредственно через шарнир, образовавший замок. Если мы перейдем от одного

из звеньев замка к другому сначала ближайшим путем, т. е. через замковый шарнир, а затем вернемся обратно через один из путей, существовавших между этими звеньями до устройства замка, то мы обойдем все звенья одного из полигонов. Также и второй путь, существовавший между замковыми звеньями раньше, позволит нам определить звенья второго полигона.

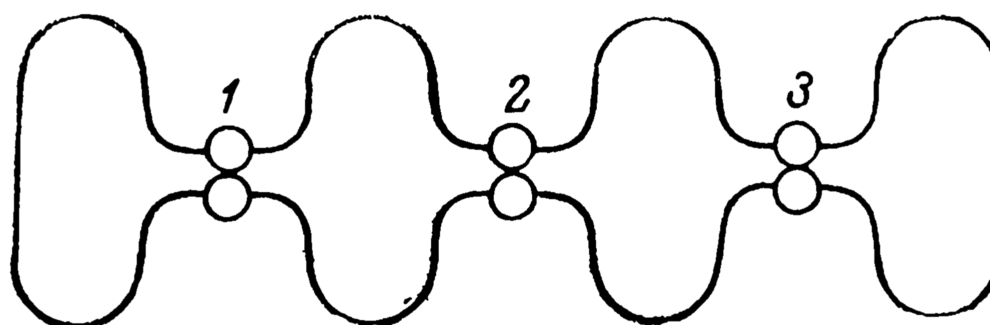


Фиг. 49.

Эти два полигона других общих звеньев, кроме замковых, не имеют, так как в простой замкнутой цепи оба пути не содержали общих звеньев, будучи разделены между собою обоими звеньями, которые ими соединялись; выбросив последние два звена, мы разбили бы простую замкнутую цепь на две простых открытых (ненормальных, конечно).

От звена каждого из полигонов к одному из замковых звеньев ведут, по общему свойству простой замкнутой цепи, два пути, не содержащих звеньев другого из полигона, не общих первому (т. е. незамковых). От замкового звена к звену второго полигона, не общему первому, тоже ведут два пути; поэтому между двумя звеньями двух разных полигонов, за исключением случая, когда одно или оба — замковые звенья, имеется всего четыре пути (см. звенья *III* и *IV* на фиг. 48). Между же замковым звеном и другим звеном будет три пути. Случай, когда это другое звено — замковое, нами уже рассмотрен, поэтому предполагаем, что второе звено принадлежит только одному из полигонов (см. звенья *I* и *III* на фиг. 48). До устройства замка между рассматриваемыми звеньями было два пути, из которых один не содержал вовсе теперешних замковых звеньев, а второй содержал второе из них; теперь первый путь остался без изменения, второй же распался на два: либо через замок от звена *I* к звену *II* и дальше, либо от звена *I* через звенья второго полигона к звену *II*, помимо замкового шарнира.

Итак, в сложной замкнутой цепи с одним замком число путей между двумя отдельными звеньями не одинаково для различных пар звеньев, а зависит от расположения этих звеньев. Еще сложнее будет вопрос о путях при многократном повторении приема образования замка (фиг. 50), где число их будет зависеть еще и от положения звеньев в том или другом из простых полигонов, которые можно выделить в сложной замкну-



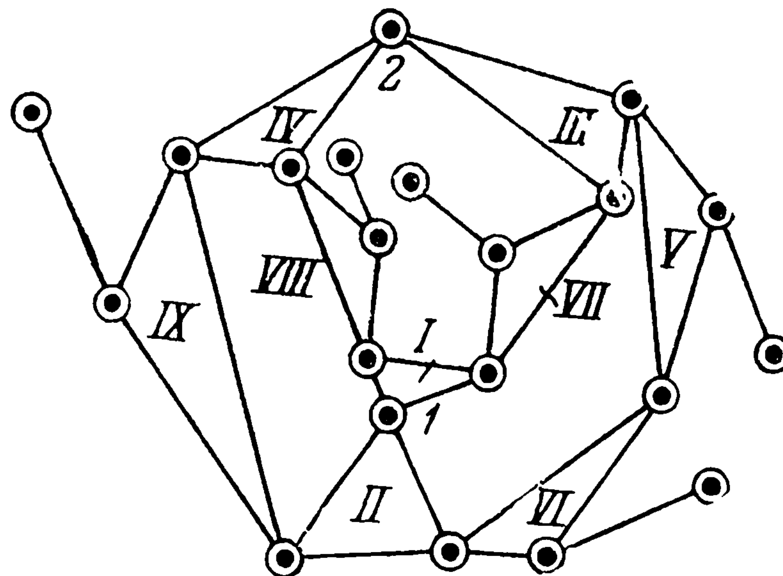
Фиг. 50.

той цепи. Поэтому мы будем вести наши рассуждения, не рассматривая вопроса о числе путей между двумя звеньями сложной замкнутой цепи, помня только, что между двумя звеньями простого полигона, входящего в состав сложной цепи, существует только два таких пути, которые не содержат звеньев, этому полигону не принадлежащих.

Цепь (см. фиг. 50) не будет единственным типом сложной цепи с несколькими замками; такую цепь можно назвать цепью с параллельным замыканием. Этот метод замыкания характеризуется тем, что можно указать такую очередь образования замков, при которой каждым следующим замком смыкаются звенья, не разделенные между собою одним или несколькими звеньями предыдущих замков; очевидно, так будет обстоять дело, если мы будем смыкать замки (фиг. 50) в том порядке, в каком они занумерованы на чертеже, или в обратном.

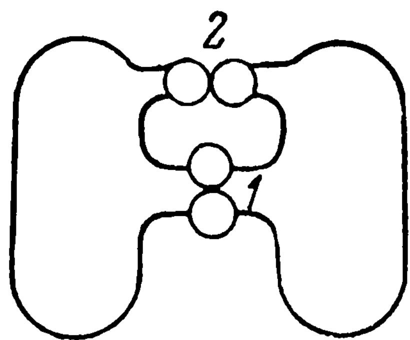
Можно, однако, уже второй замок устроить иначе. Мы уже убедились, что в присутствии одного замка звенья двух разных полигонов, в которых замочный шарнир является общим, разделены замковыми звеньями; можно замкнуть во второй замок такие разъединенные первым замком звенья (например, звенья *III* и *IV* на фиг. 48) и, таким образом, устроить перекре-

стное замыкание. На фиг. 51а и 51б показаны результаты и схема такого замыкания для цепи с двумя замками. Очевидно, что оба замка являются взаимно перекрестными, потому что, разъединив замок *1*, мы замечаем, что звенья его так же отделены друг от друга звеньями замка *2*, как до замыкания последнего его звенья были разделены звеньями замка *1*.



Фиг. 51а.

Вот почему, если в цепи с параллельным замыканием мы устроим ряд перекрестных замков, то не существует такого объективного критерия, который позволил бы отличить первоначальные замки с параллельным замыканием от после добавленных перекрестных. Чтобы все же иметь возможность разобраться в строении сложных замкнутых цепей, докажем следующее положение.

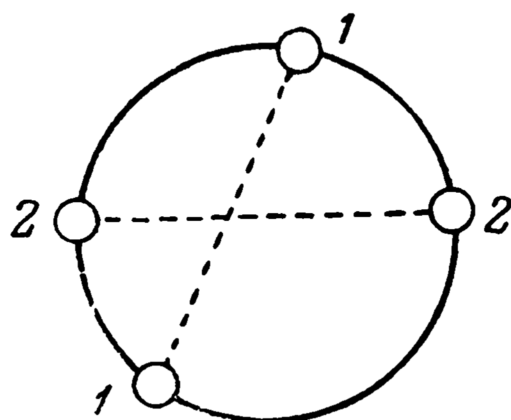


Фиг. 51б.

Какова бы ни была сложность замкнутой цепи, всегда можно, начиная от любого ее звена, обойти последовательно и без повторений все ее звенья и, таким образом, вернуться к исходному звену.

Указанное положение почти очевидно, потому что сложная цепь образовалась из простой замкнутой, этим свойством обладающей; ни один из шарниров последней не подвергся уничтожению, равно как остались и все ее звенья; прибавились лишь замковые шарниры. Можно было бы легко восстановить эту первоначальную простую цепь, разъединив все замковые шарниры и расправив цепь в простой замкнутый выпуклый полигон. Но важно только установить порядок, в котором эти звенья друг за другом следовали, а это можно сделать проще: вместо того, чтобы разъединить замковые шарниры, можно не пользоваться ими при обходе; замковые звенья в цепи с

трехшарнирными звеньями легко узнать, как бесповодковые, замковые шарниры — тоже, как соединяющие два бесповодковых звена. Придя к данному замковому звену через один шарнир, можно продолжать путь только через определенный другой, потому что третий будет замковым шарниром; в остальных же звеньях третий шарнир прикрепляет поводок. Начиная, например, обход (см. фиг. 51а) со звена *I*, можно, пользуясь указанным правилом, получить лишь обратный или следующий порядок звеньев: *I—VII—III—V—VI—II—IX—IV—VIII—I*. Заномеруем замковые шарниры, как это сделано на фиг. 51а; номера этих шарниров поставим под номерами звеньев полученного ряда; получится схема:

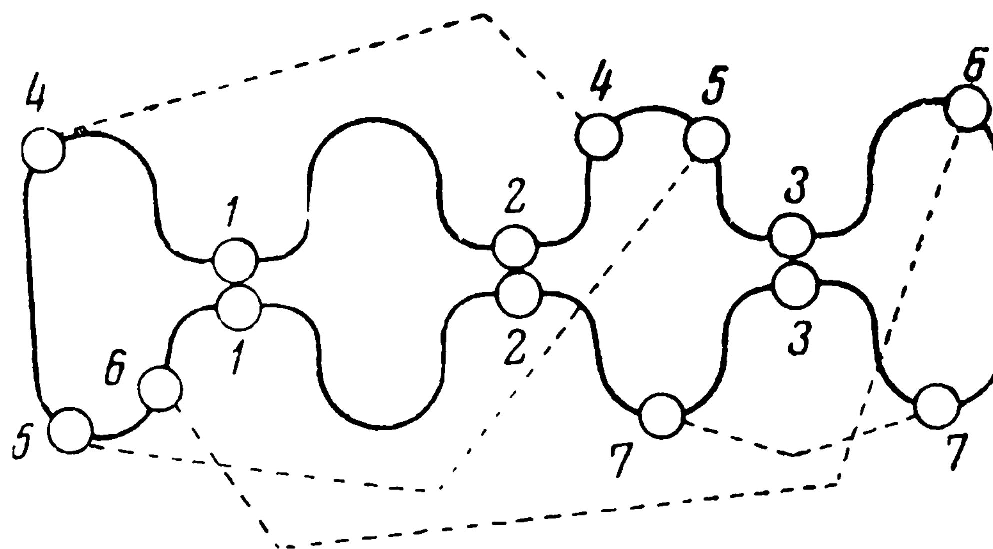


Фиг. 52.

$$\frac{I}{1} - VII - \frac{III}{2} - V - VI - \frac{II}{1} - IX - \frac{IV}{2} - VIII - I$$

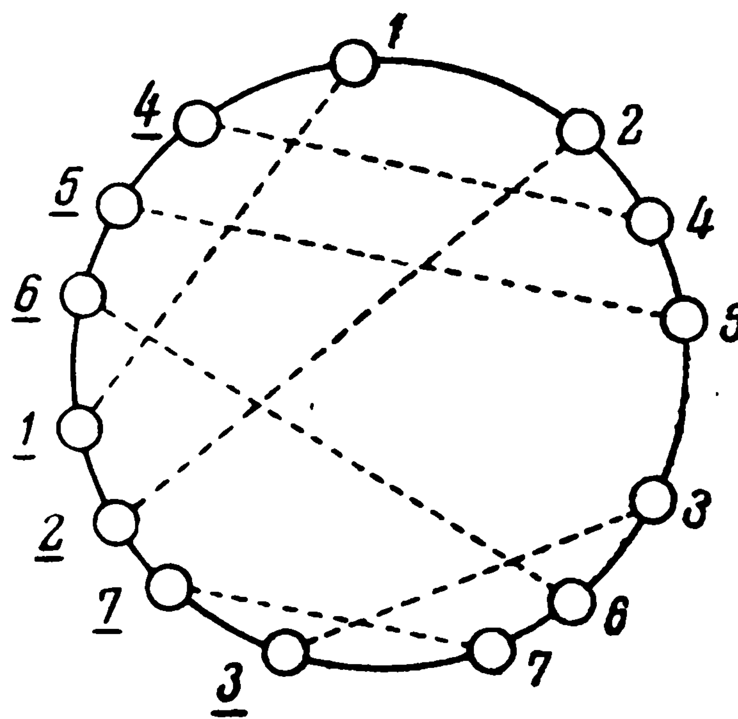
Более наглядно будет, если вместо такой схемы, расправленную по разъединении замковых шарниров цепь изобразим на чертеже в виде окружности, на которой кружками отмечены замковые звенья и поставлены номера их замковых шарниров; кружки с одинаковыми номерами соединяем теперь хордами, которые чертим пунктиром, так как сплошная линия, по условию, изображает цепь одноповодковых звеньев. Теперь два кружка и соединяющая их хорда олицетворяют замковое соединение. Совершенно очевидно по самому определению перекрестного замыкания, что два перекрестных замка изобразятся при этом пересекающимися хордами; точно так же два параллельных замка изобразятся хордами непересекающимися. Схему замковых соединений цепи фиг. 51а и 51б дает фиг. 52. Для полноты схемы следовало бы еще указать число одноповодковых звеньев, заполняющих промежутки между каждыми двумя замковыми.

Рассмотрим в предложенной схеме более сложный случай (фиг. 53), получаемый из прежнего с параллельным замыканием (фиг. 50), — устройством четырех новых замков; соединяемые в замок звенья показаны (фиг. 53) кружками, обозна-



Фиг. 53.

ченными одними и теми же цифрами и соединенными пунктирными ломаными. Чтобы получить схему первоначальной простой цепи, нужно разъединить как новые, так и старые замки и выправить криволинейный контур в окружность; в результате, по введении замковых соединений, получится схема, показанная на фиг. 54. Эта схема, однако, не дает возможности узнать, что цепь с перекрестным замыканием получена именно из цепи с параллельным замыканием, изображенной на фиг. 50. Это и следовало ожидать на основании фиг. 52, и действительно из фиг. 54 схема цепи с параллельным замыканием может быть получена не только удалением замков *4*, *5*, *6*, *7*, но и прежних замков *1*, *2*, *3*, или же замков *3*, *4*, *5*, *6*. Хотя цепь (фиг. 54) будет цепью с перекрестным замыканием, но в ней можно



Фиг. 54.

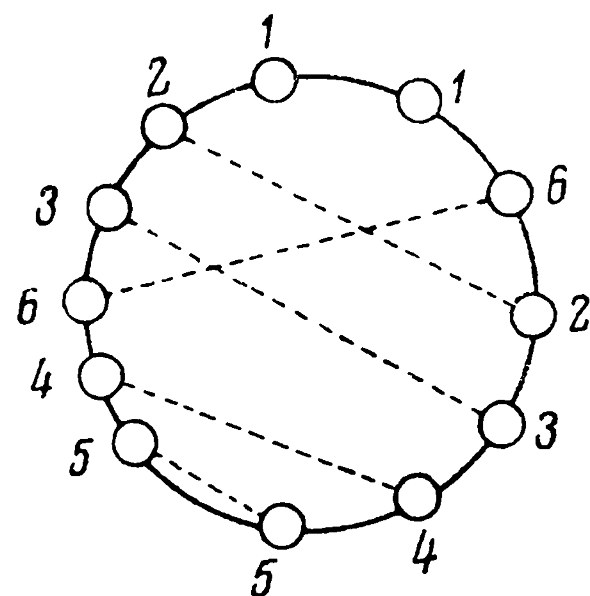
отметить параллельные между собою замки. Это, на основании фиг. 53, совершенно очевидно для замков *1* и *2*, так как между ними не вставлено никаких звеньев, принадлежащих другим замкам.

Вообще же нужно условиться относительно того, что считать нарушением параллельности, т. е. считать ли два замка параллельными всегда, если в круговой схеме хорды, изображающие их, не пересекаются (например, *2* и *3*), или же ввести другой критерий параллельности, что означало бы ввести еще третий род замков, кроме взаимно параллельных и перекрестных. Мы склоняемся к последнему и будем называть в цепи с перекрестным замыканием два замка параллельными, если все замки, перекрестные относительно одного из них, будут перекрестными и относительно другого. На схеме это скажется тем, что все хорды, пересекающие хорды, изображающие один из параллельных замков, должны пересекать и изображающие другой. Отсюда следует, что если третий замок параллелен одному из двух параллельных замков, то он параллелен и другому, так как хорда, пересекающая две из хорд, изображающих эти замки, непременно пересечет и третью. Таким образом, возможно представить себе группу из сколько угодно взаимно параллельных замков.

Представим себе теперь, что устраивается замок, являющийся перекрестным относительно только некоторых из параллельных замков. Очевидно, что тогда условие параллельности между этими последними и остальными замками нарушено и группа параллельных замков распалась на две группы таких же замков, потому что для каждой из них условие параллельности соблюдено. Так, на фиг. 55 устройство замка *6* расстраивает параллельность остальных пяти замков, но параллельными между собою остаются замки *2* и *3*, с одной стороны, замки *1*, *4*, *5* — с другой.

Если из двух между собою не перекрещивающихся замков только один окажется перекрестным относительно какого-нибудь третьего, то такие замки условимся называть нейтраль-

ными. Очевидно, что удаляя все замки, перекрестные только относительно одного из пары нейтральных замков, мы превращаем нейтральные замки в параллельные; так, например, замки *5* и *3* (фиг. 55) превратятся в параллельные, если удалить замок 6.



Фиг. 55.

Определить все замки, параллельные данному и нейтральные относительно его, можно легко с помощью следующего рода таблицы.

Выписываем в первый вертикальный столбец номера замков; для

Номер замка	Перекрестные замки	Параллельные замки	Нейтральные замки
1	4, 5, 6	2	3, 7
2	4, 5, 6	1	3, 7
3	6, 7		1, 2, 4, 5
4	1, 2	5	3, 6, 7
5	1, 2	4	3, 6, 7
6	1, 2, 3		4, 5, 7
7	3		1, 2, 4, 5, 6

каждого замка выписываем номера замков, перекрестных с ним, что легко сделать, пользуясь чертежом (см. фиг. 54). Пишем номера замков, начиная с самого малого номера по порядку величины номеров, чтобы легче обозреть полученный результат; таким образом образован второй столбец. Если в последнем получится ряд тождественных рядов цифр, то замки, против номеров которых они стоят, параллельны, потому что хорды, соответствующие последним, все пересекаются тождественной группой хорд.

Таким образом, составляется третий столбец, содержащий замки, параллельные каждому из данных. Замки непараллельные и неперекрестные с данным могут быть только

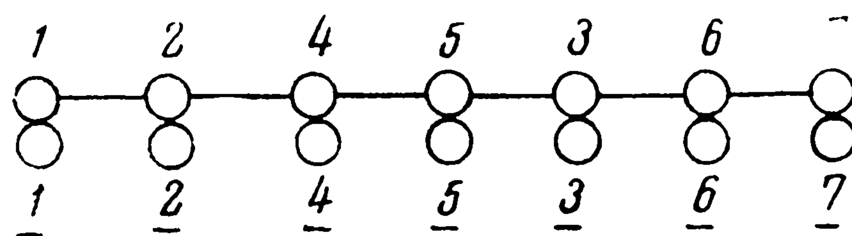
нейтральными и потому в четвертый столбец остается против номера каждого замка поставить только номера, не имеющиеся в двух предыдущих. Очевидно, из приведенной выше таблицы следует, что для группы замков параллельных совокупность всех цифр, не стоящих в первых трех столбцах, должна быть одна и та же; поэтому замок нейтральный относительно одного из замков параллельного ряда окажется нейтральным относительно всех замков этого ряда. В схеме (см. фиг. 54) оказывается, таким образом, две группы параллельных замков, содержащих каждая по два замка: группа 1—2 и группа 4—5.

Можно поставить вопрос о том, куда отнести нейтральные замки, если не выделять их в отдельную группу: к замкам ли параллельным или перекрестным с данным. В качестве критерия можно поставить требование, чтобы не нарушался принцип параллельности, требующий, чтобы все замки, параллельные одному из группы параллельных замков, считались параллельными каждому из замков этой группы, а замки, перекрестные одному из замков такой группы, считались бы перекрестными всем замкам этой группы. Таблица с наглядностью показывает, что, применяя этот критерий, мы можем нейтральные замки причислить либо к группе перекрестных замков (перенос чисел четвертого столбца во второй), либо к группе параллельных данному (перенос чисел четвертого столбца в третий). Ввиду спорности вопроса о том, к какой из этих групп отнести замки, названные нами нейтральными, мы предпочли выделить их в отдельную группу.

Этим мы заканчиваем указания относительно структуры сложных замкнутых цепей с одними замковыми соединениями и трехшарнирными звеньями и переходим к изучению типа цепей, отличающихся от предыдущих только тем, что в них могут быть трехшарнирные бесповодковые звенья, не соединенные попарно в замки.

Чтобы перейти к этому новому типу, покажем, что предыдущий может образоваться из сложных открытых цепей определенного типа. Привести цепь типа (см. фиг. 54) к сложной открытой

цепи можно, очевидно, только разъединяя некоторые звенья, так как в открытой цепи между каждыми двумя звеньями существует только один путь, а в сложной — несколько. Но разъединяя два шарнира, мы тем самым превращаем звенья раздела в двухшарнирные, между тем как в нормальной открытой цепи все звенья — трехшарнирные. Таким образом, необходимо после разъединения прикрепить к каждому из звеньев раздела по



Фиг. 56.

поводку. Так мы и будем поступать, выработав, однако, планомерный порядок в разъединении двух звеньев, чтобы получить желаемый результат; при этом замковых соединений не будем разъединять вовсе.

Необходимо будет различать замковые звенья одного и того же замка, с каковой целью на фиг. 54 номера замков, стоящие по одну сторону хорд, подчеркнуты.

Начнем обход по круговому контуру, переходя от одного замкового звена к другому, начиная, например, со звена *1*; при этом будем чертить в один столбец (фиг. 56) оба звена каждого замка в порядке полученной очереди. На схеме (фиг. 54) мы, таким образом, дойдем, не встречая уже нанесенных замков, до замка *7* (фиг. 56), причем прямыми намечаем цепи бесповодковых зеньев, ведущих в пройденном нами пути от одного замкового звена к другому; число звеньев такой цепи может, в частном случае, равняться и нулю. Замковые звенья с неподчеркнутыми номерами оказываются (фиг. 56) соединенными в простую цепь, отмеченные же подчеркнутыми цифрами являются как бы ответвлениями этой цепи. Это соединение легко превратить в сложную открытую цепь, присоединив к звеньям *1* и *7* по одному поводку, ко всем звеньям, обозначенным подчеркнутыми цифрами,— по два. Отсюда следует, что

от каждого из звеньев (фиг. 56) можно притти к другому только одним путем.

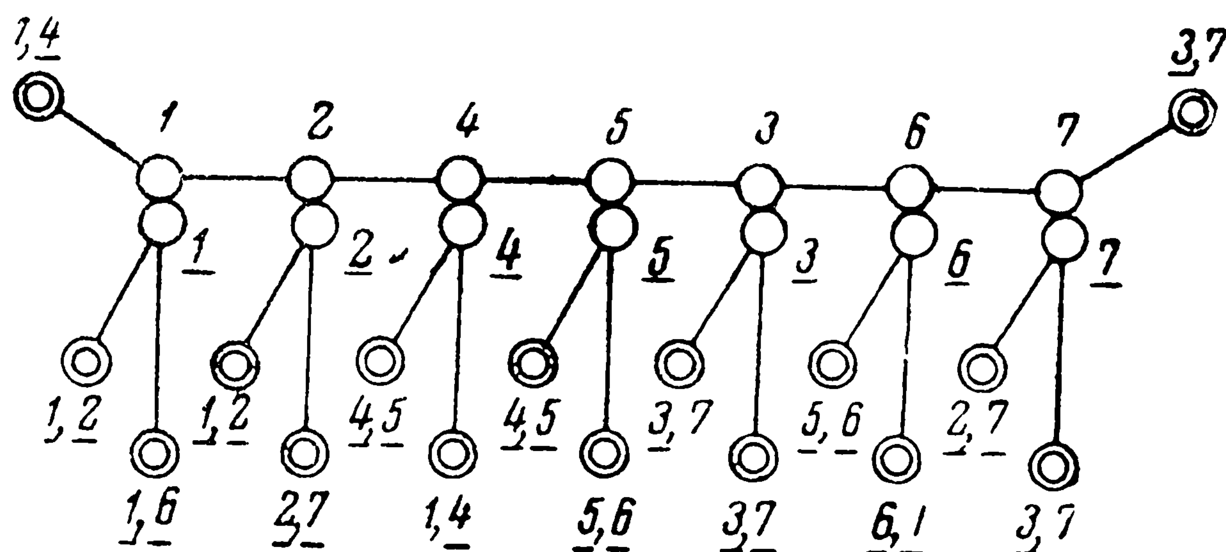
Здесь учтены уже все замковые соединения (см. фиг. 54), но не нанесены еще все соединения бесповодковых звеньев между собою одноповодковыми цепями, изображенными на фиг. 54 отрезками дуг окружности. Если мы такую цепь, например, *14*, нанесем теперь на фиг. 56, то она составит второй путь между двумя бесповодковыми звеньями, и условия, дающие открытую цепь, не будут выполнены. Отсюда видно, что разъединению подлежат именно одноповодковые цепи фиг. 54, не нанесенные на фиг. 56.

Предположим сначала для простоты, что каждая такая цепь содержит не менее двух одноповодковых звеньев; разъединим тогда в каждой из них шарнир между двумя одноповодковыми; но, чтобы не превращать звенья раздела в двухшарнирные, присоединим к ним по поводку.

Таким образом, не соединяем (см. фиг. 56) звенья *7* и *3* (см. фиг. 54) цепью, а разбиваем эту цепь на две концевых. Для ясности оба концевых звена последних обозначены одними и теми же цифрами (см. фиг. 57) *37*; так образовались концевые цепи *3*—*37* и *7*—*37*. Так как речь идет только о соединениях по окружности (см. фиг. 54),— все соединения по хордам уже приняты во внимание на фиг. 56, то легко отыскать все цепи, которые подлежат разъединению. С этой целью, оставив звенья *2, 4, 5, 3, 6,* которые уже оказываются на фиг. 56 трехшарнирными, без рассмотрения, так как к ним больше, чем три звена примыкать не могло и раньше (см. фиг. 54), обратимся сначала к неподчеркнутым звеньям крайних замков (см. фиг. 56) и посмотрим, с какими бесповодковыми их остается соединить на основании фиг. 54. К звену *1* примыкает концевая цепь, кончающаяся звеном *1, 4*; другая часть разъединенной цепи, кончающаяся звеном, обозначенным теми же цифрами, примыкает к звену *4*; к звену *7* будет примыкать концевая цепь *3*, 7 (фиг.57)

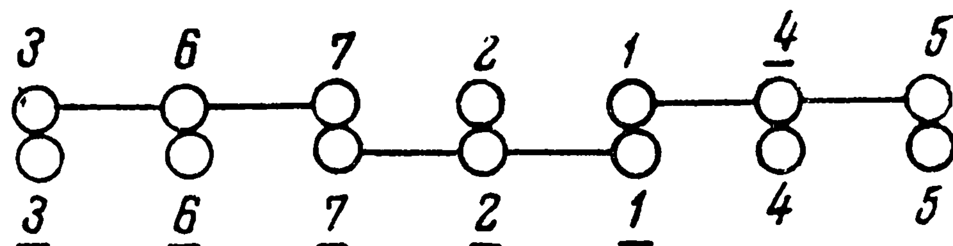
Покончив с первыми из парных замковых звеньев, переходим ко вторым, т. е. к бесповодковым звеньям, обозначенным

подчеркнутыми цифрами, к каждому из которых должны примыкать две концевые цепи, так как на фиг. 56 они содержат только по одному шарниру вместо трех. Так получается образование, изображенное на фиг. 57, представляющее собой не



Фиг 57

что иное, как частичный случай сложной открытой цепи нормального типа, в котором каждое бесповодковое звено соединено без промежуточных одноповодковых с другим таким же звеном.



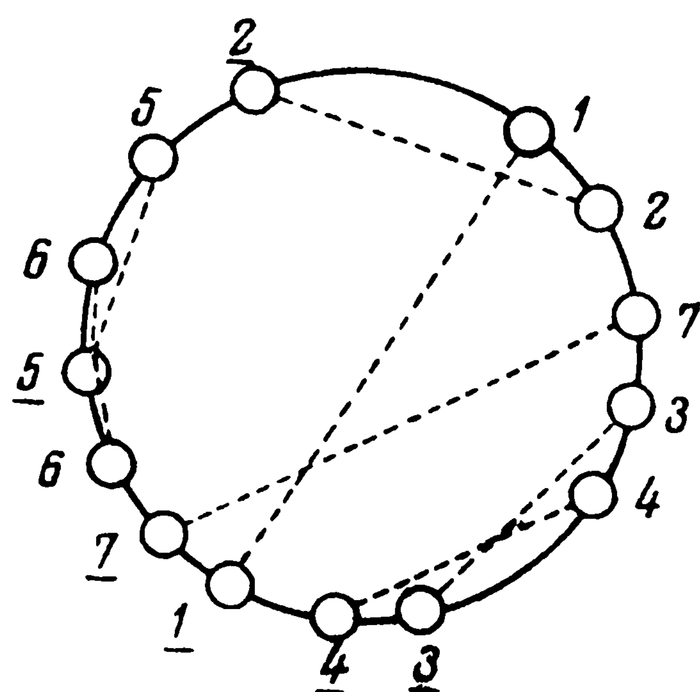
Фиг. 58

Чтобы из цепи (фиг. 57) получить цепь (фиг. 54), нужно только в каждой паре концевых одноповодковых звеньев, отмеченных одними и теми же цифрами, удалить один поводок и соединить их между собою шарниром, потому что этот прием является обратным относительно того, которым получена цепь (фиг. 57) из цепи (фиг. 54).

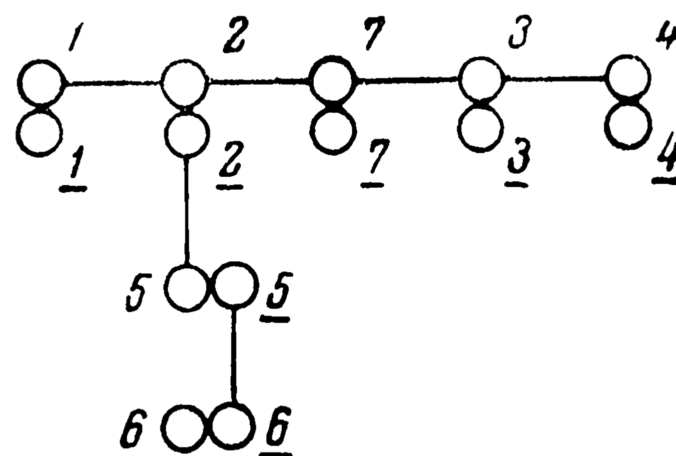
Не всегда расположение звеньев получается столь удобным, как на фиг. 56. Так, если мы применим указанный прием к той же замкнутой цепи, но обход бесповодковых звеньев начнем со звена *3*, то вместо фиг. 56 получим фиг. 58, где приходится в

замках *7* и *1* пройти через замковый шарнир. Еще сложнее обстоит дело с цепью (фиг. 59), где от замка *1* мы беспрепятственно доходим до замка *4*; дальше итти к новому звену нельзя ни от звена *4*, ни от звена $\underline{4}$; можно бы попытаться продолжить ряд влево от звеньев *1* и $\underline{1}$; но и здесь мы встречаемся уже с нанесенными на чертеж замками.

Тем не менее ни в каком случае задача наша не может быть безнадежной: у нас осталась группа (*5*, $\underline{5}$, *6*, $\underline{6}$), которая должна иметь два звена, соседних со звеньями совокупности нанесенной на чертеж группы (*1*, *2*, *7*, *3*, *4*) и одноименной с нею, обозначенной подчеркнутыми цифрами. В самом деле, так как обе группы расположены по замкнутому контуру (фиг. 59), то от каждого звена одной группы существует по этому контуру два пути, которыми можно притти к звену другой группы. На этом пути могут нам встретиться звенья как той, так и другой группы, но не могут встречаться все сплошь звенья только одной группы, так как по крайней мере первое звено, от которого мы начинаем, принадлежит одной, а последнее, которым мы кончаем, принадлежит другой. Два звена на этом пути, принадлежащие разным группам, будут называться соседними, если переход от одного к другому будет совершаться без промежуточных бесповодковых; такие два звена непременно встретятся так как иначе мы будем перебирать все звенья одной группы, что, по предыдущему, невозможно.



Фиг. 59



Фиг. 60

На фиг. 59 замечаем, что соседними звеньями двух групп будут *2* и *5*; поэтому устраиваем от замка *2* ответвление, на котором можно расположить и замок *6*; последний можно было бы расположить и на ответвлении от замка *7* (фиг. 60); дальнейшие манипуляции будут теми же, как и в случае фиг. 56.

На приведенных примерах мы могли убедиться, что можно указать несколько сложных открытых цепей, из которых образовалась данная сложная закрытая, содержащая бесповодковые звенья лишь в виде замковых соединений; поэтому удобнее в основу образования этих цепей класть простую замкнутую цепь.

При образовании фиг. 57 мы предполагали, что разъединяются (см. фиг. 54) шарниры только между одноповодковыми звеньями, которые при этом превращаются в конечные двухповодковые. Такое предположение не осуществится, если между двумя звеньями двух разных замков либо вовсе не окажется одноповодковых, либо будет только одно. В таком случае вместо некоторых из конечных двухповодковых звеньев (фиг. 57) мы получим одноповодковые за счет тех из бесповодковых, которые являются звеньями раздела; но так как одноповодковые трехшарнирные звенья не могут быть конечными, то некоторые из звеньев (см. фиг. 57) перестанут быть конечными.

Чтобы представить себе результат преобразования в открытую цепь, когда по окружности замкнутой (см. фиг. 54) имеется одна или несколько пар бесповодковых звеньев без промежуточных одноповодковых, назовем звенья одной такой пары через *A* и *B*. Желая установить связь с предыдущим случаем, вставим между этими двумя бесповодковыми цепь одноповодковых, содержащую не меньше двух звеньев; разъединяя шарнир между двумя из вставленных звеньев, совершаем преобразование, подобное предыдущему. В этом случае звенья *A* и *B* будут в открытой цепи такими бесповодковыми, к которым примыкают концевые цепи одинакового наименования (см. фиг. 57). Если бы мы не вставили цепи одноповодковых между двумя смежными бесповодковыми, не образующими замковое соединение, то на место только что указанных концевых цепей стал бы поводок;

если бы между звеньями A и B помещалось одно одноповодковое звено, то исчезла бы только одна из концевых цепей, другая же состояла бы только из одного конечного (двухповодкового) звена. Итак, останавливаясь только на одной паре соседних бесповодковых звеньев A и B, принадлежащих двум разным замкам, мы замечаем, что этот случай отличается от прежнего (см. фиг. 57) тем, что по размыкании пара концевых цепей с одноименными конечными звеньями окажется замененной поводками, или же поводком заменится только одна такая цепь.

Если вторые звенья той же пары замков назовем, соответственно, A' и B', то, вообще говоря, они не окажутся соседними; по размыкании же звенья A и B останутся смежными с ними, но либо оба либо одно из них окажется одноповодковым. Возможен, конечно, и случай, что звенья A' и B' тоже окажутся смежными, если они были смежными до размыкания.

Отсюда, обратно, можно вывести заключение о правилах, которые следует применять при образовании сложных замкнутых цепей с замковыми соединениями из сложных открытых цепей. Такие цепи могут быть образованы:

во-первых, из сложных открытых цепей, в которых бесповодковые звенья попарно соединены вместе,— смыканием концевых звеньев, которые при этом превращаются в одноповодковые;

во-вторых, из цепей, отличающихся от предыдущих тем, что в них имеется четное число бесповодковых звеньев, не имеющих смежных таких же звеньев,— смыканием прилегающих к последним одноповодковых, которые превращаются, таким образом, в бесповодковые, и продолжением смыкания, как в предыдущих случаях;

в-третьих, из цепей, отличающихся от предыдущих тем, что имеется нечетное число бесповодковых звеньев, не имеющих смежных таких же звеньев,— смыканием некоторого нечетного числа примыкающих к последним одноповодковых с концевыми звеньями (число последних в этом случае тоже будет нечетным) и продолжением смыкания, как в предыдущих случаях.

Примечание. Мы не беремся утверждать, что указанные правила образования из открытой сложной цепи такой же замкнутой являются необходимыми. Во всяком случае, ими вопрос не исчерпывается. Так, на фиг. 57 вовсе нельзя сомкнуть любые пары концевых цепей, чтобы получить замкнутую по типу фиг. 54; если мы сомкнем, например, между собою примыкающие к звеньям *1* и *7* цепи с концевыми звеньями *1*, *4* и *3*, *7*, то этого достаточно для того, чтобы нельзя было совершить кругового обхода бесповодковых, не проходя через замковый шарнир, как бы мы ни смыкали затем остальные концы. Определение условий, достаточных для того, чтобы безошибочно образовать из цепи вида (фиг. 57) цепь типа (фиг. 54) с круговым расположением бесповодковых, оказалось задачей крайне сложной и запутанной; это обстоятельство оправдывается тем, что в основу образования сложных цепей с одними замковыми соединениями мы предпочли положить простую замкнутую цепь.

Мы уже убедились, что всякая сложная замкнутая цепь с одними только замковыми соединениями может рассматриваться как образование, полученное из некоторой сложной открытой цепи, причем вновь образующиеся шарниры не могут быть замковыми; последние получаются из тех, которые существовали уже в открытой цепи, хотя не во всех случаях ими соединяются в открытой цепи два бесповодковых, как то показано на фиг. 57 (второй и третий приемы образования). Во всяком случае, сложная открытая цепь не перейдет в один из других типов, если разъединим те шарниры, которые после смыкания становятся замковыми и вставим между звеньями раздела цепь одноповодковых звеньев. После этого совершим в преобразованной цепи такое же самое смыкание концов, которое делали до вставления цепи одноповодковых звеньев.

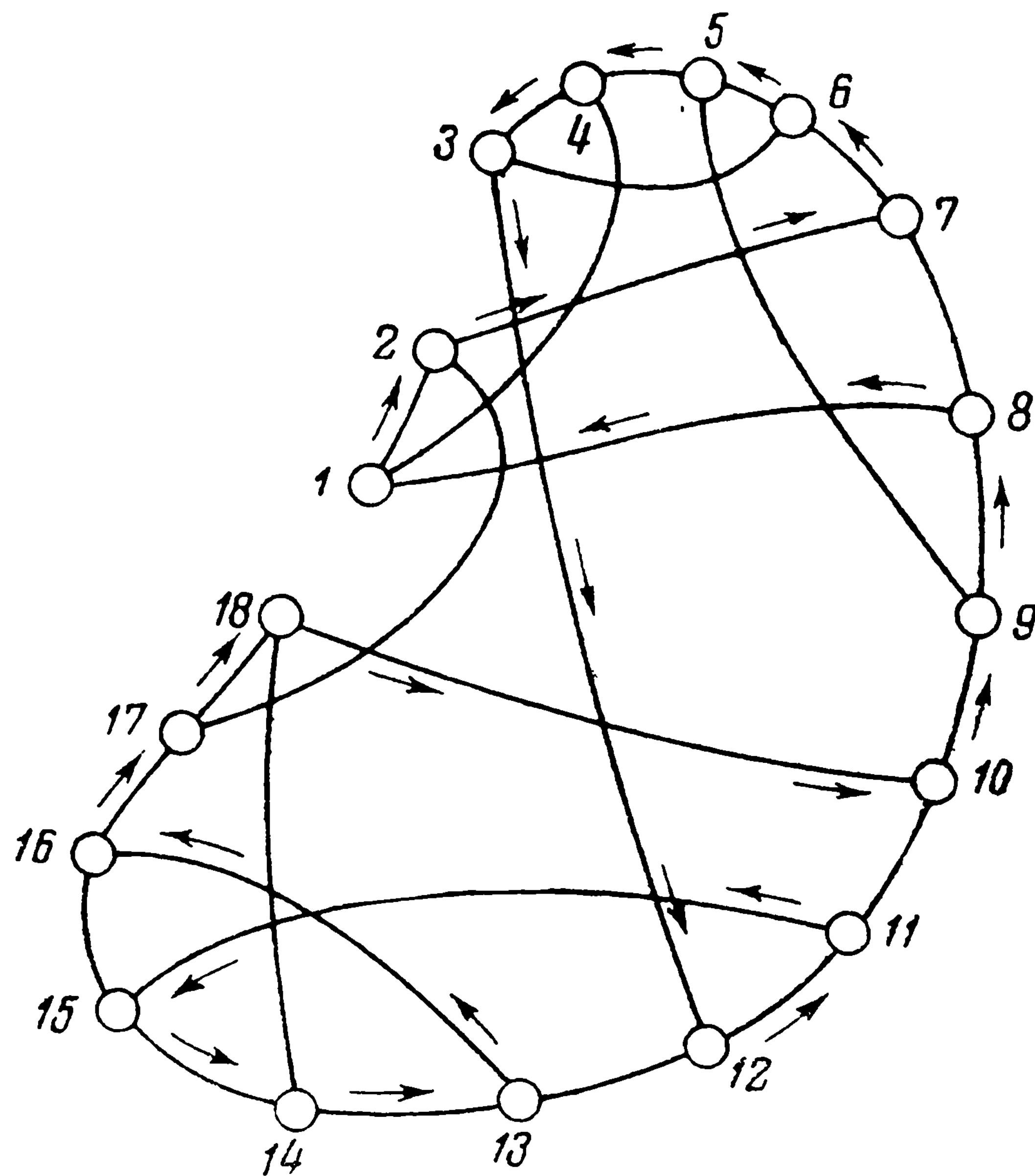
Очевидно, если указанное преобразование проделаем со всеми шарнирами, дающими начало замковым соединениям, то вместо цепей типа фиг. 54 получим более общий случай сложных замкнутых цепей, отличающихся от предыдущего тем, что

звенья, бывшие в нем замковыми, соединяются теперь не шарниром уже, а цепью одноповодковых звеньев. В схематическом изображении (см. фиг. 54 и 55) это скажется тем, что на место хорд, изображенных пунктиром, станут хорды, проведенные сплошной чертой. Конечно, может существовать и смешанный тип цепи, в котором только некоторые из замковых соединений заменены цепями одноповодковых звеньев. Последние условимся называть внутренними соединительными или диагональными цепями. Мы можем, таким образом, сказать, что сложные замкнутые цепи с трехшарнирными звеньями в общем случае образуются из таких же простых в результате отбрасывания в нескольких парах звеньев поводков и соединения затем двух звеньев каждой пары диагональной цепью; в частном случае, число звеньев последней может равняться и нулю, давая начало замковому соединению.

Диагональные цепи будем делить точно так же, как замковые соединения, на параллельные, перекрестные и нейтральные; признаки, лежащие в основе такого подразделения, останутся те же, что и для замковых соединений, так как диагональные цепи тоже будут изображаться хордами окружности.

В сложных замкнутых цепях только что рассмотренного типа на тех же основаниях, как и в цепях с замковыми соединениями, имеется возможность обойти все звенья, не принадлежащие диагональным цепям, по одному разу и вернуться к первоначальному звену. Не так, однако, просто привести такую цепь, при произвольном расположении ее частей, к схеме, в которой все бесповодковые звенья расположены по окружности. Возьмем для примера цепь в расположении, схематически изображенном на фиг. 61. Замечаем, что в ней имеются только трехшарнирные звенья, одноповодковые и трехповодковые: при этом, конечно, к каждому бесповодковому примыкают три одноповодковых звена, или в нашей схеме к каждому кружку— три криволинейных отрезка. Поэтому есть возможность ожидать, что данная цепь относится к тому типу сложных цепей, который мы рассматривали в предыдущем. Так как длина от-

резков, соединяющих кружки (условимся последнее называть узловыми точками), не играет в нашем рассмотрении, как и вообще все метрические соотношения, никакой роли, то решение вопроса сводится к тому, можно ли, считая отрезки гибкими и растяжимыми, деформировать наш контур так, чтобы все его

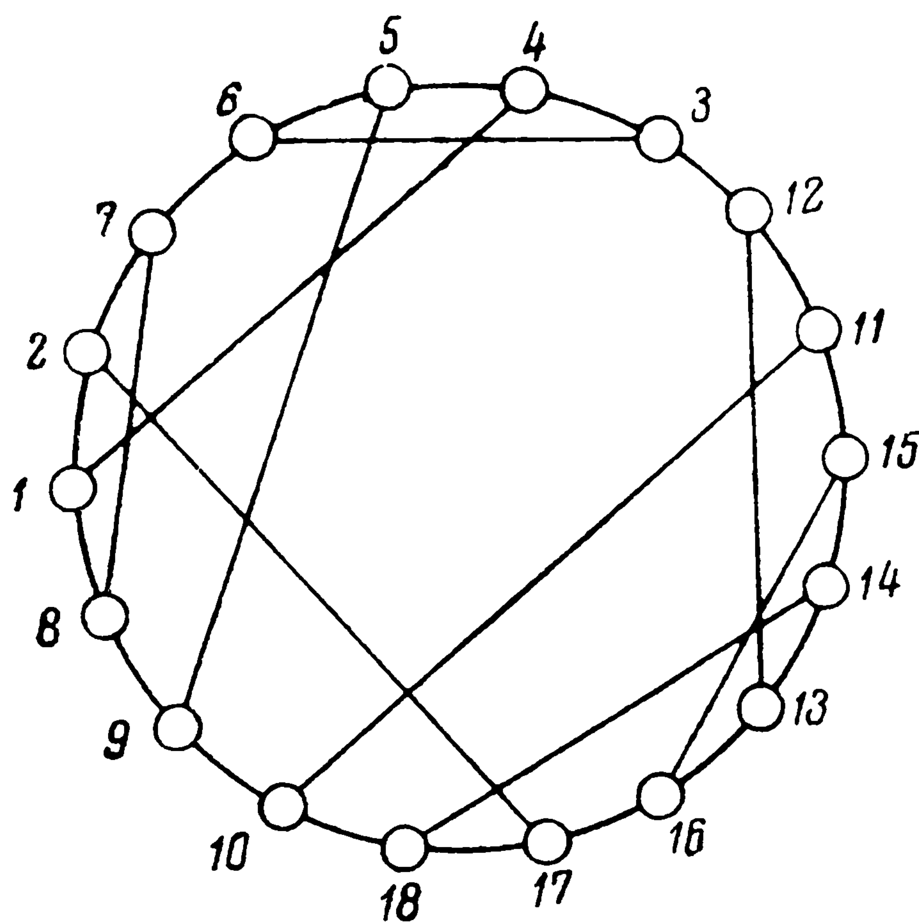


Фиг. 61.

узловые точки расположились по окружности и чтобы в связи с соединяющими два соседних на окружности кружка отрезками получить замкнутый контур.

Если только это возможно, то в каждой узловой точке один из отрезков должен изображать собой диагональную цепь, так как в каждой такой точке сходятся по три отрезка; число узловых точек должно быть, очевидно, всегда четным, так как при n узловых точках и трех отрезках, сходящихся в каждой их них, число всех отрезков будет очевидно $3n/2$ и может быть целым только при четном n; число диагональных цепей равно $n/2$.

Если только наша цепь может быть деформирована желательным нам образом, то, выкидывая те отрезки, которые после деформации станут диагональными, мы оставим лишь те, которые расположатся по периферии окружности и вместе с бесповодковыми звеньями образуют простую замкнутую цепь, которая может считаться лежащей в основе образования данной сложной. Но тогда эта простая замкнутая цепь будет существовать уже на нашей схеме (фиг. 61) в деформированном виде и нужно только выбросить лишние отрезки, чтобы ее получить. Когда это будет сделано, то признаком простой замкнутости явится то обстоятельство, что можно будет пройти узловые точки, из которых ни одна не уничтожена, и уцелевшие n отрезков все по одному разу вернутся к исходной нашей точке. К сожалению, не так-то просто выбросить надлежащим образом лишние отрезки; если же выбросить их, руководствуясь только тем, чтобы было выброшено $n/2$ отрезков и в каждой точке осталось их только по два, что сделать сравнительно легко, то в большинстве случаев мы разобьем наш контур на отдельные простые контуры, не имеющие между собою связи, но не получим одного замкнутого контура.

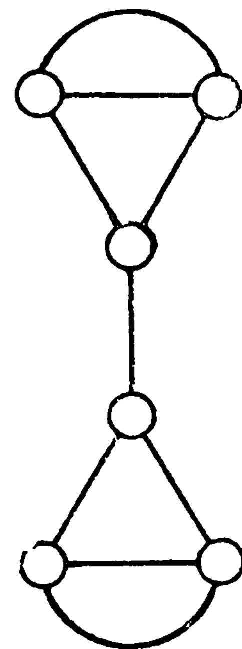


Фиг. 62.

На фиг. 61 стрелками показан такой обход, при котором мы пройдем все узловые точки по разу и вернемся к первоначальной точке; при этом, конечно, окажутся пройденными и столько отрезков, сколько в контуре имеется узловых точек. После этого легко, пользуясь нумерацией точек, развернуть пройден-

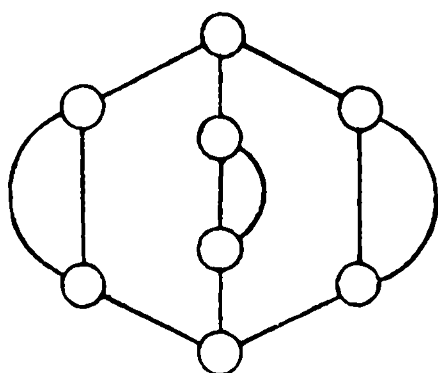
ный контур в круг, в котором пропущенные при обходе отрезки окажутся хордами (фиг. 62).

Не следует думать, что любая сложная цепь, схематически изображаемая узловыми точками, в которых сходятся по три отрезка в каждой, может быть развернута так, чтобы узловые точки расположились по окружности. На фиг. 63 и 64 изображены такие схемы, для которых указанный обход невозможен.



Фиг. 63.

Схематическое изображение наших цепей привело нас непосредственно к образованиям, рассматриваемым в не пользующемся большой известностью отделе геометрии, носящем название: Geometria или Analysis situs *, отделу, разбросанному в отдельных журнальных статьях, не имеющему еще до сих пор систематического учебника ни на одном из языков. Первая задача, относящаяся к этому отделу геометрии, предложена Эйлером и известна как задача о Кенигсбергских мостах **. Задача о мостах может считаться решенной и к ней приводится задача о том, можно ли в так называемом комплексе первого порядка, состоящем из совокупности точек и соединяющих их криволинейных отрезков, пройти последние все по одному разу; при этом не требуется возврата к исходной точке и допускается многократный проход через узловую точку. Это будет, следовательно, задача о фигурах, вычерчиваемых одним почерком; доказывается, что искомый обход всегда возможен, если имеются



Фиг. 64.

* Автор не только не может считать себя особенно сведущим в этой области геометрии, но даже с существованием такого отдела науки познакомился лишь, приискивая готовое решение вопроса об обходности, возникнувшего в настоящей главе. При просмотре литературы автор руководствовался главным образом немецким изданием Энциклопедии математических наук.

** Игнатьев. В царстве смекалки, т. 1, 3-е изд., стр. 193—214.

только узловые точки четного порядка, т. е. такие, в которых сходится четное число отрезков, и, кроме того, еще в том случае, когда имеется две точки нечетного порядка; во всех остальных случаях обход невозможен.

Другая основная задача указанного отдела геометрии есть именно задача об обходе всех точек комплекса первого порядка по одному разу с обязательным возвращением к исходной точке; при этом нет необходимости пройти все отрезки. Такова задача об обходе конем по шахматной доске всех клеток, с возвращением к исходной. Очевидно, что можно условиться клетки шахматного поля изображать точками, возможные ходы коня — соединяющими их отрезками. Частные решения этой задачи существуют, и первое из них дано тем же Эйлером, но до сих пор неизвестно число всех возможных обходов. Новейшие решения, принадлежащие Laquière и Polignac, позволяют определить число обходов, если пройти сначала одну половину доски, а потом другую.

Таким образом, полного решения даже этой частной задачи до сих пор не существует; поэтому нельзя считать решенной и задачу о числе обходов любого комплекса первого порядка, в частности, задачу о том, равно ли оно нулю или нет. Повидимому, более полный прием решения дает, впрочем, Brünel в статье, которую автору не удалось найти; он показывает, что число решений находится в связи с величиной определителя, получаемого следующим образом. Обозначим узловые точки буквами x_1 x_2 $x_3 \dots x_n$; составим многочлен вида $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, где коэффициент a_{ij} есть число отрезков, соединяющих между собою точки x_i, x_j; тогда число обходов является функцией определителя $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$; приложимо ли это решение ко всем случаям, или лишь к определенным частным случаям, нам, ввиду недоступности указанной статьи, неизвестно. Но, повидимому, вид функциональной зависимости от указанного определителя не установлен. Так как раскрытие этого определителя в общем виде, по крайней мере, дает начало многочлену из 1, 2, 3,... n членов, то вычисление его значения, хотя и

облегченное тем, что многие из коэффициентов будут нули, все же достаточно громоздко.

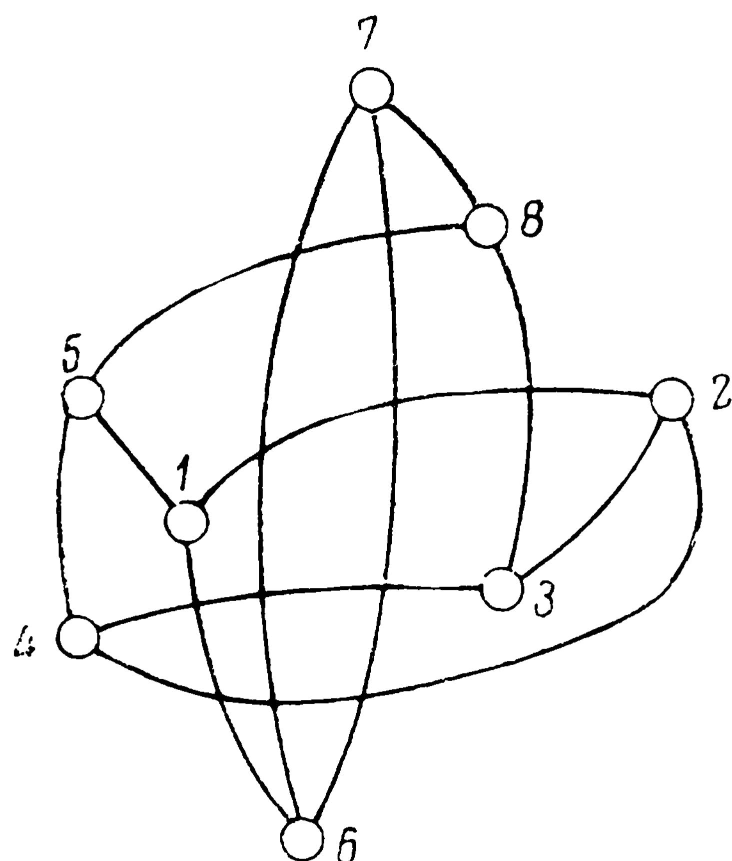
Ввиду этого, пожалуй, не сложнее будет прием, основанный на построении образования, носящего название «дерева» (Baum, arbre, ramification, tree). Так называется тот комплекс, который у нас служит схемой сложной открытой цепи (см. фиг. 26) и отличается тем, что от одной его точки к другой существует только один путь.

Такое, решающее вопрос дерево, будет у нас иметь не более $(3\cdot 2^{\frac{n}{2}}-2)$ точек, число это ещё сократится вследствие некоторых упрощений. Допуская, однако, даже, что число точек будет $3\cdot 2^{\frac{n}{2}}$, мы заметим, что оно все же в $1\cdot 2\cdot 3\ldots n/2\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(n-1)$ раз меньше, чем полное число членов раскрытого в общем виде определителя Брюнеля. Ввиду этого, несмотря на быстрое нарастание сложности предлагаемого здесь приема с увеличением числа узловых точек, нам думается, что он, при всей своей элементарности, не сложнее, чем вычисление указанного определителя; вопрос же решается им для всякого данного замкнутого линейного комплекса.

Прием наш основан на следующих соображениях. Если нам от некоторой узловой точки a комплекса, содержащего n точек, удалось двумя различными путями дойти до точки b комплекса, если, кроме точек a и b, оба пути общих точек не имеют, т. е. не имеется повторений одних и тех же точек в каждом из пройденных путей, если, кроме того, число пройденных отрезков в обоих путях в сумме равно n, то совокупность обоих путей образует искомый замкнутый контур.

Не требует доказательства, что совокупность обоих путей образует замкнутый контур. Если число пройденных отрезков в одном из путей будет p, то число узловых точек на этом пути, включая конечные точки a и b, будет $(p+1)$. На другом пути тогда, по условию, число пройденных отрезков будет $(n-p)$, число точек $(n-p+1)$; здесь точки a и b посчитаны два раза.

Обходя замкнутый контур, составленный из обоих путей, мы их пройдем по разу, т. е. пройдем всего $[(n - p + 1) + (p + 1) - 2]$ точки, т. е. всего n точек; по условию, в совокупности обоих путей не существует повторений одной и той же точки. Следовательно, найденный замкнутый контур будет содержать все узловые точки комплекса



Фиг. 65

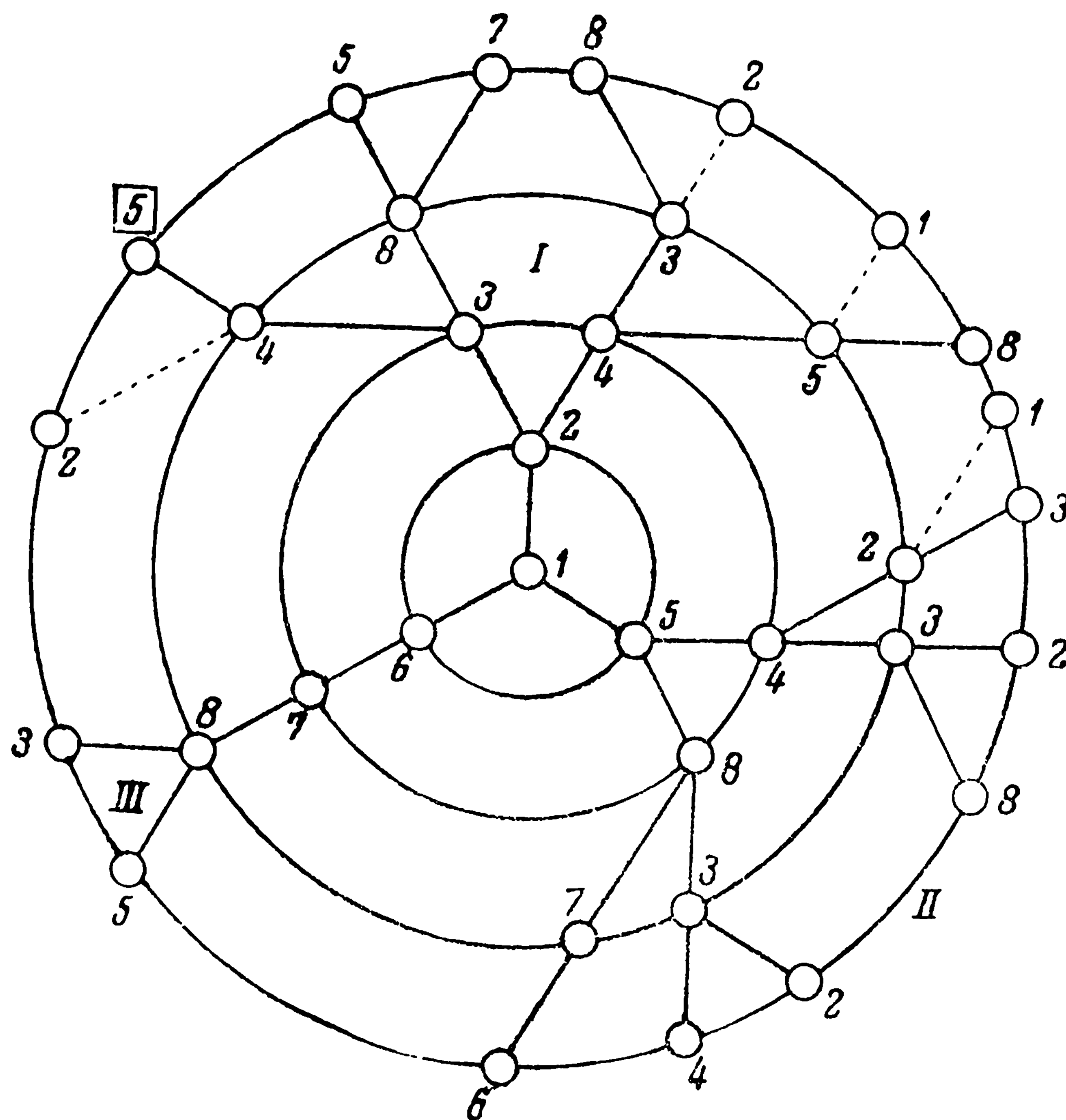
Покажем теперь на частном примере комплекса (фиг. 65), который может рассматриваться как схема сложной закрытой цепи с трехшарнирными звеньями при восьми бесповодковых, как находится искомый обход. Выписываем для удобства все три соединения каждой точки с тремя ближайшими остальными так, чтобы первая из этих точек стояла над чертой, три остальные — под нею. Получим следующую схему:

$$\frac{1}{2\cdot5\cdot6}\quad\frac{2}{1\cdot3\cdot4}\quad\frac{3}{2\cdot4\cdot8}\quad\frac{4}{2\cdot3\cdot5}\quad\frac{5}{1\cdot4\cdot8}\quad\frac{6}{1\cdot7\cdot7}\quad\frac{7}{6\cdot6\cdot8}\quad\frac{8}{3\cdot5\cdot7}$$

Прием наш будет состоять в том, что мы начертим как бы в развертке все пути, ведущие от начальной точки, за которую примем точку *1*, ко всем точкам, лежащим от нее на расстоянии четырех отрезков. Совокупность двух таких путей, в которых конечные точки будут те же, и в которых не найдется повторений тех же точек, согласно предыдущему, и явится решением поставленной задачи.

От исходной нашей точки *1* можно притти только к трем непосредственно с нею связанным точкам *2*, *5* и *6*. Помещаем точку *1* в центре круга (фиг. 66), три указанные точки — на его периферии. От каждой из этих точек можно опять притти к трем точкам, но одна из трех всегда будет точка *1*; ее во вни-

мание принимать не нужно уже потому, что мы ищем пути без повторения тех же точек, не говоря о том, что этим мы вернулись бы назад по пройденному уже пути. Поэтому от точки *2* первого круга мы можем притти только к точкам *3* и *4* второго, от точки же *5* — к *4* и *8*; что касается точки *6*, то от нее можно притти



Фиг. 66.

только к точке *7*, хотя и двумя путями; оба пути нет надобности отмечать, так как результат не изменится от того, которым из них мы пойдем, ввиду того, что безразлично, какие отрезки войдут в пройденный путь. Продолжая тот же прием, мы дойдем до четвертого круга; при этом не следует смущаться тем, что одна и та же точка комплекса (фиг. 65) повторяется

многократно на фиг. 66, так как последняя будет содержать много различных возможных обходов.

Чтобы сделать возможные сокращения, следует, заполнив каждый следующий круг, просмотреть путь, ведущий от каждой из его точек к центральной точке *1*, чтобы узнать, не является ли точка последнего круга повторением точки, уже имеющейся на указанном пути; если последнее предположение оправдывается, то будет излишне продолжать итти дальше от такой точки. На фиг. 66 такие точки оказались только на последнем круге; примыкающие к ним отрезки отмечены пунктиром; каждый путь, ведущий от такой точки к центральной точке *1*, содержит еще один раз эту конечную точку и тем самым из рассмотрения исключается.

Если мы удалим исходящие от центральной точки три отрезка *1*, *2*, *1*, *5*, и *1*, *6*, то наше дерево распадается на три самостоятельных дерева, которые назовем главными разветвлениями *I*, *II*, *III*; от каждой точки такого самостоятельного дерева к другой его точке ведет только один путь. Но нетрудно заметить, что нельзя будет найти точек, удаленных друг от друга на расстоянии более, чем шести отрезков, или, в общем виде, при n точках основного контура и $n/2$ кругах не более $(n-2)$ отрезков. Хотя это положение почти очевидно, но так как оно не может представлять аксиомы, мы считаем необходимым привести этому доказательство.

Допустим, что две точки одного из главных разветвлений будут точки a и b, что первая из них лежит на p-ом, вторая на q-ом круге, считая от центра; при этом $p \leqslant q$. Как к точке a, так и к точке b имеется один путь от центральной точки *1*; по самому приему построения нашего дерева на пути *1a* и *1b* каждая следующая точка лежит на круге, дальше отстоящем от центра, чем предыдущая. Возможно, что оба пути имеют общие точки; допустим, что последняя общая точка при движении от точки *1* лежит на k-м круге, где $1 \leqslant k \leqslant q$, назовем эту точку c; если $k = q$, то точки b и c тождественны и весь путь *1b* является частью пути *1a*; тогда, очевидно, число отрезков

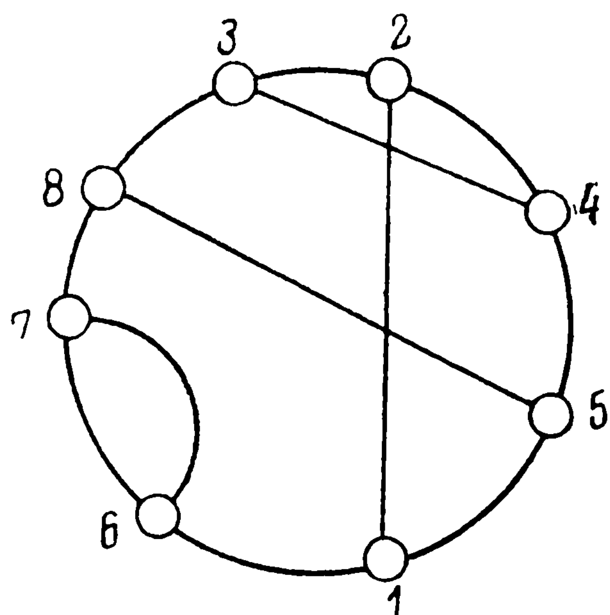
между точками a и b будет $(p - q)$. Так как $p \leqslant n/2$, а $q \geqslant 1$, то $p - q \leqslant n/2 - 1$, что при всяком n, большем единицы, приводит к неравенству $P - q \leqslant n - 2$.

Возможно, что точки b и c не тождественны и тогда $k < q$; тогда существует один путь от точки c к точке a и другой путь от точки c к точке b, которые, как части путей *1a* и *1b*, уже общих точек не имеют и расположены так, что каждая следующая точка лежит на круге, отстоящем от центра дальше, чем предыдущая; поэтому путь от точки c к точке a содержит $(p - q)$ отрезков, путь же от точки c к точке b содержит $(q - k)$ отрезков. По основному свойству дерева путь от точки a к точке b через точку c будет единственным; он содержит $(p + q - 2k)$ отрезка; взяв для p и q наибольшие возможные значения $n/2$, для k — наименьшее, т. е. единицу, так как точка *1* из рассмотрения исключена, раз речь идет о точках одного из главных разветвлений, мы замечаем, что наибольшее число отрезков между точками a и b будет $n - 2$.

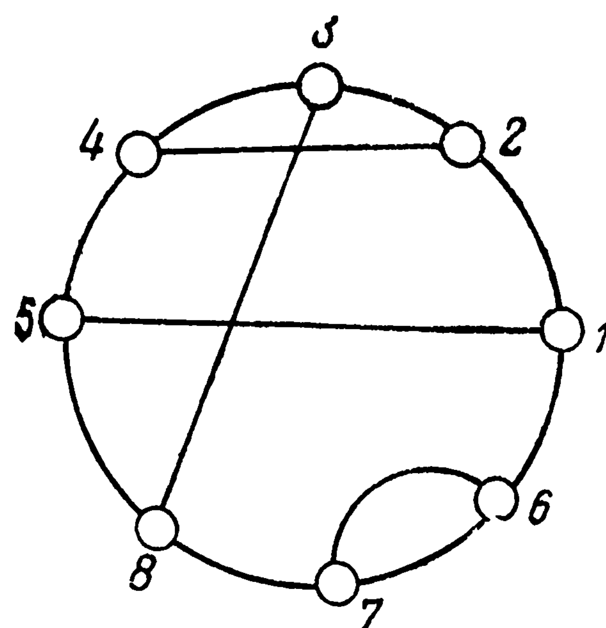
В силу доказанного положения, если мы замечаем на последнем из кругов (фиг. 66) одного и того же разветвления две одноименные точки, то путь, соединяющий их, не изображает собой полного обхода в основном комплексе (фиг. 65), а лишь частичный обход, не содержащий в себе всех точек. Так, например, в разветвлении *II* (фиг. 66) мы замечаем на последнем круге две точки, отмеченные цифрою *2*; путь, ведущий от одной из них к другой, напишется так: (*2—3—4—5—8—3—2*) и представляет в основном контуре (фиг. 65) обход, не содержащий точек *1* и *6*.

Поэтому полный обход можно получить лишь в том случае, если отметим на крайнем круге две одноименные точки в двух разных главных разветвлениях. Если при построении дерева все лишние точки были своевременно устранены, то на пути от любой точки наружного круга к центральной точке мы не встретим повторения одноименной точки, но в совокупности двух путей, расположенных в разных главных разветвлениях, может встретиться повторение; такие пути подлежат

исключению. Если например, мы от крайней правой точки *8* разветвления *I* пройдем путь к точке *8* разветвления *II*, то путь этот напишется так: (*8—5—4—2—1—5—4—3—8*). Мы замечаем, что точки *4* и *5* повторяются в нем два раза, точки же *6* и *7* отсутствуют; путь этот не представляет поэтому требуемого обхода. Полный обход определяется точками *3*, принадлежащими разветвлениям *II* и *III*, и напишется так: (*3—2—4—5—1—6—7—8—3*). Существует, однако, еще второй обход, определяемый



Фиг. 67.



Фиг. 68.

цифрой *5* разветвления *III* и поставленной в рамку цифрой *5* разветвления *I*, который изобразится в виде (*5—4—3—2—1—6—7—8—5*). Две деформации комплекса (фиг. 65) в круг, соответствующие этим возможным обходам, изображены на фиг. 67 и 68.

Условимся относить к четвертому классу лишь те механизмы, в которых присоединяемая сложная замкнутая многоповодковая цепь допускает полный обход всех узловых точек. Поэтому важно будет найти хотя бы один обход. Если же требуется найти все обходы, или же убедиться в том, что обхода не существует, то приходится перепробовать все комбинации между каждой парой одноименных цифр на крайней окружности, принадлежащих двум различным главным разветвлениям. Проделать все комбинации следует, конечно, систематическим путем, который, однако, будет излишне указывать здесь.

Вместо графического изображения дерева можно три его главных разветвления изобразить в виде числовой таблицы,

содержащей каждая $n/2$ столбцов. В первом столбце выписан только отрезок, соединяющий главное разветвление с центральной точкой, в следующем столбце — все отрезки, соединяющие точки первого круга с точками второго и т. д. Для трех главных разветвлений (см. фиг. 66) получаем следующие три таблицы, где каждый отрезок изображен цифрами, обозначающими его конечные точки.

12	23	34	45	15	54	42	23	16	67	78	83
	24	38	85		58	43	32				85
		43	87			83	38				
		45	38			87	34				
			58				76				

Вторые цифры последнего столбца соответствуют точкам, лежащим на последнем круге, и нетрудно отметить по таблице непрерывный переход от точки *1* к любой из этих точек; однако, построение (см. фиг. 66) обладает большей наглядностью *.

Вернемся теперь еще немного к цепям с трехшарнирными звеньями и одними только замковыми соединениями. Такие

* Чрезвычайно удобный и быстрый способ нахождения одного обхода там, где этих обходов несколько, указал мне (ныне уже покойный) мой отец В. Ф. Ассур. Способ этот основан на том что в каждой узловой точке сходятся две стороны замкнутого полигона и одна диагональ. Начиная от произвольно выбранной узловой точки, отмечаем красным карандашом предполагаемую диагональ, синим — обе предполагаемые стороны; по синей черте двигаемся к следующим узловым точкам, где из оставшихся двух отрезков один отмечаем красным цветом, другой — синим и т. д. Хотя отрезки отмечаются наугад, но опыт показал, что при том навыке, который был приобретен при изучении вопроса о возможных способах найти обход, мы без промаха справлялись в несколько минут с крайне сложными контурами в 20—30 точек. Можно поэтому рекомендовать, раньше чем приступать к систематическому изысканию обхода указанным выше способом, сначала попытать счастье двуцветным карандашом. Если обход есть, то вряд ли придется прибегнуть к построению дерева; последнее будет тогда играть главную роль в случаях, где обхода нет, чтобы не оставлять на этот счет сомнений. В случае неудачной попытки вместо одного замкнутого синего контура получаем несколько отдельных.

цепи, как мы указывали, обладают тем отличительным свойством, что круговой обход всех звеньев легко можно найти, не прибегая к построению дерева; но требуется, однако, указание, что это распространяется только на те цепи, в которых каждое из соединенных в замок звеньев имеет соседними звеньями два одноповодковых; это следует из самого приема обхода, указанного применительно к фиг. 51а. Указанное условие не будет соблюдено, если, образовав второй замок в цепи (фиг. 48), мы за одно из замковых звеньев примем которое-либо из звеньев, непосредственно примыкающих к звеньям *I* или *II*. В каждом из последних образуется в таком случае два шарнира, которыми они примыкают к бесповодковым звеньям, но только один из них будет замковым. С помощью приема построения дерева нам легко и в этих случаях найти обход; решение задачи, однако, не будет однозначным. Но для наших целей важно найти один какой-нибудь обход, или же убедиться в том, что обход невозможен и цепь поэтому не относится к рассматриваемому нами классу.

Допускающая два обхода цепь с трехшарнирными звеньями и одними только замковыми соединениями полусхематически изображена на фиг. 69. Здесь бесповодковые звенья изображены полностью, цепи же одноповодковых звеньев — криволинейными отрезками; за замковые шарниры можно принять шарниры *1*, *4*, *6*, *7*; тогда шарниры *2*, *3*, *5* условимся называть обходными, так как через них необходимо перейти при соответствующем круговом обходе; последний напишется так:

$$I - V - IV - II - III - VIII - VII - VI - I.$$

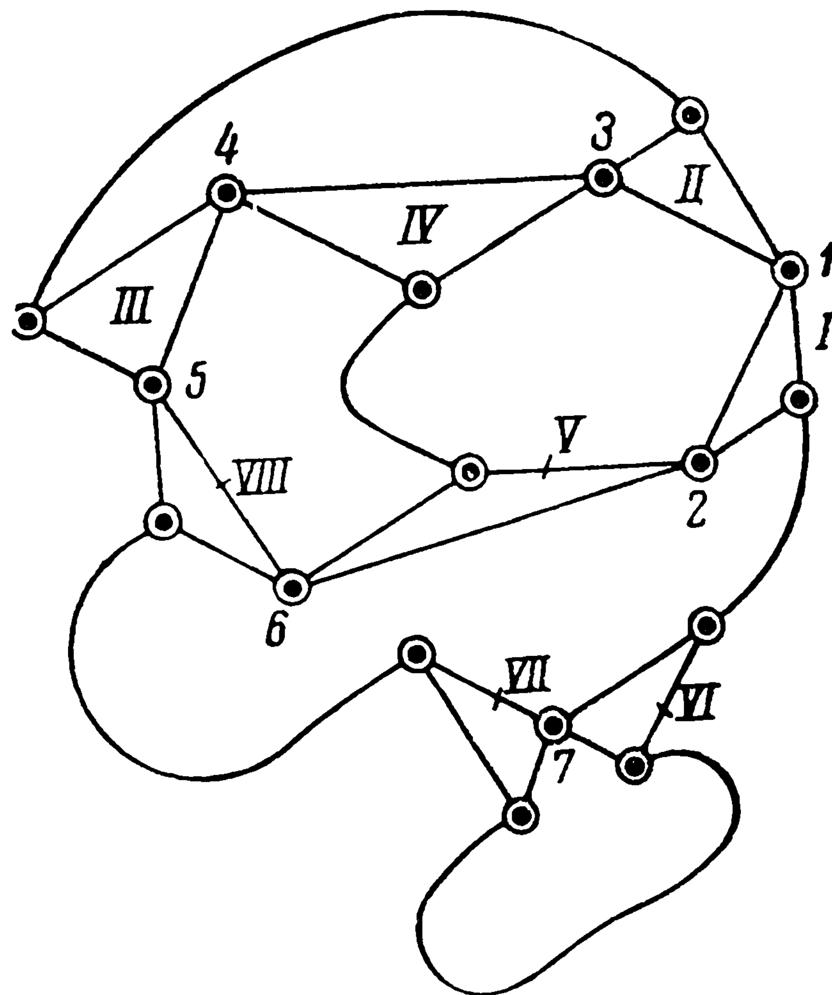
Можно, однако, считать за замковые шарниры *2*, *3*, *5*. *7* тогда обходными будут *1*, *4*, *6*; обход напишется так:

$$I - II - III - IV - V - VIII - VII - VI - I.$$

Мы ознакомились в предыдущем со сложными замкнутыми цепями, в которых все звенья были трехшарнирные. Переходим

теперь к изучению типов цепей, в которых имеются звенья, содержащие больше трех шарниров.

Чтобы составить себе представление о цепях такого вида, допустим, что второе замыкание в замок в цепи (см. фиг. 48) совершается таким образом, что второй замковый шарнир образуется в звене, которое уже раньше было замковым. Допустим, что в замок смыкаются звенья *I* и *V*; при этом недостаточно опустить один только поводок звена *V*, так как, предполагая цепь пристегнутой к неизменяемой основе, мы должны, прежде чем устраивать новый шарнир, сообщить системе две степени свободы. Если последние сообщаются за счет устранения поводков, то необходимо устранить два поводка; второй поводок можно взять у любого из одноповодковых звеньев, которое превратится тогда в двухшарнирное бесповодковое.



Фиг. 69.

Указанным приемом можно устроить в одном и том же звене несколько замковых шарниров и получать комбинации с многошарнирными бесповодковыми звеньями весьма сложного вида. Все такие цепи, очевидно, должны допускать круговой обход, так как образованы смыканием первоначальной простой замкнутой цепи, причем прежние шарниры не подвергались разъединению.

Как ни сложны подобные соединения, но легко уяснить себе все возможные обстоятельства с помощью нашего схематического изображения, где все звенья первоначальной замкнутой цепи

располагаются по кругу, а замковые шарниры изображаются пунктирными хордами, соединяющими соответствующие бесповодковые. Так как каждый замковый шарнир образуется за счет отбрасывания двух поводков в простой замкнутой цепи с однообразным распределением последних, то число всех замковых шарниров и изображающих их хорд, если предполагать в образовавшейся цепи n бесповодковых звеньев, должно быть $n/2$. Это число хорд не зависит от того, будут ли в цепи с замковыми соединениями только трехшарнирные бесповодковые, или встречаются ли и многошарнирные; при одних только трехшарнирных к каждому из бесповодковых будет примыкать одна хорда. Если же окажутся звенья многошарнирные, то к таковым будет примыкать большое число хорд, равное числу шарниров звена без двух; при этом некоторые из бесповодковых звеньев должны остаться совсем без примыкающих к ним хорд, так как число концов последних в точности равно числу всех бесповодковых звеньев, т. е. должны образоваться непременно бесповодковые двухшарнирные звенья.

Итак, схемы сложных замкнутых цепей с чисто замковыми соединениями, теперь рассматриваемых, будут отличаться от раньше рассмотренного частного вида тем, что хорды прежней схемы (см. фиг. 54 и 55) подвергнутся перестановке, так что из одного бесповодкового звена может исходить несколько хорд; общее же число последних останется прежним.

Легко получить, однако, и более общий тип сложных замкнутых цепей с многошарнирными бесповодковыми звеньями. Схема таких цепей получается из схемы (см. фиг. 62) цепей с внутренними соединительными цепями, перестановкой в ней хорд, так, чтобы к одному бесповодковому могло примыкать более одной хорды, но число последних не подверглось изменению, т. е. равнялось бы половине числа бесповодковых. Такая перестановка хорд находит себе оправдание в многократном применении следующего приема. Разъединяем в жестком соединении сложной замкнутой цепи с основой шарнир, соединяющий звено одной из внутренних соединительных цепей с бесповод-

ковым звеном; получится система, обладающая двумя степенями свободы. Мы лишаем систему этих двух степеней свободы, обращаем ее в жесткую, образуя новый шарнир между тем же звеном соединительной цепи и каким-либо из других бесповодковых. Новый шарнир мог бы соединить также звено соединительной цепи с каким-либо из одноповодковых, образуя четырехшарнирное одноповодковое; но до сих пор мы рассматривали только такие цепи, в которых одноповодковые звенья — трехшарнирные и к иному типу цепей считаем удобным перейти только в связи с вопросом о переносе поводков.

Возможность образования из основного типа сложных замкнутых цепей, содержащего только трехшарнирные звенья, новых форм приемами, соответствующими перестановке хорд в схеме этих цепей, крайне осложняет дальнейшее изучение свойств этих цепей, а также легкость опознавания такой цепи, когда она в механизме образует последнее из наслоений. До сих пор простота геометрического, вполне типичного строения цепи, давшая возможность опознать и отделить цепь данного типа, происходила от того, что все перестановки сводились к перестановке поводков, что эти перестановки в первых двух классах цепей не давали начала новым формам, а лишь разбивали цепь на простейшие. В третьем классе перестановка поводков дала уже начало второму типу, но только одному, и весьма характерному. Теперь мы стоим перед проблемой перестановки хорд и оказывается, что возможны весьма разнообразные перестановки хорд без того, чтобы цепь распалась. В виде примера укажем хотя бы на цепь с шестью бесповодковыми звеньями, в которой все три хорды примыкают к одному и тому же бесповодковому звену так, что схема имеет вид шестиугольника с тремя диагоналями, исходящими из одной вершины; от такой цепи не удается отделить простейшей.

Останавливаясь пока только на таких цепях, в которых все одноповодковые звенья — трехшарнирные, бесповодковые же могут быть и многошарнирными, мы замечаем, что, кроме обходности бесповодковых, нет геометрического признака,

характеризующего относительное расположение между собою бесповодковых и связывающих их в одно целое цепей одноповодковых звеньев.

Остается признак только числовой, состоящий в том, что число всех цепей одноповодковых звеньев равно половине утроенного числа бесповодковых звеньев. Это очевидно, так как в схеме таких цепей число отрезков, расположенных по окружности, равно числу бесповодковых звеньев, а число хорд — половине числа бесповодковых. Не следует, однако, при этом упускать из виду частного случая, когда число одноповодковых звеньев в какой-нибудь цепи, соединяющей два бесповодковых, обращается в ноль; поэтому всякий шарнир между двумя бесповодковыми должен войти в счет наравне с цепями одноповодковых звеньев.

Этот числовой признак обладает тем недостатком, который является общим для подобного рода признаков: он оказывается в общем случае признаком необходимым, но недостаточным для того, чтобы судить о том, дает ли данная цепь в соединении с неизменяемой основой начало соединению жесткому или нет. Чтобы убедиться в последнем, т. е. в том, что цепь может быть отнесена к нормальному типу, когда указанный числовой признак удовлетворяется, приходится поэтому делать еще особую проверку отдельных частей цепи, к уяснению которой мы и приступаем.

Докажем прежде всего в общем виде, что соединение двух каких-либо звеньев какой бы то ни было сочлененной системы простой цепью одноповодковых звеньев, пристегнутых к основе, эквивалентно устройству шарнира между этими или какими-либо другими двумя звеньями системы в том смысле, что лишает систему, в общем случае, двух степеней свобод.

В справедливости этой теоремы мы уже успели убедиться на частных случаях. Мы знаем уже, что на место замкового шарнира можно поставить внутреннюю соединительную цепь. Если мы обратимся к приему развития поводка, то тоже убедимся, что повторное его применение можно трактовать, как

разъединение шарнира между двумя звеньями, причем последний заменяется соединительною цепью одноповодковых. Допустим же, что между звеньями A и B вставляется такая цепь; можно это сделать при помощи следующего ряда действий; сначала присоединяем к звену A цепь одноповодковых, пристегнутую поводками к основе. Мы видели уже не раз, что это соответствует многократному присоединению двухповодковой группы и, следовательно, не изменяет числа степеней свобод системы. После этого образуем шарнир, соединяющий последнее из звеньев вновь присоединенной цепи со звеном B, чем лишаем систему двух степеней свобод и в то же время заканчиваем задуманное преобразование.

Как и все приемы лишения системы определенного числа степеней свобод, и только что указанный может привести к недоразумению; приемы эти лишь в том случае лишают систему определенного числа степеней свобод, когда они не ведут к образованию статически неопределимых систем * или статически неопределимых частей в данной системе. Дело в том, что наложение новых связей на систему лишь в том случае лишает систему числа степеней свобод, равного числу налагаемых связей, если все связи, которым система окажется подчиненной, между собою независимы. В противном случае, те из уравнений связей, которые являются следствиями остальных, могут быть отброшены, т. е. они не уменьшают числа степеней свобод системы. Если, тем не менее, такие связи, математические выражения которых являются следствиями математических выражений остальных, физически осуществляются, то получаются системы, носящие название статически

* Здесь говорится, конечно, не только о жестких статически неопределимых системах, но и об изменяемых; под последними мы разумеем такие, в которых усилия в стержнях (предполагая неизменяемые звенья с более, чем двумя шарнирами, замененными жесткими и статически определимыми образованиями из двухшарнирных стержней), равно как и давления в шарнирах, не могут быть определены, не принимая во внимание упругих деформаций при действии уравновешенной системы сил.

неопределимых; статическая неопределимость может относиться либо ко всей системе, либо к отдельным ее частям. Отсюда очевидно, что при осуществлении одинакового числа новых связей система будет обладать большим числом степеней свобод, если некоторые части ее стали статически неопределимыми, чем в противном случае.

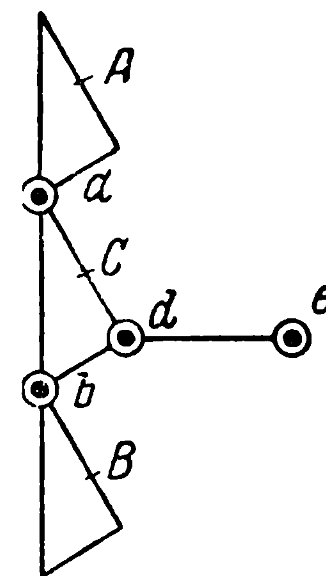
Наиболее ярко высказанные здесь положения иллюстрируются, быть может, тем обстоятельством, что хотя можно заменить шарнирным соединением двух звеньев нормальной сложной цепи основного типа как любую диагональную цепь, так и любую обходную цепь одноповодковых звеньев, не нарушая, в общем случае, жесткости соединения с основой, но совершить такую замену для всех таких цепей одновременно, при соблюдении того же условия нельзя. Ведь в таком случае остались бы одни только бесповодковые звенья, не было бы больше никакой связи с основой и число степеней свобод системы равнялось бы, по меньшей мере, трем, как для неизменяемой фигуры, движущейся в плоскости. Между тем число осуществленных связей равнялось бы тому, которое необходимо, чтобы связать систему в жесткое соединение с основой. Это показывает, что часть осуществленных связей вытекает из некоторой совокупности остальных.

Точно так же жесткое соединение с основой цепи четвертого класса может приобрести подвижность вследствие переноса внутренних соединительных цепей. Признаком может служить то обстоятельство, что часть звеньев, в соединении с основой или между собою, образует статически неопределимую систему; вот почему и необходима проверка по частям.

Но прежде всего необходимо указать, что при образовании из простой замкнутой цепи сложной замкнутой основного типа т. е. с трехшарнирными звеньями) или вовсе не вводится условий, являющихся следствиями остальных, что, следовательно, основной тип в такой проверке не нуждается, или же, если вводится, то в каких случаях. Мы придем к искомым выводам, опираясь на следующие положения.

Положение I. Разъединяя в жестком, статически определимом соединении с основой какой-либо цепи шарнир между двумя звеньями и соединяя те же звенья однопоподковым звеном, прикрепленным к основе, получим снова жесткое, статически определимое соединение с основой*.

Допустим, что был разъединен шарнир между звеньями A и B; образовалась система с двумя степенями свободы; этой системе непременно можно сообщить такое перемещение, при котором раньше соединенные шарниром точки будут занимать различные положения. Если бы этого нельзя было сделать, то шарнир, раньше соединявший эти точки, являлся бы осуществлением связи, вытекающей из оставшихся в силе после его разъединения, что противоречит предположению, что данная жесткая система статически определима. Допустим, что эти точки (фиг. 70) были a и b; соединим их теперь бесповодковым звеном, т. е. наложим новую связь, требующую, чтобы эти точки находились на некотором постоянном, неравном нулю расстоянии. Эта новая связь не может быть следствием старых, так как в присутствии последних это расстояние могло быть равным нулю. Поэтому по введении нового звена C система с двумя степенями свободы преврати лась в механизм; точка d этого механизма описывает некоторую траекторию; соединяя эту точку поводком с некоторой точкой e основы,

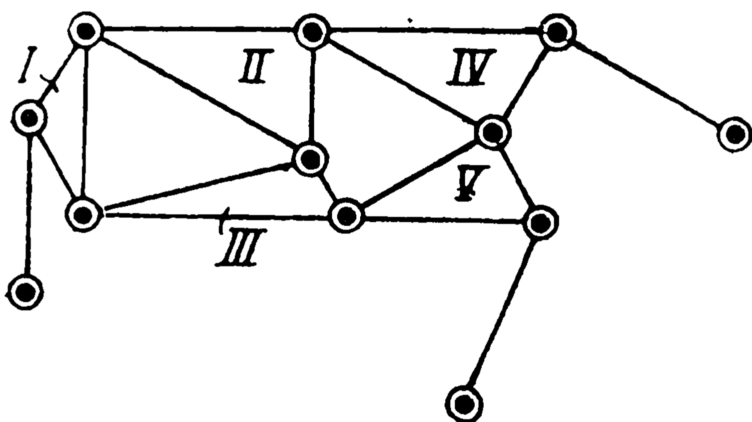


Фиг. 70.

* Высказанное здесь положение могло бы быть положено в основу приема развития поводка и стать, таким образом, исходным пунктом всех наших рассуждений. При исследовании особых случаев, где в силу особого расположения частей или особых метрических соотношений жесткое, в общем случае, соединение нормальных цепей с основой приобретает подвижность, указанное положение тоже должно играть видную роль.

не лежащей на нормали к ее траектории, мы непременно получаем жесткое соединение, так как новая связь никоим образом не может быть рассматриваема, как следствие остальных, ибо направление перемещения точки, ею обусловленное, будет иное, чем обусловленное остальными связями. Этим положение наше может считаться доказанным.

Положение II. Сложная замкнутая цепь основного типа (т. е. трехшарнирными звеньями, содержащая только два бесповодковых звена, всегда образует с основою жесткое, статически определимое соединение, если число ее поводков не менее трех.

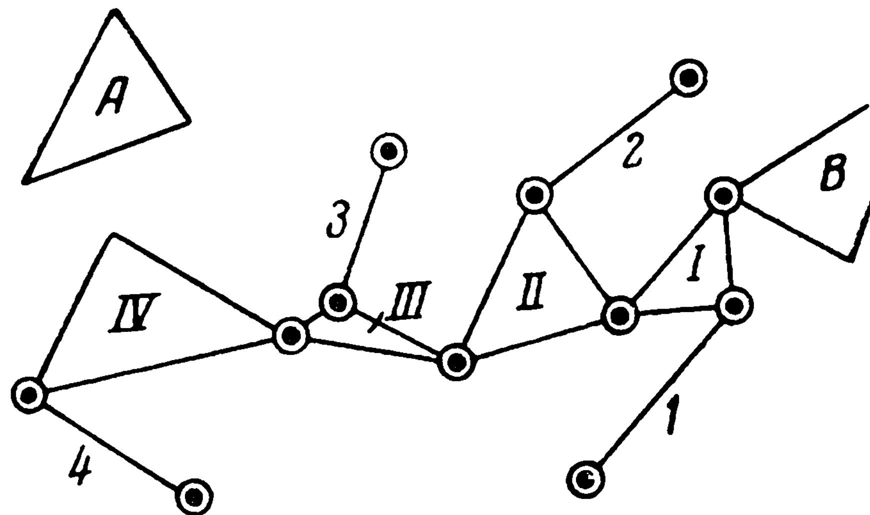


Фиг. 71.

К звену *I* (фиг. 71), пока не связанному поводком с основой, прикрепляем двухповодковую группу звеньев *II* и *III*; к последней — такую же группу звеньев *IV* и *V*; получается жесткое, статически определимое соединение четырех остальных звеньев со звеном *I*. Рассматривая это соединение, как одно жесткое звено, мы получим жесткое соединение с основой, прикрепив его тремя поводками к основе. Применим теперь многократно прием, указанный в предложении *I*, причем разъединяем, с одной стороны, шарнир между звеньями *I* и *II*, с другой — шарнир между звеньями *IV* и *V*; тогда разъединенные звенья свяжутся цепью одноповодковых, а в результате получится цепь по типу фиг. 48. Для сложной цепи с одним только замковым соединением положение наше, таким образом, доказано; оно будет в силу положения I, доказано и для цепи, получаемой из фиг. 48 заменой замкового шарнира внутренней соединительной цепью. Очевидно, что все цепи, образованные из изображенной на фиг. 71, будут иметь более трех поводков; также оче-

видно, что цепь с меньшим числом поводков не даст неизменяемого соединения с основой.

Положение III. Сложная замкнутая цепь основного типа четвертого класса, в которой нет ни замковых соединений, ни диагональных цепей, содержащих менее двух звеньев, всегда образует с основой жесткое, статически определимое соединение, если число ее поводков не менее трех.

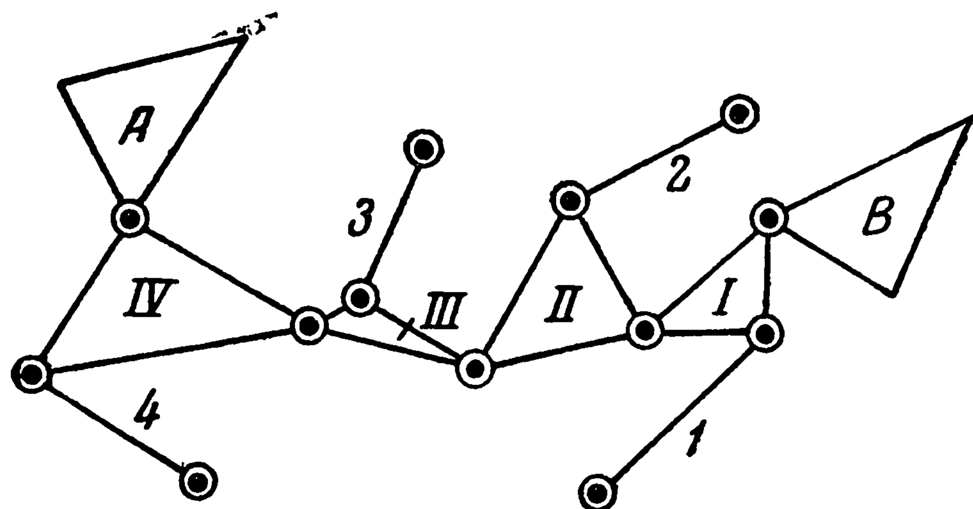


Фиг. 72.

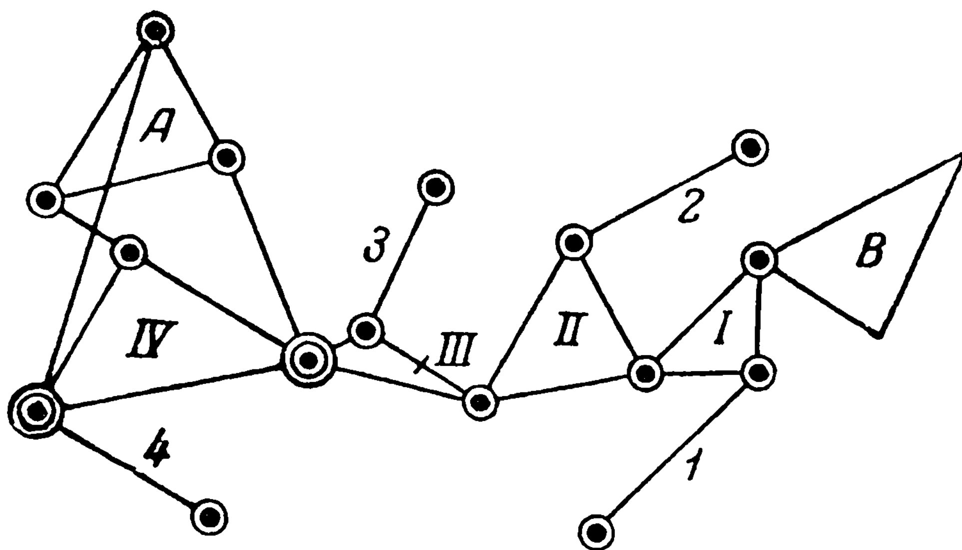
Допустим справедливость этого положения для цепи, содержащей n бесповодковых; докажем его для цепи, содержащей $n + 2$ бесповодковых; мы знаем, что для $n = 2$ оно оправдывается. Допустим, что A и B — два любых одноповодковых звена сложной цепи, содержащей n бесповодковых и образующей с основой жесткое, статически определимое соединение. Желая преобразовать эту цепь в другую, содержащую $(n + 2)$ бесповодковых, присоединяем к звену B ряд двухповодковых групп (фиг. 72) так, чтобы образовалась цепь одноповодковых звеньев I, II, III, IV; число последних может быть избрано произвольным. В результате получится снова жесткое, статически определимое соединение с основой. Удаляем теперь поводки звеньев A и B, благодаря чему образуется система с двумя степенями свободы. Покажем теперь, что, смыкая шарниром две совмещающиеся точки звеньев A и IV, мы в общем случае, получим жесткое соединение с основой.

Приемы доказательства будут схожи с теми, которыми мы пользовались при доказательстве жесткости соединения с основой простой замкнутой цепи (см. фиг. 33—40). Заменяем шарнирное закрепление введением двух стержней ac и ab, являющихся осуществлением связи, требующей, чтобы точка a звена IV оставалась на постоянном расстоянии от двух точек

c и *b* звена *A* (фиг. 73). Стержни эти вводим последовательно один за другим. Допустим, что первым был введен стержень *ac*; введение его превратит систему с двумя степенями свободы в механизм, если только он не является осуществлением связи, вытекающей из остальных, которым эта система была подчинена. Последнее обстоятельство возможно лишь в том случае, если при всех возможных движениях системы с двумя степенями свободы либо точка *a*, либо точка *c* были мгновенным центром в относительном движении звеньев *A* и *IV*. В таком случае одна из этих точек — особенная и ее можно заменить другой, не обладающей указанным свойством. Если бы нашлась хотя бы одна вторая точка, тем же свойством обладающая, то это означало бы, что при движении системы с двумя степенями свободы, звенья *A* и *IV* двигаются, как одно твердое звено. В таком случае можно их накрепко между собой связать, нисколько не стесняя движения системы с двумя степенями свободы.



Фиг. 73.



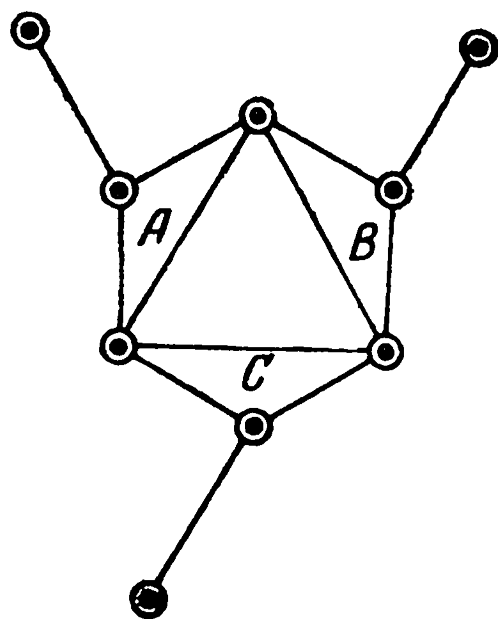
Фиг. 74.

Так образовалась бы отличная от первой по структуре, но способная совершать тождественные с первой движения вторая система с двумя степенями свободы (фиг. 74). Устраняем в последней две связи, выкидывая поводок *3* и звено *III*; оставшуюся систему сопоставим с первоначально данной нам жесткой, статически определимой системой (фиг. 72), в которой

звенья *A* и *B* еще не лишены поводков. Она отличается от последней тем, что поводок звена *A* заменен другим поводком *4*, прикрепленным к тому же звену, так как звено *IV* слито в одно жесткое целое со звеном *A*, что присоединена цепь одноповодковых звеньев применительно к нашему чертежу, состоящая только всего из двух звеньев *I* и *II*, что, наконец, в полученном, вследствие указанных преобразований, жестком, статически определимом, в общем случае, соединении с основой удален еще поводок звена *B*, в силу чего результат всех этих манипуляций представляет собой систему с одной степенью свободы. С другой стороны, последняя получена из системы с двумя степенями свободы удалением двух связей. Последнее обстоятельство обнаруживает несостоятельность исходного предположения, что в первой системе с двумя степенями свободы, в общем случае, звенья *A* и *IV* движутся, как одно жесткое звено. Если и это предположение отпадает, то остается только заключить, что введение стержня *ac* превращает указанную систему с двумя степенями свободы в механизм.

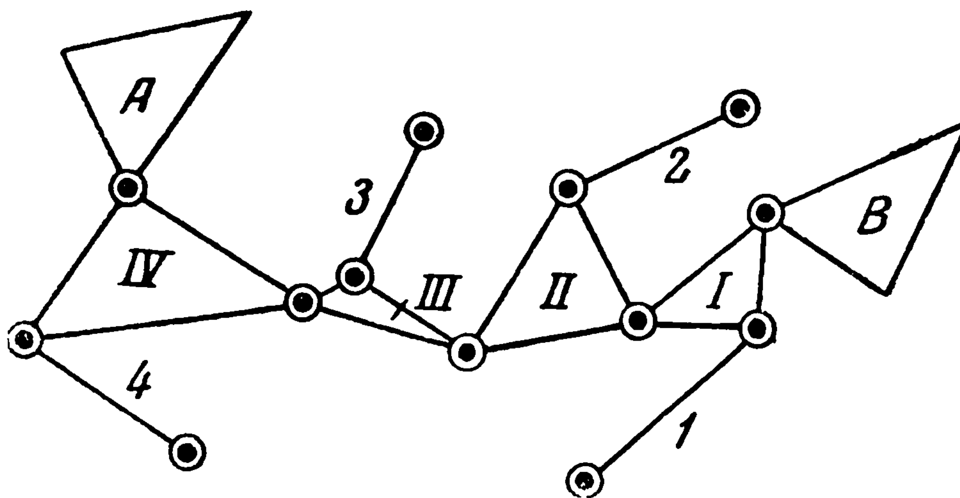
Наше доказательство содержит предположение, что число вставляемых между звеньями *A* и *B* одноповодковых звеньев не меньше двух (требуется присутствие звеньев *III* и *IV*). Если вставляется только одно звено *IV*, то доказательство видоизменяется таким образом, что вместо удаления звена *III* и поводка *3*, в этом случае не существующих, разъединяется шарнир, непосредственно связывающий звенья *IV* и *B*. Доказательство неприменимо, когда число звеньев одноповодковой цепи должно равняться нулю, т. е. стержень *ac* должен непосредственно связать звенья *A* и *B*. Здесь окажется существенным случай, что в системе с двумя степенями свободы звенья *A* и *B* образуют одно жесткое соединение и двигаются, как одно жесткое звено. Весьма простой случай подобного рода изображен на фиг. 75; удалив здесь поводки звеньев *A* и *B*, замечаем, что в полученной системе с двумя степенями свободы звенья *A* и *B* двигаются, как одно жесткое целое; введением между ними соединительного стержня механизма не получим.

Переходим теперь ко введению второго стержня *ab*. По соображениям, тождественным тем, которые приведены выше, придем к заключению, что введение этого стержня не окажется, в общем случае, связью, вытекающей из остальных, которым подчинен механизм, образованный введением стержня *ac*, если только в этом механизме звенья *A* и *IV* не двигаются, как одно жесткое целое. Покажем, что последнее предположение приводит к противоречиям.



Фиг. 75

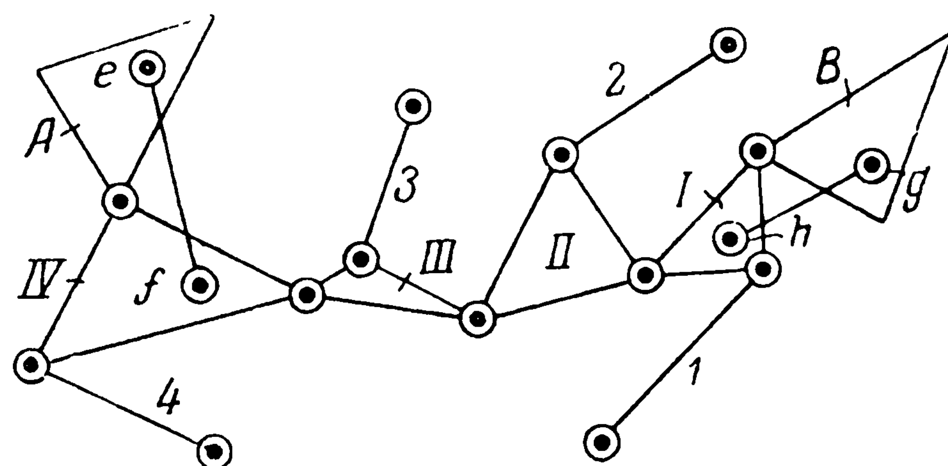
Сделав указанное допущение, скажем, что присутствие стержня *ab* ничем не стеснит движения механизма, полученного введением стержня *ac*; другими словами, что система (фиг. 76) будет механизмом в общем случае, причем в механизме такой структуры звенья *A* и *IV* движутся, как одно неизменяемое целое. Механизм этот получен из жесткой системы (на фиг. 72 без цепей *I*, *II*, *III*, *IV*) присоединением к звену *B* цепи пристегнутых к основе одноповодковых звеньев, опусканием поводков звеньев *A* и *B* и последующим устройством шарнира между конечным звеном этой цепи и звеном *A*. Но, очевидно, тот же механизм мог быть образован, если переменить роли звеньев *A* и *B*; тогда, по тем же причинам, звенья *B* и должны двигаться как одно жесткое целое. Соединяя поэтому звенья *A* и *IV* в одно жесткое целое введением стержня *ef*, а звенья *B* и *I* — введением стержня *gh*, мы нисколько не нарушим движения механизма и приходим к заключению, что система такой структуры



Фиг. 76.

(фиг. 77) представляет собой, в общем случае, механизм. Устраняем в этом механизме две связи, удаляя стержни *2* и *II*.

В результате получится заведомо жесткая система, отличающаяся от первоначально данной тем, что в ней поводки звеньев *A* и *B* заменены другими поводками *1* и *4*, прикрепленными к тем же звеньям, а к звену *A* шарнирно присоединена цепь одноповодковых пристегнутых к основе звеньев, состоящая в случае нашего чертежа только из одного звена *III*.



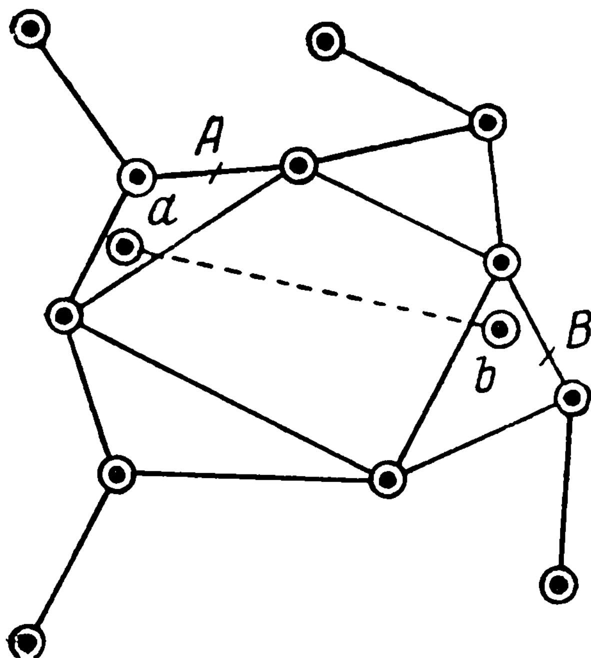
Фиг. 77.

Итак, мы пришли к противоречивому выводу, что устранением двух связей в системе с одной степенью свободы последняя может быть превращена в неизменяемую. Отсюда заключаем, что наше предположение, будто в механизме, полученном из системы с двумя степенями свободы введением первого стержня *ac*, звенья *A* и *IV* двигаются, как одно неизменяемое целое, не соответствует действительности. Если это так, то введение второго стержня *ab*, в общем случае, не является осуществлением связи, вытекающей из остальных. Тем самым доказано, что введение цепи одноповодковых звеньев между лишенными своих поводков одноповодковыми звеньями *A* и *B* дает, в общем случае, начало жесткой, статически определимой системе.

Последнее наше доказательство предполагает, что между непосредственно примыкающими к звеньям *A* и *B* звеньями *I* и *IV* существует, по крайней мере, одно одноповодковое звено, т. е., что соединительная цепь одноповодковых состоит, по крайней мере, из трех звеньев. Легко распространить его на тот случай, когда цепь состоит из двух звеньев, оно изменится только в том отношении, что вместо устранения поводка *2*

и звена *II* придется разъединить шарнир между звеньями *I* и *IV*.

Введение одного одноповодкового звена между звеньями *A* и *B* (см. фиг. 72) требует отдельного рассмотрения. Допустим, что это будет звено *C* (см. фиг. 70). Здесь существенным окажется случай, когда звенья *A* и *B* в системе с двумя степенями свободы двигаются, как одно жесткое целое, как в случае фиг. 75. Тогда введение звена *C*, пока без поводка, не лишит системы одной степени свободы, а введение затем поводка *de* не даст начала жесткой системе. Итак, здесь возможно исключение; цепь может не оказаться нормальной, несмотря на удовлетворение геометрических и числовых признаков.



Фиг. 78.

Что касается соединения звеньев *A* и *B* в замок, то оно тоже не даст жесткого соединения в этом случае, когда уже введение одного стержня между ними является осуществлением связи, вытекающей из остальных, т. е. когда в системе с двумя степенями свободы, полученной удалением поводков звеньев *A* и *B* в жестком соединении с основой, последние двигаются, как одно неизменяемое целое; в этом мы убедились уже немного выше. Но тут представляется еще возможным и второй случай, когда эти звенья двигаются, как неизменяемое целое, в механизме, полученном из системы с двумя степенями свободы введением одного стержня *ac*, соединяющего две точки звеньев *A* и *B*.

Подобного рода весьма простой случай представлен на фиг. 78, где удаление поводков звеньев *A* и *B* и устройство между ними шарнира не даст начала жесткому соединению с основой. Нетрудно убедиться, что соединяя, тоже при отброшенных поводках, те же звенья одним стержнем, получим систему с одной степенью свободы, в которой звенья *A* и *B* двигаются, как одно

неизменяемое целое; вот почему, соединяя эти звенья в замок, мы не получим жесткой системы. Итак, в этом случае тоже возможно исключение.

Мы пришли к весьма важному заключению, что, несмотря на удовлетворение всех геометрических и числовых признаков, цепи четвертого класса, содержащие замковые соединения, а также внутренние соединительные цепи в виде одного только звена, не всегда могут быть отнесены к нормальному типу.

При этом жесткость соединения с основой такой цепи оказывается нарушенной, как наглядно показывают примеры (фиг. 75 и 78), не в силу каких-либо метрических соотношений, и потому есть основание ожидать, что здесь пред нами особый случай, связанный со структурой цепи.

Этот вывод показывает, насколько важно подробно рассмотреть всякий раз вопрос о том, может ли данное образование быть отнесено к цепям нормальных типов, несмотря на некоторую кропотливость и кажущуюся неблагодарность таких исследований, как изложенные здесь и на стр. 105—115.

В то же время мы знаем признак, который, по крайней мере теоретически, позволяет нам отличить, можно ли цепь, в которой встречаются однозвенные диагональные цепи и замковые соединения, отнести к нормальному типу цепей четвертого класса, если она удовлетворяет указанным выше признакам, оказавшимся не совсем достаточными, или же нельзя. Нужно каждую однозвенную диагональную цепь по очереди отбросить и посмотреть, не будут ли в полученной системе с двумя степенями свободы соединяемые ею звенья двигаться, как одно неизменяемое целое. Затем нужно разъединять, тоже по очереди, каждый замковый шарнир и проделать ту же пробу для системы с двумя степенями свободы. Наконец, нужно еще заменить замковое соединение между парою звеньев соединительным стержнем и убедиться, что и в этом механизме оба звена не будут двигаться, как одно неизменяемое целое. Только в том случае, если результат всех этих манипуляций будет отрицательным, мы можем утверждать, что изучаемая цепь будет

образовывать в соединении с основой жесткое соединение; в противном случае она нормальной цепью наверно не будет.

Однако указанный здесь признак не имеет значения для достижения той цели, которую мы преследуем. Цель эта состоит в том, чтобы обосновать теорию стержневых механизмов, изучение движения отдельных составляющих их звеньев на свойствах нормальных цепей. Если же для определения, будет ли данная цепь нормальной или нет, мы, в свою очередь, должны обосновываться на изучении движения механизмов и даже систем с двумя степенями свобод, то получится круг, из которого нет выхода. Поэтому важно исследовать, нельзя ли найти какие-нибудь дополнительные структурные признаки, которые вместе с раньше указанными будут достаточны, чтобы решить вопрос о том, будет ли данная цепь четвертого класса, содержащая замковые соединения и однозвенные диагональные цепи, нормальной, или нет.

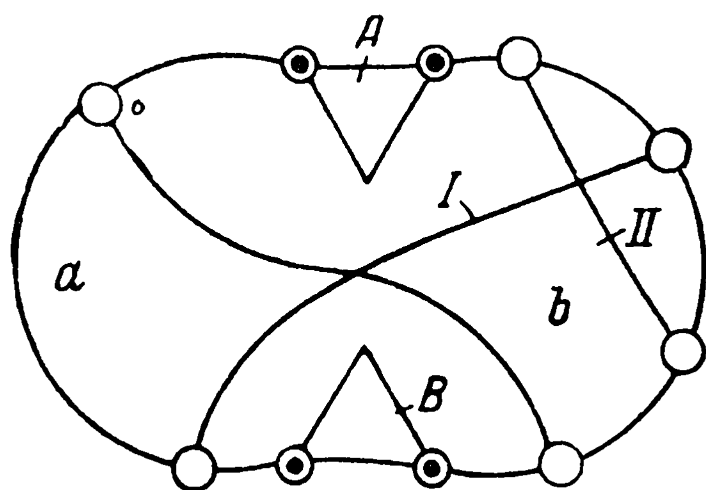
Допустим, что такая цепь нам дана. Преобразуем ее на основании положения III в заведомо нормальную цепь, заменив каждое замковое соединение, каждую однозвенную диагональную цепь двухзвенными диагональными цепями. Полученную заведомо нормальную цепь четвертого класса для краткости будем называть первым преобразованием. В этом первом преобразовании останавливаемся на двухзвенной диагональной цепи, заменившей однозвенную первоначального образования, допуская, что ею соединяются звенья A и B.

Согласно доказанному, обратная замена этой двухзвенной цепи однозвенной будет возможна только в том случае, когда, выбросив вовсе эту диагональную цепь, мы получим систему с двумя степенями свободы, в которой звенья A и B не движутся как одно целое (фиг. 79a).

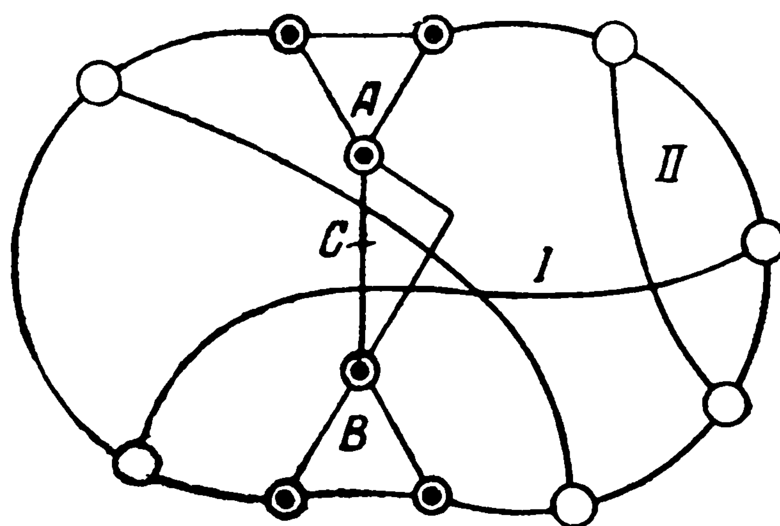
При этом обратим внимание на то, что в случае, когда первоначальное образование содержало менее трех поводков, исследование будет совершенно излишним, так как цепь с числом поводков менее трех заведомо к нормальным цепям отнесена быть не может. В силу положения II цепи с одной парой бесповод-

ковых исследованию не подлежат; поэтому наименьшее число бесповодковых будет четыре, и, кроме рассматриваемой диагональной цепи, между звеньями A и B должна быть, по меньшей мере, еще одна.

На фиг. 79а показана система с двумя степенями свободы, полученная опусканием одной диагональной цепи в первом преобразовании, если предположить первоначальную цепь с восемью бесповодковыми. Если здесь звенья A и B движутся



Фиг. 79а.

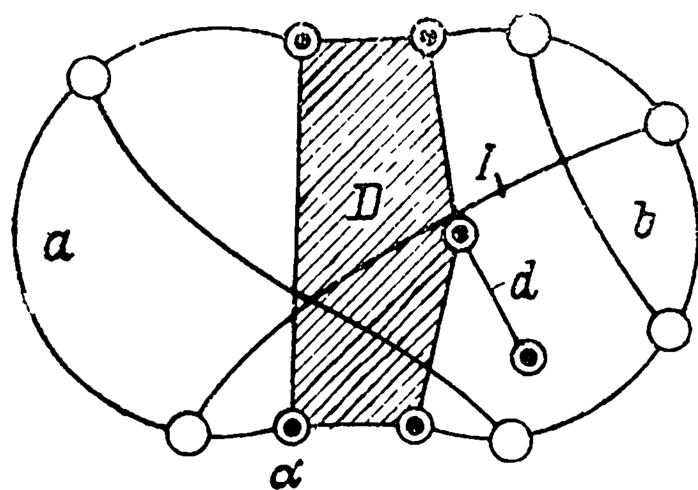


Фиг. 79б.

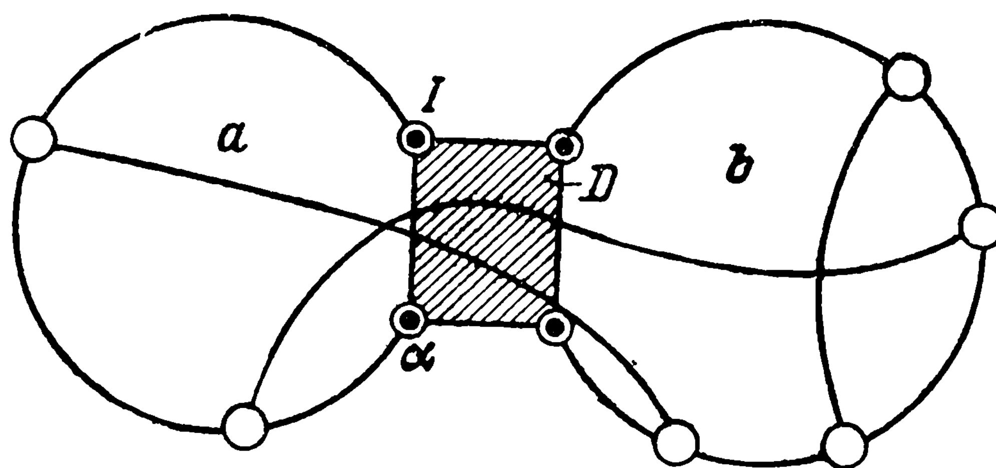
как одно целое, то введение между ними соединительного стержня C явится осуществлением связи, вытекающей из остальных, и фиг. 79б тоже изображает систему с двумя степенями свободы, причем в ней звенья A, B и C движутся как одно неизменяемое целое; снабжая поэтому звено C поводком и сливая в одно звено D все три движущихся как одно целое звена, мы получим механизм (фиг. 80а). Исключением может быть только тот случай, когда в означенной системе с двумя степенями свобод (см. фиг. 79а) звенья A и B — неподвижны; тогда фиг. 80а будет системой с двумя степенями свобод.

Рассмотрим одновременно с нашим образованием (фиг. 80а) другое образование. Мы замечаем в первом из них два замкнутых контура a и b с общим звеном D. Образуем нормальную цепь третьего класса из одноповодковых звеньев, содержащую столько последних, сколько содержит замкнутый контур b, включая и звено D (фиг. 81а); присоединяем к заведомо жесткому

соединению полученной цепи с основой цепь одноповодковых звеньев, прикрепляя ее шарнирно к звену D; число последних выбираем равным числу звеньев контура a, за выключением звена D. В соединении с основой это тоже будет заведомо жесткое, статически определимое соединение, так как присоединение цепи одноповодковых есть не что иное, как многократное присоединение двухповодковой группы; последнее звено E этой цепи с его поводком изображено явно (см. фиг. 81а). В полученном теперь образовании начнем вводить между теми же звеньями, как на фиг. 80а, соединительные цепи одноповодковых, причем соединяемые звенья превращаются, конечно, в бесповодковые.



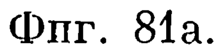
Фиг. 80а.



Фиг. 80б.

Легко показать, что вновь получаемое образование (см. фиг. 83а) в соединении с основой будет жестким; для этого стоит только повторить все те рассуждения (см. фиг. 72—77), которые привели нас к заключению, что цепь четвертого класса, в которой все диагональные цепи содержат не менее двух звеньев, образует с основой жесткое соединение. Вводить соединительные цепи однозвенные или замковые соединения нам не придется, так как их не было в первом преобразовании и на фиг. 80а, параллельно которой мы образуем фиг. 83а; поэтому никаких исключительных случаев не окажется.

Нетрудно видеть, что наше жесткое образование (см. фиг. 83а) можно получить также из фиг. 80а. Для этого нужно только разъединить в последней шарнир α. Но образование (см.


Фпг. 81а.


Фиг. 81б.

фиг. 80а) является не то механизмом, не то системой с двумя степенями свобод, и превращение его в систему жесткую и неподвижную, в силу устранения двух связей, никоим образом невозможно. Устранить полученное противоречие можно, только отказываясь от предположения, что в системе (см. фиг. 79а) звенья A и B двигаются как одно неизменяемое целое.


Фиг. 81в.

Итак, мы пришли к выводу, что при любом числе диагональных цепей одна из них может быть однозвенной. На первый взгляд это противоречит, как будто, примеру фиг. 75. Ведь здесь, по устранении поводков звеньев A и B, последние будут двигаться, как одно жесткое целое, а мы, повидимому, доказали, что этого быть не может. Дело в том, что если мы между звеньями A и B, устранив их поводки, вставим однозвенную цепь, то полученное образование будет иметь меньше трех поводков, именно, только два и то же самое будет тогда и в образовании фиг. 81а, которое в силу этого не будет уже жестким. Этот случай с самого начала был выключен нами из

рассмотрения, так как здесь достаточно сосчитать число поводков, чтобы убедиться в том, что цепь не может быть нормальной.

Тем не менее следует проверить, не ввели ли мы каких-либо иных неявных предположений, которые могут не всегда оправдаться. К неявным предположениям относится, например, то, что на фиг. 80а имеются два замкнутых контура a и b. Может оказаться, что звенья A и B (см. фиг. 79б) связаны непосредственно между собой обходным шарниром, так, что, например, контур a отсутствует. Легко заметить, однако, что это обстоятельство не повлияет на ход доказательства. Образование (см. фиг. 81а) превратится при этом только в простую цепь третьего класса; фигуры 80а и 83а окажутся тождественными, но на одной из них должна быть показана жесткая система, на другой — механизм.

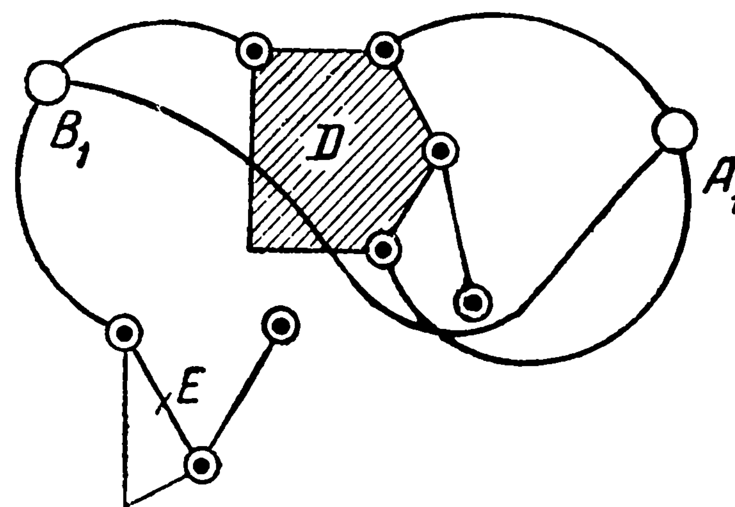
Вообще, пока фиг. 80а представляет собой механизм, а фиг. 81а — систему жесткую, наше доказательство останется в силе. Первое из этих условий всегда выполнено, пока первое преобразование образует жесткое соединение с основой, т. е. будет обладать более, чем двумя поводками; это будет иметь место всегда, если подлежащая исследованию цепь имеет не меньше трех поводков.

Второе условие будет выполнено, пока в образовании (см. фиг. 81а) число поводков не будет менее трех. Исключение возможно, следовательно, только тогда, когда цепь одноповодковых звеньев IE исчезнет, а в оставшемся замкнутом контуре, кроме звена D, останется только одно звено; но тогда звенья A и B связаны в данной цепи обходным шарниром непосредственно между собой и, кроме того, одним, и притом последним, звеном обходного контура смыкаются в жесткий треугольник. Итак, исключение представляет только случай фиг. 75, куда однозвенную диагональную цепь ввести нельзя.

Дальнейшее наше исследование поведем, исходя из второго преобразования, которое будет отличаться от первого тем, что в нем имеется одна однозвенная диагональная цепь.

Которая из диагональных цепей будет однозвенной, нам

безразлично; поэтому, чтобы не делать новых чертежей, допустим, что фиг. 79а представляет собой второе преобразование, в котором цепь *I* является однозвенной, а между звеньями *A* и *B* находится двухзвенная цепь, которую надлежит превратить в однозвенную. Теми же рассуждениями, как и в предыдущем случае, придем к выводу, что образование (см. фиг. 80а) будет механизмом.



Фиг. 82.

Затруднение, однако, встретит образование в параллель ему жесткой системы (см. фиг. 83а). Никакого затруднения не было бы, если вместо цепи *I* взять цепь *II*, соединяющую два звена замкнутого контура *l*; тогда введение такой цепи превратило бы лежащую в основе фиг. 81а цепь третьего класса в цепь четвертого класса с одной однозвенной диагональной цепью, по введении которой образование осталось бы жестким. Введение остальных многозвенных диагоналей уже предусмотрено раньше и не вызывает сомнений. Но цепь *I* должна соединить на фиг. 81а звено замкнутого контура с звеном концевой цепи одноповодковых, и получится ли при этом всегда жесткое соединение, остается еще под вопросом.

Допустим, что соединяемые первой однозвенной диагональю будут звенья A_1 и B_1 (фиг. 82). В силу доказательства (см. фиг. 72—77), и к этому случаю применимого, сомнение возникает только, если по удалении соединяющего эти звенья одноповодкового звена в полученной системе с двумя степенями свободы звенья A_1 и B_1 будут двигаться как одно целое. Легко убедиться, что этого не будет.

Устранив диагональную цепь A_1B_1, мы не изменим числа степеней свобод полученной в результате системы и характера возможных движений остальных звеньев, если отбросим ряд двухповодковых групп, образующих концевую цепь однозвенных, примыкающую к звену B_1.

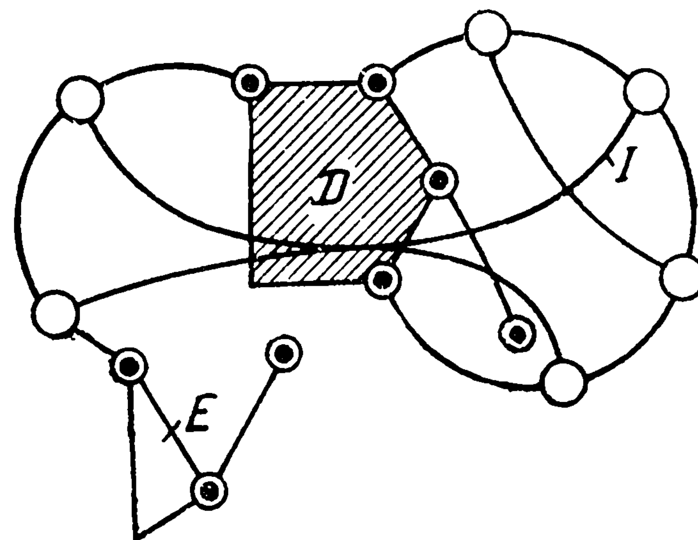
Если устраним затем еще звено B_1, то получим механизм, так как снабжая его звено A_1 поводком, образуем из него заведомо жесткое соединение с основой, отличающееся от показанного на фиг. 81а только меньшим числом звеньев концевой цепи однозвенных. В этом механизме звено A_1 совершает вполне определенное движение, равным образом и то звено, к которому раньше примыкало звено B_1. Но если теперь присоединить последнее звено, то, будучи одношарнирным, оно может совершать относительно своего шарнира какое угодно вращательное движение, совершать либо полный оборот, либо совершать движения колебательного характера и притом, при данной скорости движения точек звена A_1, звено B_1 может вращаться с какой угодно скоростью. Говорить поэтому, что в полученной системе с двумя степенями свободы звенья A_1 и B_1 совершают движения тождественные, не приходится.

Руководствуясь точно такими соображениями, можно доказать, что из образования (см. фиг. 81а) введением какого угодно числа однозвенных цепей между звеньями основного контура и концевой цепи, сопровождаемым, конечно, отбрасыванием поводков соединяемых звеньев, получится в связи с основой, система жесткая, статически определимая. Нужно только при доказательстве вводить эти цепи в таком порядке, чтобы начинать с цепи, примыкающей в концевом образовании к звену, наиболее близкому к шарниру I. Если допустим, что для n цепей положение наше справедливо и будем рассматривать цепь A_1B_1, как $n+1$-ую, то все наше доказательство останется в силе, лишь бы между звеном E и звеном B_1 не оказалось бесповодковых звеньев. Не забегая, однако, вперед, из жесткого образования (фиг. 82а) с одной однозвенной цепью A_1B_1 введением остальных соединительных цепей (предполагая, что ни одна из них не будет однозвенной) образуем жесткое соединение (фиг. 83а). Сопоставляя его с механизмом (фиг. 80а), убеждаемся, что звенья A и B, как одно жесткое целое, не движутся.

Итак, цепь четвертого класса, теперь уже с двумя однозвенными диагоналями, относится к цепям нормальным, все при

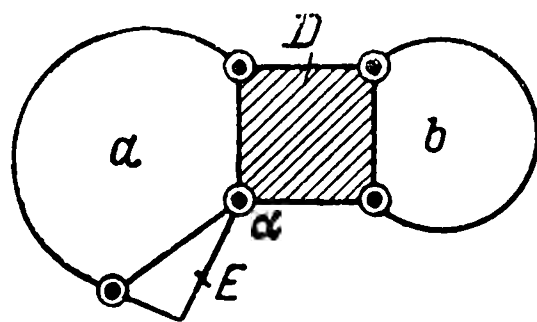
той же оговорке, что число поводков цепи должно быть меньше трех.

Докажем теперь наше положение для какого угодно числа диагональных цепей. Предположим, что оно справедливо для n и меньшего количества однозвенных диагональных цепей, покажем, что оно будет справедливо и для случая $(n+1)$-ой такой цепи.



Фиг. 83а.

Допускаем, что мы образуем (фиг. 79а) в жестком, статически определимом соединении с основой $(n+1)$-ую однозвенную диагональную цепь, которая должна соединить между собою звенья A и B. Приходим теми же рассуждениями, как и раньше, к выводу, что образование (см. фиг. 80а) есть либо механизм, либо система с двумя степенями свободы. Вместо фиг. 81а берем, в силу предыдущего, образование, заведомо дающее с основой жесткое соединение, в котором введены все n однозвенные соединительные цепи.



Фиг. 83б.

Если часть последних будет проходить между звеньями замкнутого контура, то это число меньше n и тогда наличие их, по предположению жесткости соединения с основой, этого контура не нарушают. Введение же остальных однозвенных цепей между звеньями замкнутого контура и звеньями концевой цепи может быть произведено, по доказанному, не нарушая жесткости. Вводя затем еще соединительные многозвенные цепи, чтобы получить образование (см. фиг. 83а), мы убедимся, что она представляет жесткое соединение с основой. Сопоставляя это соединение с образованием (см. фиг. 80а), убеждаемся, что и в этом случае предположение, что звенья A и B движутся, как одно жесткое целое, несостоятельно, что, не нарушая

нормального типа цепи четвертого класса, можно и $(n+1)$-ую диагональную цепь заменить однозвенной. Таким образом, приходим к следующему выводу.

Положение IV. Сложная замкнутая цепь основного типа четвертого класса, не содержащая замковых соединений, всегда образует с основой жесткое, статически определимое соединение, если число ее поводков не менее трех.

Начав с первого преобразования данной цепи четвертого класса, отличавшегося от последней тем, что все замковые соединения и все однозвенные диагонали были заменены двухзвенными диагональными цепями, мы пришли к некоторому образованию, которое оказалось нормальной цепью четвертого класса и отличается от данной только тем, что в ней на место замковых соединений введены однозвенные диагонали. Начнем теперь наш счет сначала и назовем это последнее образование с однозвенными диагоналями первым преобразованием данной цепи, имея в виду, что в последней заменены только замковые соединения и, притом, однозвенными диагоналями.

Конечно, опять предполагаем, что данная цепь имела не менее трех поводков; тогда первое преобразование будет их иметь, во всяком случае, больше и будет непременно с основой давать жесткое, статически определимое соединение. Из первого преобразования получим второе, смыкая в замок одну только пару звеньев, образующих в данной цепи замковое соединение; для этого необходимо выкинуть предварительно соединяющее их одноповодковое звено первого преобразования. Проверку, не будут ли соединяемые в замок звенья двигаться после этого в системе с двумя степенями свободы, как одно неизменяемое целое, делать не придется, так как такое предположение противоречило бы жесткости соединения с основой первого преобразования, которое представляет собой цепь нормального типа. Нужно будет только проверить, не будут ли звенья A и B, которые требуется соединить в замок, двигаться, как одно жесткое целое в механизме, который образуется соединением

их стержнем; последним может служить звено C соединяющей их однозвенной диагонали, если его лишить поводка (см. фиг. 79б).

Итак, отбрасываем в первом преобразовании только поводок звена C и посмотрим, не будут ли теперь звенья A и B двигаться как одно жесткое целое. Заметим, что по отбрасывании поводка в первом преобразовании мы получили механизм. Схематически, с выделением звеньев A, B и C, такой механизм, при первоначальной цепи с восемью бесповодковыми, изображен на фиг. 79б. Так как звенья A и B движутся как одно неизменяемое целое, то неизменяемое целое с ними образует и звено c; поэтому, если на место трех звеньев A, B и C поставим одно четырехшарнирное звено, то и это образование тоже будет механизмом (фиг. 80б).

В нем имеется два замкнутых контура a и b с общим звеном D; остальные звенья образуют внутренние соединительные цепи и содержат каждая не менее одного бесповодкового звена, как это было в механизме фиг. 79б.

Образуем теперь систему (см. фиг. 80б), исходя из других соображений. Возьмем цепь, полученную из совокупности звена D и звеньев контура b, причем каждое из этих звеньев теперь снабжено поводком; поводок звена D назовем d (см. фиг. 81б). Полученная цепь дает с основой несомненно жесткое, статически определимое соединение, как простая замкнутая цепь первого основного типа. К этой цепи пристегнем простую цепь из стольких одноповодковых звеньев, сколько их содержит замкнутый контур a, за исключением звена D; последнее из этих звеньев и его поводок обозначены E и e. Получится опять заведомо жесткое соединение с основой (на фиг. 81б без пунктиров).

Удаляем теперь поводки звеньев D и E и смыкаем их шарниром α. Чтобы убедиться в жесткости вновь полученного соединения, придется дословно повторить все рассуждения, которые приводились при доказательстве положения III, с тою разницей, что там исходили из предположения, что цепь с n

бесповодковыми образовала с основой жесткое соединение. а здесь исходная цепь (см. фиг. 81б, без шарнира α) заведомо образует с основой жесткое соединение.

Итак, надо, во-первых, рассмотреть, не движутся ли звенья D и E по удалении их поводков как одно целое. Легко убедиться, что этого не будет.

С этой целью удаляем сначала поводок d и рассмотрим движение полученного механизма. Заметим, что в этом механизме движение звена D совершенно не зависит от расположения, присутствия или отсутствия всей цепи одноповодковых звеньев, начинающейся шарниром I и кончающейся звеном E. В самом деле, отбросив эту цепь, мы в остатке получим механизм, образованный из простой замкнутой цепи первого основного типа отбрасыванием поводка звена D. Итак, направление скорости движения любой точки звена D, в том числе и точки, совмещающейся с β, не зависит вовсе от направления поводка e. Направление же скорости точки β звена E перпендикулярно к направлению поводка; последний может быть всегда расположен так, что обе совмещающиеся точки β звеньев D и E имели бы разное направление скорости. Поэтому, в общем случае, т.е. независимо от метрических соотношений, нельзя допустить, что звенья D и E движутся как одно целое в механизме, в котором имеется еще налицо поводок e. Но если совокупность всех связей, которым этот механизм подчинен, не содержит в себе, как следствие, связей, выражающих, что оба звена D и E движутся как одно целое, то по устранении одной из связей — поводка e — из остальных связей, конечно, этого следовать тоже не будет. Предположение, что звенья D и E по устранении их поводков (см. фиг. 81б, без пунктиров) будут двигаться как одно целое, таким образом, несостоятельно.

Но смыкание шарнира α еще в том случае не даст жесткого соединения, если, заместив его соединительным стержнем $\gamma\,\xi$ между какими-либо двумя точками звеньев D и E, получим механизм, в котором последние движутся как одно неизменяемое целое. Покажем, что и это предположение несостоятельно.

Допустив такое предположение, заметим, что в механизме (см. фиг. 81б) без шарнира α и без поводков e и d стержень $\xi\gamma$ движется как одно целое с названными выше звеньями. Тогда центром вращения звена D в движении относительно примыкающего к нему в шарнире II звена E будет служить именно этот шарнир. Но мгновенный центр относительного вращения этого последнего звена и звена D определяется совершенно независимо от присутствия звена E и стержня $\xi\gamma$, которые как звенья двухшарнирные и бесповодковые образуют в совокупности двухповодковую группу; отделяя ее, мы получим механизм с меньшим числом звеньев. Следовательно, один шарнир двухповодковой группы, именно шарнир II, был устроен в особой точке.

Можно получить механизм точно такой же структуры, присоединяя звено E шарниром к любой другой точке того же звена и тогда звенья D и E заведомо как одно целое, двигаться не будут. Этот последний случай и будет общим; предположение же, что звенья D и E будут двигаться как одно целое, будет осуществляться лишь в одном из тех особых случаев, которые мы пока не рассматриваем, так как они не связаны со структурой цепей, а с определенными метрическими соотношениями.

Остается только заключить, что, замыкая шарнир α, мы получим жесткое, статически определимое (образовано из такого же соединения заменой двух связей двумя другими, не являющимися следствиями остальных) соединение, тип которого показан на фиг. 83б.

Преобразуем эту систему дальше, образуя бесповодковые звенья и вставляя соединительные цепи, согласуясь при этом с механизмом (фиг. 80б). Вводя каждую соединительную цепь, мы с помощью рассуждений, примененных при доказательстве положений III и IV, докажем, что полученное соединение опять будет жестким и статически определимым, причем никаких особых исследований уже делать не придется, так как нигде два бесповодковых не смыкаются шарниром, а только

соединительными цепями, содержащими каждая не менее одного звена. Так, получим жесткое соединение, которое отличается от механизма (см. фиг. 80б) тем, что в последнем звено E — одноповодковое, а здесь — бесповодковое и, следовательно, из механизма (см. фиг. 80б) может образоваться жесткая система (см. фиг. 83б) устранением одной связи. Отсюда ясно, что исходное предположение наше, будто соединенные стержнем C (см. фиг. 79б) звенья A и B движутся, как неизменяемое целое, несостоятельно.

Наше доказательство заключает в себе предположение, что между звеньями D и E имеется хотя бы одно промежуточное (см. фиг. 81б). Таким образом, не предусмотрен случай, когда между звеньями A и B, которые предполагается соединить в замок (см. фиг. 79б), находится только одно звено E. В этом случае легко заметить из соображений иного рода, что по введении замкового шарнира получится жесткое соединение с основой. Именно, по введении замкового шарнира, три звена A, B и E образуют жесткую трехцветную замкнутую цепь, могут поэтому рассматриваться, как одно звено, и притом снабженное поводком, если последний имеется у звена E. Если же звено E — бесповодковое, то это новое составное звено тоже будет бесповодковым. Нетрудно видеть, что, поставив в образование (см. фиг. 79б) на место звеньев A, B, C и всей левой петли одноповодковое или бесповодковое звено (к последнему, конечно, должна примыкать одна из многозвенных диагональных цепей), мы получим основного типа цепь четвертого класса с диагональными цепями, содержащими не менее одного звена.

Итак, мы пришли к выводу, что при любом количестве диагональных цепей одну из них можно заменить замковым соединением звеньев, не нарушая жесткости соединения с основой нормальной цепи четвертого класса. На первый взгляд это противоречит примеру (см. фиг. 78).

Там, по устранении поводков звеньев A и B и по введении соединительного стержня ab между ними, эти звенья будут дви-

гаться, в общем случае, как одно неизменяемое целое и потому в замковое соединение их сомкнуть нельзя. Но дело в том, что если мы их и соединили бы в замок, то получилась бы цепь только с двумя поводками, между тем как нашему исследованию подлежали только цепи, имеющие не меньше трех поводков.

Но, как и в предыдущем доказательстве, когда мы заменяли одну из двухзвенных диагональных цепей однозвенной, необходимо проверить, не ввели ли мы еще каких-либо неявных предположений в наше доказательство. Опять-таки возможно, что звенья A и B будут смежными обходными, т. е. что петля a (см. фиг. 80б и 83б) будет отсутствовать. Тогда, действительно, между двумя образованиями (см. фиг. 80б и фиг. 83б) не будет того противоречия, на котором мы построили свое доказательство: первое будет механизмом, который образован из соединения с основой основного типа цепи четвертого класса опусканием поводка одного из звеньев, второе — механизмом, полученным тем же приемом из нормальной цепи нулевого разряда третьего класса.

Однако этот случай относится к тем, которые могли быть усмотрены заранее и исключены из рассмотрения. Устраивая замковые соединения, мы и не предполагали соединять в замок два звена и без того связанные шарниром: соединение двумя шарнирами двух звеньев само по себе есть соединение статически неопределимое. Если второй из этих шарниров устранить то жесткой системы не получится.

Вообще, пока одно из сравниваемых в нашем доказательстве образований (см. фиг. 80б) остается механизмом, а это по ходу доказательства всегда получится, а другое (см. фиг. 83б) окажется системой жесткой, наши заключения не пострадают. Но второе из этих условий требует, чтобы обе петли были налицо, и чтобы одна из них содержала не менее двух одноповодковых звеньев, если вторая содержит лишь одно, так как иначе число поводков окажется в образовании (см. фиг. 83б) меньше трех.

Совершенно очевидно, что число поводков окажется всегда достаточным в образовании (см. фиг. 83б), если оно было достаточным в начальном образовании или на фиг. 79б.

Итак, исключением является только случай, когда в первом преобразовании число поводков меньше четырех, т. е. в начальном данном их меньше трех, или если в замок соединяются два соединенных и без того шарниром звена. Мы убедимся, что это исключение и останется единственным для цепи с n замковыми соединениями.

Дальнейшее исследование поведем, исходя из второго преобразования, которое будет отличаться от первого тем, что в нем имеется одно замковое соединение. Какая пара звеньев будет соединена в замок, нам безразлично. Поэтому, чтобы иметь возможность ссылаться отчасти на те же чертежи, допустим, что на фиг. 79б, в замок собираются соединить звенья A и B второго преобразования. Этим мы хотим сказать, что одну из внутренних соединительных цепей нужно изобразить пунктиром, предполагая, что она заменена уже замковым соединением. Допустим, что это будет цепь I (см. фиг. 79б). Теми же рассуждениями, как и в предыдущем случае, мы придем к выводу, что образование (см. фиг. 80б) будет механизмом.

Некоторые затруднения встретятся однако при образовании в параллель ему жесткой системы, которая будет играть роль системы фиг. 83б. Это затруднение было бы в значительной мере устранено, если бы вместо цепи I заменить замковым соединением цепь II (см. фиг. 79б), которая соединяет между собою два звена петли b. Такое замковое соединение, как единственное, можно ввести теперь уже без всяких сомнений в образование (см. фиг. 81б), где оно будет единственным, преобразуя нормальную замкнутую цепь третьего класса в такую же четвертого.

Мы убедились уже, что в образование (см. фиг. 81а) можно было, соблюдая известную последовательность, ввести сколько угодно однозвенных соединительных цепей. Это образование тождественно, однако, с нашей фиг. 81б, если в последней от-

влечься от пунктиров. Теперь мы в это же образование будем вводить в том же порядке не только однозвенные соединительные цепи, но и единственное, существующее во втором преобразовании замковое соединение, которое должно связать между собою звенья A_1 и B_1 (см. фиг. 82а) образования, отличающегося от фиг. 81а тем, что уже может оказаться введенным ряд однозвенных цепей. Вопрос о том, могут ли звенья A_1 и B_1, лишенные своих поводков, двигаться, как одно неизменяемое целое в системе с двумя степенями свобод, уже решен отрицательно при введении между ними однозвенной соединительной цепи. Поэтому теперь надлежит рассмотреть, не будут ли они двигаться, как одно целое, в механизме, который получится соединением их стержнем, после того, конечно, как они лишены своих поводков. При этом, в силу условленного порядка введения соединений, между звеньями B_1 и E бесповодковых не окажется, и потому концевую цепь однозвенных, примыкающую к звену B_1, можно отбросить, не изменяя числа степеней свобод системы, т. е. получая в остатке опять механизм.

Такого рода механизм, в котором изображена только одна однозвенная соединительная цепь A_2B_2, представлен на фиг. 81в. Если в нем звенья A_1 и B_1 двигаются, как одно неизменяемое целое, то мгновенный центр звена A относительно звена, соединенного шарниром p со звеном B_1, должен находиться в этом именно шарнире. Но положение этого мгновенного центра не определяется вовсе присутствием звеньев B_1 и mn: последние могут быть отделены от нашего механизма, представляя собой двухповодковую группу, и в остатке окажется опять механизм. Если в последнем точка p была мгновенным центром в относительном движении концевого одноповодкового звена и звена A_1, то присоединение звена B_1 именно в этой, а не в какой-нибудь другой точке, есть один из тех особых случаев, от разбора которых мы пока отказываемся. В общем же случае шарнир не будет образован именно в указанном мгновенном центре, и потому, в общем случае, звенья A_1 и B_1, как одно целое, двигаться не будут.

Если желательно в жесткую систему (см. фиг. 81а) ввести больше одного замкового соединения, то, соблюдая лишь указанный порядок, можно вести доказательство от n к $(n+1)$-му замковому соединению. После этого остается еще ввести соединительные цепи, содержащие более одного звена, отбросить поводки звеньев D и E и образовать шарнир α, чтобы получить параллель к фиг. 80б.

В результате всего нашего исследования мы приходим, таким образом, к определенному выводу, что всякая цепь основного типа четвертого класса как с замковыми соединениями, так и без них, если в ней не имеется явных аномалий, т. е. если число поводков цепи более трех и если не встречается звеньев, соединенных более, чем одним шарниром между собой, будет нормальной цепью.

Таким образом, хотя наше первоначальное доказательство указало нам, что при наличии замковых соединений и однозвенных диагональных цепей могут оказаться налицо какие-то особые случаи, не зависящие от метрических соотношений, но дальнейшее исследование обнаружило, что цепь, подлежащую исключению из типа нормальных, можно узнать сразу. Аппарат нашего исследования оказался довольно громоздким и, быть может, ум, настроенный аналитически, найдет более простое и общее доказательство этого положения. Нам кажется мало вероятным, чтобы такое доказательство могло быть в скором времени дано, так как необходимо, чтобы оно улавливало и выделяло случаи структурных аномалий, а там, где дело идет о структуре стержневых систем, анализ, повидимому, до сих пор не находил способов уловить всевозможные особенности, как мы видели на примере приема Грюблера, связанного с решением в целых числах системы двух неопределенных уравнений.

Но если бы и удалось придумать со временем такое вполне общее аналитическое доказательство, которое избавляло бы нас от необходимости каждый раз, когда мы приступаем к исследованию предполагаемого нового типа нормальных цепей, исследовать действительно ли они всегда дают в связи с основой

жесткое соединение, или же сразу отделить те из них, которые такого соединения дать не могут, то все же есть основание в данный момент остановиться на предложенном нами чисто геометрическом исследовании вопроса. Оно показало нам, что над теми элементами, которые лежат в основе образования механизмов и которые до сих пор ускользали от наблюдателя, т. е. над нормальными многоповодковыми цепями, можно производить ряд действий. Действия эти носят, хотя и геометрический, но в то же время весьма своеобразный характер и, знакомясь с этими элементами, нужно, чтобы успешно владеть ими, научиться над ними оперировать. Строя наши доказательства на ряде таких операций, мы, во всяком случае, этой последней цели способствуем.

Убедившись в том, что простые замкнутые цепи основного типа (за исключением имеющих указанный дефект в структуре), вне всяких сомнений, образуют один из нормальных типов, переходим к исследованию жесткости соединения с основой цепей, полученных из них такой перестановкой внутренних соединительных цепей и замковых смыканий, при которой одноповодковые звенья остаются без перемен, но образуются многошарнирные и двухшарнирные бесповодковые. Мы уже указали (стр. 166) на числовой признак, присущий этим цепям; указали и недостатки определения их по этому признаку, который легко может ввести в заблуждение, и теперь должны отделить цепи, этому признаку удовлетворяющие и нормальные, от таких же цепей, но ненормальных.

В схематическом изображении цепи одноповодковых звеньев изображаются отрезками, бесповодковые звенья — кружками (узловые точки). Но мы помним, что шарнир, соединяющий два смежных бесповодковых, тоже идет в счет отрезков; поэтому при изучении схемы будем называть смежными два бесповодковых, между которыми имеется путь, состоящий только из одного отрезка. Руководствуясь этой терминологией, мы скажем, что нет надобности совершать поверку цепей, содержащих два и более смежных и притом двухшарнирных бесповодковых.

Если имеется только два смежных двухповодковых, то, как показывалось неоднократно при рассмотрении свойств простых замкнутых цепей, эти два звена с отрезком, между ними лежащим (хотя бы последний изображал и шарнир), отделяются от данного образования, не нарушая его жесткости или подвижности, так как образуют простую цепь первого класса, а затем отделяются два отрезка, примыкавшие каждый к одному из этих звеньев и к ближайшему бесповодковому, содержавшему больше двух шарниров, так как концевая цепь одноповодковых звеньев может рассматриваться, как наслоение двухповодковых групп. Поэтому мы придем к рассмотрению цепи с меньшим числом пар смежных бесповодковых звеньев и отрезков, которая тоже удовлетворяет числовому признаку, так как убавилось два бесповодковых звена и три отрезка. Повторяя этот прием, мы образуем, наконец, цепь, в которой не будет двух смежных бесповодковых, если каждый предыдущий остаток их содержал; если эта цепь может быть отнесена к нормальным, то и первоначальная цепь тоже будет такой; если же она образует с основой подвижное соединение, то тоже самое будет иметь место и для первоначальной цепи.

Если в цепи имеется более двух смежных шарнирных бесповодковых, то такая цепь, наверно, не образует с основой жесткого соединения и не должна поэтому причисляться к нормальным цепям. В самом деле, выделим простую цепь, состоящую из всех этих двухшарнирных бесповодковых и соединяющих их между собою отрезков. Эта цепь будет простой, открытой и была бы нормальной, если бы только два крайних звена ее были бесповодковыми. Присутствие же средних бесповодковых показывает, что она отличается от нормальной меньшим числом поводков. Поэтому, если даже остаток образует неизменяемое соединение с основой, то все образование, тем не менее, будет подвижно, так как такая цепь даже в соединении с основой дает начало изменяемому образованию.

Приступая к поверке жесткости соединения сложной цепи, содержащей только одноповодковые и бесповодковые звенья,

отметим, что всякая цепь, образованная из бесповодковых звеньев и соединяющих их цепей одноповодковых звеньев, образует с основой статически неопределимое соединение, если число последних превышает половину утроенного числа бесповодковых.

Говоря здесь о статической неопределимости, мы вовсе не будем рассматривать вопроса о жесткости или изменяемости соединения с основой; не будем также касаться вопроса о том, сколько осуществлено в рассматриваемом образовании связей, являющихся следствиями остальных. Мы хотим только доказать, что число всех осуществленных связей больше того наименьшего, которое необходимо, чтобы связать данную систему шарнирных точек в жесткое, статически определимое соединение. Поэтому мы имеем право при рассмотрении вопроса отбрасывать некоторое число связей, заменяя их таким же числом новых, если для подсчета числа всех связей это представляет удобства.

Допустим, что число бесповодковых звеньев будет p, число отрезков в цепи $3p/2+\alpha$, где α — положительное число. В первоначально данном образовании эти отрезки могли быть распределены как угодно, но мы можем их, не изменяя числа связей, которым подчинена система, перераспределить. Для этого разъединяем шарнир, соединяющий изображенную отрезком цепь одноповодковых с одним из бесповодковых, и образуем новый шарнир между тем же звеном цепи одноповодковых и каким-либо другим бесповодковым. Переместив, таким образом, один конец отрезка, можем тем же приемом переместить и другой. При таком перемещении отрезка ни число шарнирных точек, ни число осуществленных связей не меняется и потому подсчет, справедливый для преобразованной системы, будет справедлив и для первоначально данной.

Рассмотрим сначала случай, когда p — четное число и потому число α избыточных отрезков окажется целым. Раз мы вправе переносить отрезки, то всегда можем наше образование преобразовать так, чтобы получить другое, допускающее круговой обход бесповодковых. В этом обходе будет

участвовать p отрезков. Далее мы употребим $p/2$ отрезков на то, чтобы образовать цепь четвертого класса с трехшарнирными звеньями без аномалий, так что получится заведомо жесткое, статически определимое соединение с основой. Остается разместить еще α отрезков.

Присоединяем цепь, изображаемую каждым таким отрезком, пока только одним крайним звеном к одному из поводковых; полученная система будет опять жесткой, статически определимой, так как присоединение концевой цепи одноповодковых равносильно присоединению ряда двухповодковых групп. Чтобы ввести все отрезки и получить число шарнирных точек, равное тому, какое было в первоначально данной системе, остается только связать шарнирно каждое из α концевых звеньев с одним из бесповодковых. При этом, однако, в последней жесткой, статически определимой системе осуществляется 2α новых связей. Ясно, что в полученном образовании число последних будет именно на это число больше того, которое для жесткости необходимо, и положение наше доказано.

При нечетном p наше доказательство надо видоизменить; в этом случае α число — дробное и говорить об α концевых цепях одноповодковых звеньев не приходится. Прежде всего переставляем отрезки так, чтобы удовлетворить обходности. В одном из p отрезков, участвующих в обходе, устраиваем удалением одного поводка бесповодковое звено. Число бесповодковых будет, таким образом, $p+1$. Далее, размещаем $\left(\frac{p+1}{2}\right)$ отрезков так, чтобы образовалась цепь четвертого класса с трехшарнирными звеньями, образующая жесткое, статически определимое соединение с основой. Остаются неиспользованными $(\alpha-1/2)$ отрезков, которые присоединяем сначала, как в предыдущем случае, одним только концом, получая опять-таки жесткое, статически определимое соединение с основой. Чтобы восстановить как число шарнирных точек, так и число связей первоначальной системы, остается только шарнирно присоединить свободные концы этих цепей к бесповодковым, т. е. ввести $(2\alpha-1)$ связь и восстановить у одного

из бесповодковых отброшенный вначале поводок, что соответствует введению одной связи. Итак, в результате число связей будет опять-таки больше на 2α, чем требуется для жесткости.

Отсюда следует, что если в результате перестановки некоторого числа диагональных цепей в цепи четвертого класса основного типа получится образование, в котором группа p бесповодковых звеньев соединяется между собою более, чем $3p/2$ диагональными цепями, то цепь не может быть отнесена к нормальным. В самом деле, число всех осуществленных связей будет равно минимальному числу, необходимому для жесткости, как и в цепи основного типа, из которой новая цепь получена перестановкой диагональных цепей; между тем, в числе этих связей есть связи, являющиеся следствиями остальных, которые, не изменяя числа степеней свободы системы, могут быть отброшены.

Указанный признак есть признак, достаточный для того, чтобы сказать, что исследуемое образование к нормальным цепям отнесено быть не может. Поэтому проверка должна состоять в том, чтобы выбрать всеми возможными способами различные группе бесповодковых и убедиться для каждой такой группы, не больше ли число соединяющих их отрезков положенного числа.

Однако остается еще открытым вопрос, достаточна ли такая проверка, т. е. будет ли этот признак необходимым. Возможно предположить, что образование, полученное перестановкой диагональных цепей, не образует жесткого соединения с основой, но что указанная характерная группа звеньев отсутствует.

Чтобы разобраться в этом вопросе, докажем, что если число связей в стержневой системе равно тому минимальному числу, которое необходимо для жесткости, а между тем жесткого соединения не получается, то непременно в ней найдется некоторая группа звеньев, образующая жесткое, статически неопределимое целое.

Допустим же, что цепь, не представляющая явных аномалий и по числовым признакам — нормальная, не образует

в связи с основой жесткого соединения. Это может зависеть только от того, что q осуществленных связей являются следствиями остальных.

Удаление каждой из этих связей может быть осуществлено в виде удаления некоторого двухшарнирного стержня, несмотря на то, что, разъединяя некоторый шарнир, мы как будто вынуждены сразу устранить две связи. Дело в том, что на место шарнирного соединения двух звеньев мы можем поставить соединение двумя стержнями, которые можно называть заменяющими. Этот прием нами уже применялся при исследованиях жесткости (см. фиг. 35 и 38). Тогда уничтожение одной такой связи, т. е. удаление одного из заменяющих стержней, ведет к тому, что шарнир оказывается замененным двухшарнирным бесповодковым звеном.

Соединение с основой в нашем случае оказывается системой с q степенями свободы, и все движения ее, возможные по удалении q лишних стержней, возможны и в присутствии их. Это значит, что точки двух звеньев, соединенные таким лишним стержнем, будут оставаться на неизменном расстоянии по удалении этого стержня. Но вспомнив, что мы хотим сделать лишь те выводы, которые зависят только от взаимного расположения звеньев, но не от метрических соотношений, мы скажем, что и всякий другой стержень, т. е. стержень иной длины, соединяющий иные точки тех же звеньев, тоже должен быть лишним.

Таким образом, придем к заключению, что два звена, соединяемые лишними стержнями, движутся как неизменяемое целое, независимо от того, останется ли этот стержень или будет устранен, так как любые две точки этих звеньев остаются на постоянном расстоянии. Устранив все лишние стержни, мы, следовательно, получим систему с q степенями свободы, в которой имеется одна или несколько групп звеньев, которые могут двигаться тоько как одно неизменяемое звено.

Неизменяемость конфигурации такой группы звеньев есть результат оставшихся из наложенных на систему связей; лишних связей теперь нет, и, следовательно, каждая такая

группа звеньев может оказаться связанной только в статически определимое жесткое соединение. В первоначальной же системе, в присутствии лишних стержней, соединяющих между собой звенья такой группы, эта же группа звеньев образовала соединение тоже жесткое, но статически неопределимое. Присутствие такого рода групп в первоначальном образовании и требовалось доказать.

Возможно, что в числе звеньев, связанных в жесткое, статически неопределимое целое, окажется и основа. Вот этот случай и учитывает изложенная в предыдущем проверка. Чтобы убедиться в этом, нужно только доказать, что в указанном жестком соединении с основой будут непременно участвовать некоторые бесповодковые звенья со всеми примыкающими к ним цепями одноповодковых.

В самом деле, допустим, что в жестком. статически неопределимом соединении с основой имеются только одноповодковые звенья и в некоторой цепи одноповодковых заключается некоторое число таких звеньев. Нетрудно видеть, что тогда вся эта соединительная цепь окажется в жесткой связи с основой, потому что связанная с основой цепь одноповодковых, примыкающая к неподвижной точке, будет вся неподвижна. Если так, то окажутся неподвижными точки прикрепления этой цепи к соединяемым ею бесповодковым звеном. Если эти бесповодковые вообще неподвижны относительно основы, то положение наше доказано, так как тогда они окажутся связанными в неразрывное жесткое целое с жесткой, статически неопределимой группой, составляя часть ее. Если же они оба двигаются относительно основы, вращаясь каждое относительно указанных точек, то рассматриваемая жесткая неразрывная группа состоит только из основы, звеньев и поводков этой соединительной цепи.

Если мы из всей цепи выделим группу шарнирных точек, принадлежащих этим поводкам и звеньям, то легко убедиться, что число связей, осуществленных между ними, не только не больше, но меньше того числа, которое необходимо для жесткости: жесткую связь с основой мы получим только, соединив

два крайних одноповодковых звена цепи еще новым поводком с основой, т. е. превратив эту цепь в нормальную первого класса.

Возможно, однако, что только одно из бесповодковых двигается, вращаясь около шарнира, соединяющего его с цепью одноповодковых, а другое — неподвижно; тогда это последнее принадлежит исследуемому жесткому, статически неопределимому соединению с основой, будучи с ним неразрывно связано в жесткое соединение. Тогда, кроме указанной соединительной цепи, будут неподвижны и все примыкающие к указанному бесповодковому другие соединительные цепи, ведущие нас к другим бесповодковым. Если из этих последних бесповодковых все подвижны, то жесткое, статически неопределимое соединение с основой должно состоять из одного бесповодкового звена, к которому примыкает несколько концевых цепей одноповодковых звеньев. Нетрудно убедиться, что число связей, осуществленных между точками рассматриваемой системы, недостаточно для жесткости. Не изменяя числа степеней свободы системы относительно основы, мы можем удалить одну цепь одноповодковых за другой, после чего останется только наше бесповодковое звено, ничем не связанное с основой и обладающее относительно последней тремя степенями свободы. Таким образом, предположение, что все дальнейшие бесповодковые окажутся подвижными, несостоятельно. Но если из них неподвижным окажется хотя бы только одно, то мы имеем уже два бесповодковых звена, участвующих в группе звеньев, связанных в жесткое, неопределимое целое с основой, что и требовалось доказать.

Итак, если в группе звеньев, связанных в жесткое, статически неопределимое целое, окажется и основа, то некоторое число бесповодковых окажется связанным с основой в жесткое, статически неопределимое целое. Но связь бесповодковых с основой совершается исключительно при посредстве соединительных цепей одноповодковых, где мы не различаем теперь диагональных и обходных. Введение каждой такой цепи между двумя точками системы, как мы видели раньше, соответствует

осуществлению двух связей между точками системы, в которую такая цепь вводится. Если мы при p бесповодковых введем между ними $3p/2$ соединительных цепей или же меньше, то число осуществленных связей не будет больше того, которое необходимо для жесткости. А в рассматриваемой нами группе число их должно быть больше. Поэтому непременно эти бесповодковые звенья будут соединены с основой и между собой числом соединительных цепей одноповодковых бо́льшим, чем $3p/2$.

Итак, в этом случае исследуемый признак необходим, а проверка будет достаточной.

Но мы не можем знать, не образует ли жесткое, статически неопределимое целое некоторая группа звеньев, в число которых основа не входит, и потому необходима вторая проверка. Для этого принимаем какое-нибудь другое бесповодковое звено кинематической цепи за основу и повторяем тот же прием. Однако здесь, если первая проверка дала отрицательный результат, можно иметь дело с кинематической цепью с меньшим числом звеньев. Ведь этот результат показывает, что старая основа не составляет части этого жесткого неизменяемого целого и потому, не нарушая числа связей между точками, принадлежащими этому целому, можно, поставив цепь на новое звено, отделить от этого образования то из звеньев, которое служило основой при первой проверке. Тогда бывшие раньше поводками двухшарнирные звенья окажутся связанными с остальным образованием только одним шарниром, около которого могут вращаться совершенно независимо. Поэтому можно все эти бывшие поводки отбросить. Но тогда явится возможность отбросить еще целый ряд звеньев. По отбрасывании бывших поводков все звенья, бывшие одноповодковыми и трехшарнирными, станут двухшарнирными.

Если таких звеньев окажется более одного между двумя бесповодковыми, то и они могут быть отброшены, именно, если их два, то как двухповодковая группа, а если их больше, то как группа звеньев, которая и при неподвижности остальных

будет двигаться относительно новой основы. Таким образом, окажутся выброшенными все те звенья, которые образовали, при старой основе, соединительные цепи одноповодковых, если только такая цепь не была однозвенной.

По отбрасывании этих цепей может явиться возможность отбросить еще новые звенья, так как благодаря этому последнему действию уменьшилось число шарниров в бесповодковых и могли образоваться двухшарнирные бесповодковые не только за счет бывших одноповодковых, но и за счет многошарнирных бесповодковых.

Когда мы, таким образом, все лишние звенья отбросим, то весьма вероятно, что все образование распадется на несколько не связанных в одно целое частей. Каждую такую часть, приняв одно звено за основу, опять подвергаем проверке, которая, конечно, будет уже легче, так как число звеньев весьма значительно уменьшится.

Указанный здесь способ проверки несомненно приведет к цели быстрее, чем если к разным группам звеньев применять числовой признак Грюблера. Там ведь приходится рассматривать все возможные комбинации из отдельных звеньев, какие бы последние ни были; у нас же нужно рассматривать комбинации из одних только бесповодковых.

Во всяком случае, самой трудной является первая основная проверка; второй может иногда и вовсе не понадобиться. Очевидно, вторая проверка будет совершенно излишняя в цепях, где не встречается бесповодковых звеньев, связанных между собой шарниром (независимо от того, будет ли этот шарнир замковый или обходной), или же одноповодковым звеном. В таких цепях при второй проверке придется отбросить все звенья, кроме бесповодковых, а последние, не будучи между собою связаны, не могут образовать жесткого целого. Возможно, однако, упростить первую проверку.

Дело в том, что нет надобности проверять комбинации из любого числа бесповодковых, а проверке подлежат только комбинации из бесповодковых, отличающиеся от первоначаль-

ной цепи на нечетное число бесповодковых, равное или большее пяти, или же на четное их число, равное или большее восьми.

Допустим, что мы от первоначальной цепи отделили p бесповодковых звеньев и желаем проверить связь с основой остальных q. Чтобы последние образовали с основой жесткое, статически неопределимое соединение, число отрезков, соединяющих изображающие их узловые точки схемы, должно быть $3q/2 + \alpha$, где $\alpha > 0$.

Так как число всех отрезков в первоначальной цепи $\frac{3(p+q)}{2}$, если по виду цепь подходила к нормальным четвертого класса, то при удалении p бесповодковых удалено $(3p/2 - \alpha)$ отрезков. Рассчитаем теперь, каково минимальное число двухшарнирных бесповодковых среди этих p отделенных звеньев. Для того, чтобы соединить эти p звеньев в неразрывное целое, необходимо, по меньшей мере $(p-1)$ отрезков, а чтобы присоединить полученную простую цепь к остальным q бесповодковым так, чтобы образовалась замкнутая цепь, надо еще два отрезка. Итак, по крайней мере $(p+1)$ отрезок ушел на то, чтобы связать эти p бесповодковых между собой и с остальной цепью, причем теперь все бесповодковые, до присоединения остальных $(p/2 - \alpha - 1)$ отрезков, будут двухшарнирные. Распределим эти отрезки таким образом, чтобы уничтожить как можно больше двухшарнирных. С этой целью образуем среди этих p звеньев только трехшарнирные и не будем присоединять ни одного отрезка каким-либо концом к одному из q звеньев. Таким образом, удастся обратить в трехшарнирные бесповодковые $(p - 2\alpha - 2)$ звена; останется двухшарнирных всего $2(\alpha + 1)$.

Это будет наименьшее число двухшарнирных бесповодковых, которое может оказаться, но число бесповодковых среди p звеньев могло быть и больше. Наибольшее возможное их число, чтобы не образовалось смежных бесповодковых звеньев, при четном p, очевидно, будет $p/2$; при нечетном p оно же окажется $p + 1/2$. С другой стороны, наименьшее значение α при четном p будет равно единице, при нечетном — половине. Написав

неравенства для наибольшего и наименьшего возможного числа бесповодковых, находим:

$$\text{для четного } p\text{: } p/2 \geqslant 4, \text{ или } p \geqslant 8;$$

$$\text{для нечетного } p\text{: } \frac{p+1}{2} \geqslant 3, \text{ или } p \geqslant 5.$$

Итак, если в цепи имеется связанная в статически неопределимое жесткое целое с основой группа звеньев, отличающаяся от первоначально данной меньше, чем на пять нечетных бесповодковых, или же на восемь четных, то это обнаружится весьма заметным на первый взгляд признаком, что в цепи имеется два или более смежных бесповодковых; в этом случае проверка отпадает, как мы видели. Если же таких смежных бесповодковых нет, то при наличности n бесповодковых в данной цепи, будем проверять только комбинации из $(n - 5)$, $(n - 7)$ и меньшего числа бесповодковых.

Доказательство наше предполагало, что p бесповодковых образуют, по отделении от остальных q звеньев, одну связную группу. Возможно, конечно, что они разделяются q звеньями на несколько групп, содержащих каждая соответственно p_1, p_2, p_3, ..., p_k звеньев. Этот случай только усилит наши неравенства, так как при k группах число отрезков, необходимых, чтобы установить связь между ними и с остальными звеньями и образовать только двухшарнирные бесповодковые, будет $(p + k)$, а по включении всех отрезков наименьшее возможное число их окажется $2(\alpha + k)$, что дает при $k = 2$:

$$\text{для четного } p : p \geqslant 12;$$

$$\text{для нечетного } p \geqslant 9.$$

Указанное соотношение будет весьма полезно иметь в виду, когда проверяется такая группа звеньев, что от цепи приходится отделить как бы два сегмента того круга, на котором расположены бесповодковые, и заняться остатком. Такой остаток нуждается в проверке только тогда, когда он содержит $(n - 9)$, $(n - 11)$ и менее бесповодковых.

Указанные соображения значительно упрощают проверку; при наличии же только пяти бесповодковых делают ее совершенно излишней; но уже последнего рода цепь, по сложности, превосходит всё до сих пор употреблявшееся в машиностроении.

Все исследованные в этой главе цепи мы будем относить к четвертому классу. Но этим не исчерпаны все типы этого класса и исследование вопроса. На очереди стоит вопрос о переносе поводков в цепях исследованного типа и распадение цепей на простейшие. Но чем дальше мы разбираемся, тем сложнее становятся рассматриваемые вопросы, тем больше появляется трудностей. При рассмотрении вопроса о переносе поводков возникает вопрос, будет ли всегда соблюдена обходность, когда образуется бесповодковое звено на внутренней соединительной цепи. Ясно, что будут случаи, когда она не будет соблюдена, например, когда образуется по одному бесповодковому на каждой из соединительных цепей. Но когда она будет соблюдена и когда нет? Распадается ли цепь четвертого класса, если после переноса поводка обходность не соблюдена, на простейшие цепи или она может после переноса поводка перейти в высший класс, где не требуется обходности, и этим свойством резко отличается от цепей остальных трех классов? Это — вопросы, на которые, быть может, ответ будет дан, и в скором времени, но возможно, что их решение и далеко непросто. Не представляет трудностей вопрос о развитии поводка и о переносе поводка с одной концевой цепи на другую или об обмене поводка между основным контуром и концевой цепью, где будут дословно приложимы рассуждения, примененные в случае простой замкнутой цепи.

Быть может, предложенные здесь вопросы и другие, которые могут возникнуть при дальнейших исследованиях, повлияют оплодотворяющим образом на развитие Analysis situs в реальных измерениях, так как, повидимому, этот отдел науки ушел совершенно в изыскание соотношений в пространстве n измерений, пренебрегая реальными измерениями, ограничившись

в этом отношении разбором некоторых игр.* Знакомиться с ним в реальных измерениях почти что приходится из книжек, имеющих целью забаву подрастающего поколения. Если в этом отношении будет достигнут плодотворный результат, то, ограничившись в дальнейшем изображением некоторых представляющихся взору перспектив и попытавшись приложить изученное к установлению приемов исследования движения механизмов, автор не будет считать свой труд затраченным бесполезно.

Мы не изучили всех типов цепей четвертого класса, т. е. таких, которые допускают обход всех бесповодковых звеньев. Но это не помешает нам сказать несколько слов и вывести несколько общих заключений относительно цепей, такого обхода не допускающих. Если цепь не допускает вовсе никакого обхода звеньев, то между каждыми двумя звеньями существует только один путь и такие открытые цепи, поскольку они относятся к нормальному типу, нами изучены. Замкнутая цепь, не допускающая полного обхода бесповодковых, должна, по крайней мере, допускать один частичный обход, но может их быть и несколько. Случая, когда все звенья, включенные в частичный обход, будут снабжены поводками, т. е. обход не содержит бесповодковых, нам разбирать не нужно. Если каждое звено имеет по одному поводку, то часть цепи с основой образует жесткое, статически определимое соединение, как цепь нулевого разряда третьего класса. Если поэтому все образование относится к цепям одного из нормальных типов, то оно распадается на только что указанную цепь и на другую нормального типа; остается только исследовать эту другую цепь. Если же некоторые из звеньсв, образующих обход, имеют более, чем по одному поводку, а остальные — по одному, то эта группа звеньев образует с основой жесткое, статически неопределимое соединение и все

* Poincaré. Journal de l'école polytechn. (2) 1, 1895. Picard. E. et Simart G. Théorie des fonctions algébriques à deux variables indépendantes. Tome I, Chap. II.

образование к цепям нормального типа не может уже быть отнесено. Итак, говоря об обходе, мы будем всегда иметь в виду обход бесповодковых звеньев, причем, конечно, в обход могут и обычно будут включаться и цепи одноповодковых звеньев, как было и в предыдущем. Во всякой сложной замкнутой цепи из подлежащих рассмотрению можно будет, следовательно, выделить одну или несколько групп звеньев, допускающих обход всех заключающихся в каждой из них бесповодковых. Остановимся на случае, когда такая группа одна. Если при этом цепь не относится к одному из разрядов третьего класса, то, отделивши указанную группу, можем получить в остатке только одну или несколько разомкнутых цепей, вообще говоря, сложных. Если перестановкой поводков вся цепь может быть приведена к такому виду, что концевые цепи будут концевыми цепями нормального типа, то, заменив каждую из них поводком соответствующего звена обходного контура, исследуем, нельзя ли последний перестановкой поводков привести к изученному типу нормальных цепей четвертого класса. Если это возможно, то данная цепь образована методом развития и перестановки поводка из нормальной цепи четвертого класса, и если перестановка поводков совершилась таким образом, что не было образовано жесткого, статически неопределимого соединения части звеньев с основой, то первоначальное наше образование должно быть отнесено к нормальным цепям четвертого класса, или распадется на таковые. Возможно, однако, что в нашем преобразовании число поводков или соединительных цепей, сравнительно с изученными нормальными типами четвертого класса, либо будет мало, либо велико. Тогда первоначально данное образование получено методом развития и перестановки поводков из цепи, отличающейся от изученного типа цепей четвертого класса либо тем что число поводков и внутренних соединительных цепей в ней было больше, либо тем, что оно было меньше нормального. Ни в том, ни в другом случае рассматриваемое образование не даст жесткого, статически определимого соединения с основой и потому все данное образование не может быть отнесено к цепям нормального типа.

Глава пятая

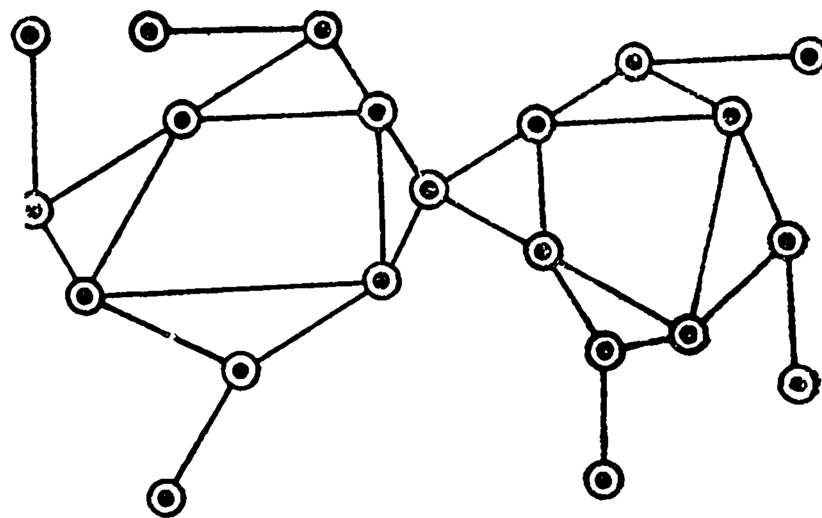
НОРМАЛЬНЫЕ ЦЕПИ ВЫСШИХ СЕМЕЙСТВ. СВЯЗЬ МЕЖДУ КЛАССИФИКАЦИЕЙ МЕХАНИЗМОВ И КЛАССИФИКАЦИЕЙ ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛЕКСОВ. МЕХАНИЗМ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ, КАК ОБРАЗОВАНИЕ, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ КРИВОШИПА И РЯДА НАСЛОЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Мы закончили предыдущую главу рассмотрением образования, представляющего один из неизученных нами типов нормальных цепей, которое тоже может оказаться нормальной цепью четвертого класса. Это образование отличалось тем, что в нем имелась только одна группа звеньев, допускающая обход всех входящих в состав ее бесповодковых.

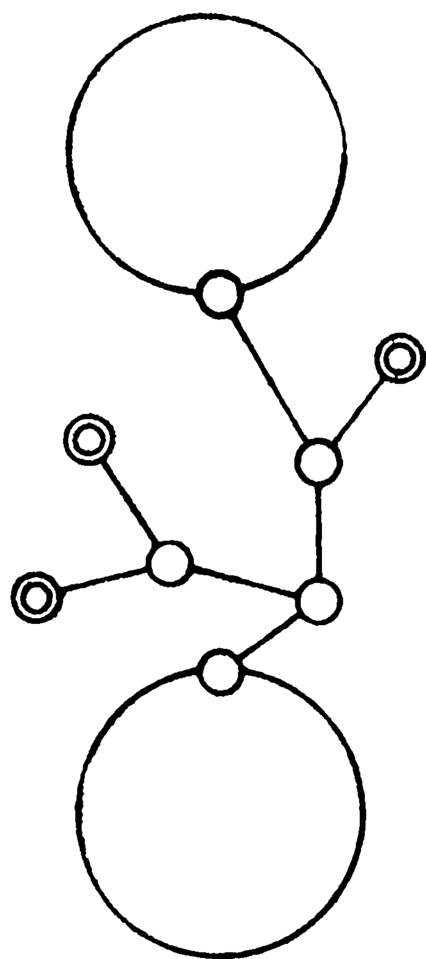
Возможно, однако, что в данном сложном образовании, допуская, что оно заведомо образует с основой жесткое, статически определимое соединение, окажется несколько групп звеньев, допускающих обход всех заключающихся в каждой бесповодковых, причем несколько таких групп в одну, обладающую тем же свойством, соединены быть не могут. По удалении этих групп в остатке остаются только открытые, связующие их цепи простые или сложные, которые будем называть внешними соединительными цепями, в отличие от внутренних, соединяющих между собой звенья одной только группы.

Условимся каждую такую самостоятельную группу из соединенных между собой внешними соединительными цепями, представляющую в общем случае сложную замкнутую цепь, при условии, что нельзя соединить несколько из наличных групп в одну, тоже допускающую обход всех бесповодковых, называть звеном второго рода, в отличие от тех жестких звеньев, из ко-

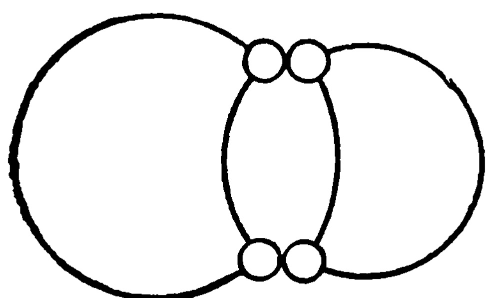
торых мы до сих пор строили наши цепи. Можно представить себе цепи открытые и замкнутые, простые и сложные, образованные из звеньев второго рода. Если такая цепь образует с основой жесткое, статически определимое соединение (отдельные жесткие звенья ее при этом будут связаны с основой поводками, так как шарнирное соединение с основой будет заменяться двумя поводками) и при этом не распадается на простейшие нормальные, то это будет один из нормальных типов цепей высшего семейства. При этом все четыре отмеченных в предыдущих главах класса образуют первое семейство нормальных цепей.


Фиг. 84.

Формы цепей второго семейства, в общем аналогичные формам цепей первого, будут, однако, более разнообразны. Соединяя, например, два звена второго рода, образуем между двумя жесткими звеньями двух простых замкнутых цепей шарнир — внешний замок (фиг. 84); при этом поводки твердых звеньев, образующих замок, должны быть опущены. Далее показано соединение двух звеньев второго рода с помощью сложной открытой цепи (фиг. 85). Эти образования представляют цепи нормального типа и соответствуют четырехповодковой (двухзвенной) группе первого семейства. Но в то время как звенья четырехповодковой группы могли быть соединяемы только одним шарниром, в двухзвенной группе второго семейства нет принципиальных причин, не допускающих многократного примене-


Фиг. 85

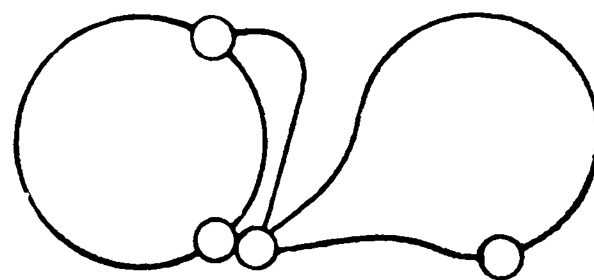
ния внешнего замыкания. Двукратное замыкание выполнено на фиг. 86, где оно привело, однако, к образованию цепи четвертого класса первого семейства, так как четыре бесповодковых допускают обход; на фиг. 87 показано другое двукратное внешнее смыкание, где после него цепь остается цепью второго семейства.



Фиг. 86.

Замкнутая простая трехзвенная цепь первого семейства превращалась в трехповодковую группу; во втором семействе она существует, как самостоятельное образование; с другой стороны, нет в нем образований, соответствующих двухповодковой и трехповодковой группам.

Определять цепь нормального типа второго семейства числом ее поводков, очевидно, нет смысла, так как одно ее звено может иметь, в зависимости от числа твердых звеньев, из которых оно составлено, весьма большое и разнообразное число поводков. Говоря поэтому о простой открытой цепи, мы будем называть ее двухтрех и т. д. ... n-звенной; такие цепи образуют первый класс второго семейства. Второй класс будет образован из звеньев второго рода наподобие сложной открытой цепи.



Фиг. 87.

Конечно, узловым точкам здесь не будут соответствовать звенья второго рода, непременно лишенные всех поводков; поэтому нужно отличать от остальных звеньев не бесповодковые, а узловые звенья. Третий класс второго семейства будет отличаться тем, что звенья второго рода образуют простую замкнутую цепь, отличающуюся тем, что существует один только обход последних, причем между двумя узловыми звеньями, в этом обходе заключенными, нет третьего пути, помимо двух образованных обходными звеньями. Если в такой цепи имеются концевые цепи, то и они могут оказаться не только цепями первого рода, но и второго; последние получаются второго рода методом развития поводка, состоящим в том, что на место по-

водка становится цепь, отличающаяся от нормальной замкнутой цепи первого семейства отсутствием одного поводка.

Все поводки звеньев первого рода концевой цепи прикрепляются к основе, чтобы получить жесткое соединение с последней. Применением обратного приема можно будет тогда всегда концевую цепь второго рода заменить поводком некоторого звена. Сделав эту замену для всех концевых цепей, независимо от того, содержат ли они звенья первого или второго рода или даже комбинацию тех и других, мы в случае цепи третьего класса должны притти к образованию, допускающему обход всех звеньев и не содержащему притом узловых звеньев.

В случае цепи четвертого класса второго семейства замена поводком таких концевых цепей указанного нормального строения приведет к сложной замкнутой цепи, не содержащей последних, но не устранит всех узловых звеньев; последние должны, однако, при этом допускать обход.

Если же не имеющая концевых цепей сложная замкнутая цепь не допускает обхода всех узловых звеньев, то узловые звенья второго рода разбиваются на группы, из которых каждая допускает такой обход. Это соображение указывает на наличие цепей третьего семейства, образованных из звеньев третьего рода, где каждое звено образуется из замкнутой цепи второго семейства. Как во втором семействе отмечено четыре класса, так и в третьем семействе отметим их четыре и, пользуясь признаком обходности, придем к цепям четвертого семейства, каждое звено которых образовано из замкнутой цепи третьего семейства и т. д., до бесконечности.

Важно указать, что любая нормальная цепь уложится в указанную классификацию.

Мы видели уже, насколько наша классификация тесно связана с вопросом об обходности; каждый раз, когда мы убедились, что цепь не может быть отнесена к первым двум классам какого-либо семейства, этот вопрос возникает вновь. При этом каждый раз в данном образовании приходится сначала уничтожить тем или другим путем концевые образования или концевые цепи.

Каков нормальный тип этих цепей в первом семействе, мы уже знаем, и потому там не возникло никаких сомнений в том, как эти цепи отделить, заменяя их поводками, пока в цепи не окажется концевых звеньев. Тем не менее, можно себе представить, к чему сведется прием, обратный методу развития поводка в цепях высших семейств.

Допустим, что мы убедились, что цепь не относится ни к первому семейству, ни к первым двум классам второго. Если теперь в цепи окажутся концевые цепи, образованные из звеньев второго рода, то легко отличить конечные звенья каждой такой цепи, так как они, в отличие от остальных звеньев цепи, имеющих, по крайней мере, два соседних, будут иметь лишь одно. При этом мы условимся все цепи и отдельные звенья первого рода, лежащие между двумя звеньями второго рода, относить к соединительным элементам. Выбрасываем соединительные элементы между одним из концевых звеньев второго рода и его соседним, для чего придется разъединить некоторое число шарниров, скажем p. Образуется система с $2p$ степенями свободы, но разбитая на три самостоятельные части, не имеющие между собой связи, помимо общей основы. Если часть, бывшая конечным звеном второго рода, теперь в соединении с основой, поскольку последнее сохранилось, образует систему с r степенями свободы, промежуточная же часть (бывшие соединительные элементы) — систему с q степенями свободы, то оставшаяся после удаления последнего звена цепь будет обладать в сохранившемся соединении с основой S степенями свободы, где $S = 2p - r - q$. Присоединив некоторые из ее жестких звеньев к основе S поводками так, чтобы не образовалось какого бы то ни было статически неопределимого соединения, мы получим жесткое, статически определимое соединение с основой.

Если разобраться во всех возможных при этом случаях, то прием, обратный этому, который будет обладать довольно разнообразными формами, и будет то, что соответствует развитию поводка в первом семействе. Так, мы уничтожим одно концевое звено за другим и получим цепь, которая образует

жесткое, статически определимое соединение с основой. Она может либо оказаться цепью третьего класса, либо цепью четвертого класса, либо относиться к семейству выше третьего. Данная же цепь получена из нее пока еще не известными нам отчетливо приемами развития поводка в цепях второго семейства и потому должна быть отнесена к этому семейству, или же к одному из следующих. Так, идя шаг за шагом, предполагая метод развития поводка изученным в применении к звеньям всякого рода, мы покажем, что к одному из четырех классов какого-либо семейства наша цепь должна принадлежать. Совершенно иной вопрос, сумеем ли мы действительно отнести ее к надлежащему классу, так как для семейств выше первого исследование возможно разве только в простейших случаях.

Указав, таким образом, в каком направлении должно развиваться изучение приема, соответствующего методу развития поводка в цепях семейств выше первого, мы, однако, думаем, что доказательство исчерпывающего значения нашей классификации будет строже и убедительнее, если мы не удовлетворимся указанными выше соображениями, а рассмотрим вопрос совершенно вне зависимости от подобного, пока еще темного приема. В самом деле, в основе классификации лежит вопрос об обходности звеньев, но вовсе не поводков, и потому естественнее от последних совсем отделаться. Начнем же исследование класса цепей с самого начала иным приемом.

Итак, допустим, что перед нами есть заведомо нормальная цепь, семейство и класс которой предстоит установить. Прежде всего освобождаемся от поводков, не играющих никакой роли в указанной нами классификации. Отличить их от остальных твердых звеньев легко, потому что это должны быть конечные звенья, имеющие лишь одно соседнее звено, к которому они прикреплены единственным своим шарниром. После того, как поводки отброшены, возможно, что в цепи образуются обладающие теми же признаками твердые звенья; но эти звенья будут тогда уже конечными звеньями самой первоначальной цепи и потому подлежат учету.

Если таких конечных звеньев первого рода будет два, то возможно, что цепь относится к первому классу первого семейства. Тогда, начиная с одного из конечных звеньев, отбрасываем это звено, превращая примыкающее к нему в конечное, затем это последнее звено и т. д , пока возможно продолжать этот прием. Если, наконец, в остатке останется одно только звено, то цепь принадлежала первому классу первого семейства. Если же мы, применяя этот прием, дойдем до звена, которое было в начальной цепи узловым, то последнее, по отбрасывании одного из примыкающих к нему звеньев, не превратится в концевое, потому что будет иметь и после этого не менее двух соседних. Если в данной цепи число концевых звеньев было больше двух, то возможно, что она относится ко второму классу первого семейства; в противном случае, она не ниже третьего класса.

Начав с одного концевого звена и отбрасывая подряд только что указанным приемом одно звено за другим, пока не дойдем до звена узлового, мы затем обращаемся к другому концевому звену, применяя ту же операцию, потом к какому-нибудь третьему из оставшихся концевых звеньев и т. д. В окончательном результате мы либо получим в остатке одно звено, и тогда цепь относится ко второму классу, либо получим цепь, в которой концевых звеньев уже не будет, и тогда она — не ниже треьего класса. К последнему она относится, если в ней не будет вовсе узловых звеньев. Если же имеются узловые звенья, то надо определить, допускают ли они обход; если допускают, то цепь относится к четвертому классу первого семейства; если не допускают, то она — выше первого семейства.

В таком случае нужно в ней выделить звенья второго рода, т. е. собрать узловые звенья в несколько групп, из которых каждая допускает обход узловых звеньев, входящих в ее состав, причем разбивку на такие звенья второго рода надо производить так, чтобы число их получилось наименьшее, т. е. нельзя было из p каких-либо групп образовать меньшее число групп, из которых тоже каждая допускает обход узловых звеньев первого рода. При этом часть узловых звеньев первого рода может

войти в состав соединительных элементов между звеньями второго рода (см. фиг. 85); последние, если выбросить все твердые звенья, входящие в состав звеньев второго рода, должны оказаться открытыми цепями первого семейства.

После того, как выделены звенья второго рода, отмечаем среди них концевые звенья, т. е. такие, которые имеют только одно соседнее звено. Затем применяем тот же метод отбрасывания концевых звеньев, изложенный по отношению к звеньям первого рода, теперь к звеньям второго рода. В остатке окажется либо одно только звено второго рода, и тогда цепь относится к первому классу второго семейства, если число концевых звеньев было только равно двум, или ко второму, если число концов было больше двух; либо, уничтожив концевые звенья, мы придем к образованию, содержащему больше одного звена. Если в нем нет узловых звеньев второго рода, то оно относится к третьему классу второго семейства; если есть узловые звенья и последние допускают обход, — к четвертому классу. Если же обхода узловых звеньев второго рода не существует, то цепь относится к высшему семейству.

Выделяем в ней звенья третьего рода, образованные из групп звеньев второго рода, в которых узловые звенья допускают обход, так, чтобы число звеньев третьего рода получилось наименьшее. После этого проделываем ту же операцию над звеньями третьего рода и т. д., пока не будут установлены семейство и класс цепи.

Дело в том, что нельзя себе представить, что указанный прием, при конечном числе звеньев первого рода, может быть продолжен до бесконечности. Это было бы очевидно, если бы всякий раз при переходе к новому семейству отбрасывать концевые звенья. Однако можно себе представить, что мы дойдем до n-го семейства, не найдя ни одного концевого звена какого-либо рода.

Тем не менее этот прием до бесконечности все же продолжать нельзя, и число наших операций будет конечным. Замкнутая цепь первого семейства содержит не менее трех звеньев первого

рода, замкнутые цепи высших семейств — не менее двух звеньев соответствующего рода; поэтому одно звено n-рода состоит, по крайней мере, из $3\cdot 2^{n-1}$ звеньев первого рода. Поэтому, если нормальная, не распадающаяся на простейшие нормальные цепь содержит N звеньев первого рода, то она не может быть выше n-го семейства, где

$$n \leqslant \frac{\lg N - \lg 3}{\lg 2} + 1 .$$

Так как указанная выше операция, с помощью которой мы определяем семейство и класс рассматриваемой цепи, на основании сказанного, до бесконечности продолжена быть не может; так как, с другой стороны, если цепь не относится к предполагаемому семейству, то всегда имеется возможность исследовать, не относится ли она к семейству высшему, то можно считать доказанным, что она уместится в нашей классификации *.

Но, отбросив поводки и классифицируя лишенную поводков цепь, мы тем самым утратили тот критерий, которым цепи нормальных типов отличаются от цепей типов ненормальных, и, следовательно, приходим к убеждению, что не только цепи нормальных типов, но и всякие другие цепи умещаются в нашей классификации.

И это относится не только к цепям, составленным из твердых звеньев, соединяемых низшими парами. Тот же прием непосредственно приложится к любому из образований, известных в Geometria situs под названием линейных комплексов. Таким образом, мы невольно проникли в чуждую нам область, где тоже, кроме подробного изучения свойств дерева, систематический метод не имел, повидимому, применения и не было критерия, позволявшего разобраться в разнообразии образований.

* Указанная только что классификация должна применяться, конечно, только к цепям, не распадающимся на простейшие нормальные. Если же цепь, образующая жесткое, статически определимое соединение с основой, распадается на простейшие, тем же свойством обладающие, то классифицировать придется уже эти последние.

Этим замечанием можно считать установленной и классификацию линейных комплексов. Конечно, здесь только указана общая основа подобного рода классификации, в которой вопрос об обходности узловых точек является центральным пунктом. Разрешение последнего вопроса представляет поэтому интерес несомненно более глубокий, чем вопрос о возможных способах обхода конем всех клеток шахматной доски.

Но мы надеемся, что вся обработка деталей, необходимая для того, чтобы практически можно было единообразно установить семейство и класс данного линейного комплекса, будет произведена специалистами в области чистой геометрии, если настоящая работа способна привлечь их внимание к давно остановившейся в своем развитии теории линейных комплексов. Приложение выводов этой теории к цепям нормальных типов высших семейств представит еще и после этого нелегкую задачу, как можно видеть на примере теории цепей четвертого класса первого семейства, разработка которой нами не доведена до конца. Ведь здесь, кроме вопроса об обходности, остаются еще открытыми вопросы о возможных типах цепей данного класса и о распадении цепи на простейшие, которые в теории линейных комплексов, как будто, не должны возникнуть вовсе.

Нам предстоит еще доказать предложение, без которого наше исследование все же было бы лишено некоторой части своего значения.

Любой статически определимый механизм может быть разложен на простой кривошип и на ряд наслоений цепей нормальных типов.

Отметим прежде всего, что в любом механизме, если он только не представляет собой один только кривошип, имеются, по крайней мере, два звена, шарнирно связанные с основой. Дело в том, что неизменяемая фигура, движущаяся в плоскости, а потому также всякая неизменяемая система, составленная из совокупности нескольких неизменяемых звеньев, обладает тремя степенями свободы. Прикрепляя ее к основе одной шарнирной точкой, лишаем ее двух степеней свободы и получаем

простейший механизм — кривошип. Всякая изменяемая система в плоскости, с основой не связанная, будет иметь больше трех степеней свободы, так как положения одного ее звена недостаточно еще, чтобы определить положение всех остальных; поэтому прикрепление одного звена к основе шарнирной точкой еще недостаточно, чтобы превратить ее в механизм.

Итак, в любом механизме имеется не одно, а по крайней мере, два звена, которые могут считаться кривошипами, но может их быть и больше. В практике, как мы уже указывали, кривошипом считают то звено, которое вводит движение, т. е. то из непосредственно связанных с основой звеньев, движение которого может считаться (нередко приблизительно) известным или данным; последнее часто бывает приблизительно равномерно вращательным и потому принято кривошипом считать звено, совершающее полный оборот.

Мы будем держаться первого определения, и тогда во всех случаях, где результат классификации будет зависеть от того, какое из звеньев считать кривошипом, остановимся на том, которое в только что указанном смысле вводит движение. Этим вводится известная условность, но для единства классификации последняя необходима. В то же время эта условность такова, что не заставляет нас отойти от чистой кинематики, так как совершенно исключает вопрос о том, приложена ли двигающая сила в этом звене или в другом, или же двигающие силы распределены в разных точках различных звеньев.

Допустим же, что вопрос о том, какое из возможных звеньев считать кривошипом, мы решили. Так как остальные звенья образуют систему, не лишенную связи с основой и с кривошипом, то имеются еще шарнирные соединения не только с основой но и с последним.

Если кривошип неподвижен, то неподвижна и вся система, так как положение его определяет положение любой точки системы. Следовательно, если мы сделаем неподвижными шарнирные точки, соединяющие некоторые из звеньев с кривошипом, хотя бы иным способом, например, разъединив соответствующие

шарниры и прикрепив те же точки шарнирно к основе, то получим систему неизменяемую. Будет ли она статически определима?

Прежде чем ответить на этот вопрос, необходимо указать, как понимают статическую определимость в механизме. Мы называем механизм статически определимым, если, представив себе все его твердые звенья осуществленными в виде жестких, статически определимых ферм, состоящих из одних только двухшарнирных стержней, в случае действия уравновешенной системы сил мы можем определить напряжения в стержнях, считая, что они не деформируются под действием сил (обладают как бы бесконечно большим модулем упругости), т. е. исходя из уравнений статики неизменяемой системы.

На самом деле, звенья механизма так почти никогда не осуществляются, отливаясь из цельного куска металла, в котором могут существовать внутренние напряжения. Тем не менее принято считать механизм статически определимым, если он окажется таковым по замене действительных звеньев его указанными выше фермочками. Дело в том (это само собой разумеется), что, определив силы, действующие на каждое из отдельных звеньев хотя бы после указанного замена, конструктор каждое из них в отдельности рассчитает согласно требованиям теории упругости и осуществит из материала, по возможности удовлетворяющего предположениям, положенным в основу последней. Быть может, правильнее было бы поэтому считать механизм статически определимым, если давления во всех шарнирах могут быть определены методами статики, считая все звенья неизменяемыми и не входя вовсе в обсуждение статической определимости или неопределимости самих звеньев.

Но ввиду общепринятости первого определения и его теоретического удобства мы останемся при нем, тем более, что обоснование тождественности обоих определений завело бы нас слишком далеко. Что статическая неопределимость в указанном смысле тождественна с осуществлением лишних, т. е. математически вытекающих из остальных связей, мы считаем

известным. Такие связи могут осуществляться в виде соединения стержнем неизменяемой длины двух точек, принадлежащих разным звеньям механизма, которые и без того при движении его сохраняют постоянство расстояния.

Подобного рода механизмы с избыточными стержнями (uebergeschlossene Mechanismen) наша классификация вовсе не учитывает. Следует ли, выбросив в них лишние стержни, учитывать их по нашей классификации или же классифицировать их отдельно, разработав теорию цепей, отличающихся от нормальных избыточными стержнями, остается вопросом открытым. Но так как, по существу дела, избыточными стержнями соединяются точки особенные, то в основе подобного рода механизмов лежит осуществление особых метрических соотношений, поэтому вряд ли аналогичные изыскания в области иного рода свойств цепей, не зависящих от метрических соотношений будут плодотворны, и поэтому первый прием классификации быть может и вполне уместен.

Итак, допускаем, что наш механизм в указанном смысле слова статически определим и при рассуждениях наших везде предполагаем, что неизменяемые звенья его представляют статически определимые жесткие фермочки. Под действием уравновешенной системы сил напряжения во всех стержнях механизма можно определить. Если мы введем стержень, связывающий наш кривошип с основой, то получится жесткое, статически определимое соединение с основой всей системы, нужно только этот стержень расположить так, чтобы две его шарнирные точки не лежали на одной прямой с точкой прикрепления кривошипа к основе. Напряжение этого стержня будет равно нулю, так как равновесие существовало и в отсутствии его; в то же время теперь кривошип образует жесткое целое с основой, причем напряжение остальных стержней под действием системы сил, к ним приложенным, будет то же, что и прежде. Эту систему сил можно выбрать какой угодно, уравновесив ее только силой, приложенной в точке кривошипа. Следовательно, вся система остальных звеньев, кроме кривошипа, если

связь с кривошипом заменить связью с основой, окажется статически определимой, ибо напряжения стержней определяются, если считать стержни жесткими, т. е. не учитывать их деформацию.

Итак, отделив всю систему остальных звеньев от кривошипа и основы, мы скажем, что в соединении с основой она дает начало жесткому, статически определимому образованию. При этом шарнирные соединения с прежней основой и кривошипом звеньев, имеющих больше двух шарниров, заменяем соединением двумя поводками, звенья же двухшарнирные, оказавшиеся теперь конечными, сами обращаются в поводки. Все это образование, будучи пристегнуто к неизменяемой основе, дает начало жесткому, статически определимому образованию и потому, если не распадается на простейшие нормальные цепи, должно быть признано за цепь нормального типа; если же оно распадается, то положение наше тоже доказано.

Как и в предыдущем, семейство и класс, к которым должен быть отнесен данный механизм, определяются семейством и классом наиболее сложной из нормальных цепей, образующих наслоение данного механизма, причем цепь высшего семейства считается сложнее цепи низшего, а в случае цепи одного семейства цепь высшего класса — сложнее цепи низшего, независимо от числа звеньев цепи.

Если наше доказательство исчерпывающего значения указанной классификации может считаться удовлетворительным, то тем самым доказано и исчерпывающее значение ее для всех плоских механизмов с низшими парами, за исключением, конечно, особых случаев. К последним нужно отнести не только механизмы с избыточными стержнями, которые условно можно еще классифицировать и по предложенному способу, но еще и случаи, где замена пар вращения парами скольжения, совершенно независимо от метрических соотношений, превращает неизменяемое соединение с основой нормальной цепи в изменяемое. Разработку этого вопроса предполагалось первоначально включить в настоящую работу, но ввиду большого

объема ее и сложности вопроса, автор от этой мысли отказался, думая, это достаточно будет сначала указать общие основы теории нормальных многоповодковых цепей и приложение ее в теории механизмов. Несомненно некоторую неполноту изложенного почувствуют лица, интересующиеся теорией ферм, так как очевидно приложение теории многоповодковых нормальных цепей к системам ферм, которые могут быть разбиты на отдельные фермочки. Но теоретические заключения классификационного характера здесь настолько очевидны, что вряд ли даже нужно увеличивать объем без того пространной работы соответствующими указаниями. Легко узнать в стропильной ферме, изображенной в I томе Графической статики сооружений Мюллера-Бреслау в переводе проф. Г. Г. Кривошеина (изд. 1908 г., стр. 397, фиг. 457), соединение с основой нормальной цепи, образованной переносом поводков (см. фиг. 84), т. е. цепи первого класса второго семейства. Там же (стр. 425, фиг. 488) изображена мостовая ферма, представляющая нормальную цепь четвертого класса первого семейства с двумя бесповодковыми и одной диагональной цепью, примыкающей обоими своими концами к одному и тому же бесповодковому (подвижные опоры эквивалентны поводкам бесконечной длины). Можно, таким образом, без сложных подсчетов, непосредственно убедиться, будет ли данное образование жесткой, статически определимой фермой, или нет. В главе же об определении давлений в шарнирах и ползушках механизмов будут содержаться все необходимые элементы расчета подобного рода ферм.

На этом мы и заканчиваем ту часть работы, которая имела целью обосновать классификацию плоских стержневых механизмов с низшими парами, и переходим к приложениям этой классификации, позволяющей подвести более солидный и цельный фундамент под общую теорию указанных механизмов, чем до сих пор.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ УЧЕНИЯ О МНОГОПОВОДКОВЫХ НОРМАЛЬНЫХ ЦЕПЯХ К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ



Введение

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

Всякий осуществленный механизм должен служить определенной специальной цели; он должен выполнять какую-нибудь специальную задачу. Такая задача нередко состоит в том, чтобы какая-нибудь определенная точка приводилась в движение по определенной траектории, двигалась бы по ней во времени по определенному закону. При этом одна и та же цель может быть достигнута нередко несколькими различными механизмами, но, с другой стороны, механизм, выполнявший определенную задачу при известных соотношениях между размерами отдельных частей, перестанет ее выполнять, если построить его с другим соотношением размеров. Поэтому при решении каждой специальной задачи, выполняемой известным механизмом, соотношения между размерами частей играют существенную роль, и теоретическое исследование должно сосредоточиться на определении правильных целесообразных соотношений между размерами частей.

Такие исследования производились, причем в основу их клали как геометрический, так и аналитический метод. Теория функций, наиболее приближающихся к данной, открытая и примененная к теории механизмов П. Л. Чебышевым, позволила ему исследовать, какие размеры необходимо придать звеньям простой четырехзвенной цепи, чтобы получить механизм, с данной степенью точности вычерчивающий прямую линию. Такие механизмы употребляются теперь, главным образом, в различного рода самопишущих приборах (индикатор

и т. п.). Та же теория позволила Чебышеву построить другой механизм, одна точка которого описывает кривую, заключающуюся между двумя данными концентрическими окружностями (практическая цель — приготовление розеток на токарном станке). Первая из указанных задач разрешена Бурместером * с помощью крайне сложного, но в то же время глубокого и изящного геометрического анализа.

Различного рода специальные задачи осуществляются также разного рода приборами, в основе которых лежит кинематическая цепь с одной степенью изменяемости (пантограф, инверсор, интеграф и т. п.). Специальные задачи приходится решать также в теории механизмов с избыточными стержнями; избыточный стержень можно вставить лишь в такой механизм, в котором две точки различных, шарнирно не связанных между собой звеньев, остаются на постоянном расстоянии при всех положениях механизма; стоит только изменить соотношение между размерами частей механизма, и таких точек в нем может не оказаться вовсе.

Все указанного рода специальные задачи не будут составлять темы нашего исследования. Общая теория механизмов занимается такими задачами, приемы решения которых совершенно не зависят от той или другой длины стержней, составляющих механизм. Эти приемы остаются теми же для данного механизма и для другого, полученного из него изменением соотношений между размерами отдельных частей. Тем не менее, приемы, приводящие к цели в случае одного или нескольких стержневых механизмов с низшими парами, не дают желательного результата в других случаях, когда приходится иметь дело с другими механизмами.

Очевидно, раз дело не в соотношениях между размерами частей, то различие определяется либо количеством звеньев, либо их расположением, т. е. структурой механизма. В действительности оказывается, что количество звеньев не играет

* Lehrbuch der Kinematik, B. I, 1888, стр. 599—663.

здесь роли. Одни и те же приемы бывают приложимы как в случае большого числа звеньев, так и в случае малого и оказываются неприложимыми при одинаковом числе звеньев. Таким образом, общая теория стержневых механизмов, рекомендуя определенные приемы разрешения известного цикла задач, должна исходить из рассмотрения структуры различного рода механизмов. Исследования в области структуры механизмов составляют тот фундамент, без которого не может и не могла существовать сколько-нибудь стройная теория сложных механизмов, поскольку это касается общих приемов исследования.

То обстоятельство, что до сих пор общая теория плоских механизмов с низшими парами не строилась на фундаменте структурных исследований, привело к тому, что нередко за общий прием выдается ведущий к цели лишь в случае механизмов второго порядка первого класса в нашей терминологии, т. е. механизмов, составленных из кривошипа наслоением двухповодковых групп. Так, например, считается нередко, что теорема Аронгольда дает возможность построить все мгновенные центры как в относительном, так и в абсолютном движении звеньев механизма. Между тем эта теорема приводит просто к цели только в механизмах, составленных из наслоения двухповодковых групп. Более сложно, если механизм составлен из наслоения цепей первого класса (когда речь идет о первом семействе, мы условимся упоминать только класс механизма или цепи), однако при условии, чтобы поводки были прикреплены не более, чем к двум разным звеньям механизма, к которому пристегнута такая цепь. Если же распределение поводков будет иное, чем здесь указанное, то непосредственное приложение теоремы не даст вовсе возможности построить мгновенные центры механизма. Для этого последнего случая Бурместер * дает прием ложных положений, решающий задачу, когда имеем дело с трехповодковой группой. Аналогичный прием, по нашему мнению, легко может быть изобретен для

* Lehrbuch der Kinematik, 1888, § 195.

случая четырехповодковой и, с известной вероятностью, вообще для случая цепей первого класса; во всяком случае, это — далеко не общий прием.

Весьма характерным для приема изложения вопросов общей теории механизмов, приема неправильного, но нередко встречающегося, вследствие зыбкости основ, на которых она построена, является глава о построении картин скоростей в книжке: Durley «Kinematics of machines», изд. 1907 г. В § 50 указывается на неудобства метода определения скоростей точек механизма с помощью мгновенных центров и затем говорится: «Чтобы избежать этих затруднений, изобретен общий прием изображения картин скоростей и ускорений точек механизма». После того, как этот общий прием продемонстрирован на ряде примеров, в следующем параграфе приводится пример механизма (кулиса Стефенсона), к которому этот общий прием неприменим. То, что выдавалось за общий прием, есть прием, пригодный только для механизмов, составленных наслоением двухповодковых групп, а в кулисе Стефенсона имеется трехповодковая; вот и нужно применить поэтому особый прием.

Не везде и всюду так явно высказано что̀ считается общим приемом, пригодным только для механизмов, составленных из групп двухповодковых; но часто это бывает заметно по общему стилю изложения. Однако не только в учебники, но и в серьезные статьи вкрадывается та же ошибка. Так, например, Виттенбауер * в одной из своих статей, посвященных построению ускорений барицентрическим методом, говорит: «Основная задача о построении ускорения любой точки кинематической цепи в общем случае и относительно любого звена последней до сих пор оставалась нерешенной. Предлежащий труд имеет целью дать решение этой важной задачи кинематики».

Стоит только просмотреть приведенные примеры, чтобы убедиться, что прием считается общим, потому что он без исключения приводит к результату для двухповодковых меха-

* Civilingenieur. B. 42. 1896, стр. 56. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittelung.

низмов. Такое заблуждение не прошло незамеченным, и также отмечено Роденбергом, который указывает, что Виттенбауер не удосужился рассмотреть трехповодковый механизм (тот единственный трехповодковый восьмизвенный механизм, который, будучи указан Риттерсгаузом и Бурместером, постоянно служил камнем преткновения для разных «общих приемов» в теории механизмов). Правда, Виттенбауер сумел до известной степени оправдаться ссылкой на другую статью *, в которой можно найти все необходимое для разрешения вопроса и относительно этого механизма, но теперь мы знаем, что все разнообразие механизмов далеко не исчерпывается только механизмами двухповодковыми и трехповодковыми.

Последнее обстоятельство было известно, конечно, и до появления первой части нашего труда, посвященной классификации механизмов. Мор не ограничивается указанием приемов построений скоростей и ускорений, пригодных для механизмов двух- и трехповодковых, но предвидит теоретически универсальный прием **, основанный на превращении механизма в систему с несколькими степенями свободы выбрасыванием некоторых стержней и комбинировании различных возможных движений полученной системы таким образом, чтобы получилось то же самое движение, которое совершают оставшиеся стержни в механизме. Не говоря о том, что вопрос о надлежащей комбинации этих движений разрешается только решением системы уравнений, правда, линейных, а не непосредственным применением графических приемов, но практическое приложение его является скорее искусством, чем решением задачи.

Вопрос о том, какие стержни нужно выкинуть, сколько стержней нужно выкинуть, какие движения комбинировать, остается вполне открытым. Он и не мог быть решен Мором, потому что ответ на эти вопросы связан теснейшим образом со структурой данного механизма. Между тем до сих пор все механизмы, не образованные наслоением двухповодковых и

* Zeitschr. f. Math. und Physik, B. 40.

** Mohr. Abhandlungen aus d. Geb. der techn. Mech. IV, 10.

трехповодковых групп, смешивались в одну кучу, в которой не было возможности соединить сходные объекты в группы какого бы то ни было наименования, а потому не было определенных объектов, к которым можно было бы приложить те или иные приемы исследования.

Вот тут-то и должна послужить путеводной нитью изложенная в первой части нашего труда классификация, которая, с одной стороны, позволила нам разбить механизмы на семейства, классы, разряды, порядки, установив определенные признаки разнообразных групп. С другой стороны, в основу различения нами положены именно структурные особенности. Само собой разумеется, что наши исследования могут итти лишь не дальше, чем разобраны подробно признаки элементов, положенных нами в основу образования механизмов, т. е. нормальных многоповодковых цепей. Разбираться поэтому мы будем лишь в механизмах, составленных наслоением таких цепей не выше разобранных нами типов четвертого класса. Конечно, и здесь могут встретиться непреодолимые затруднения, так как приемы исследования приходится вырабатывать заново, по крайней мере, заново их приспособлять к определенным типам.

Мы остановимся на круге задач, которые предполагаем подвергнуть своему исследованию во второй части нашего труда. Число поставленных нами задач невелико. Мы имеем лишь в виду приемы решения следующего цикла вопросов:

1) Построение картины бесконечно малых перемещений точек механизма, или картины скоростей его точек.

2) Распределение давлений в шарнирных сочленениях механизма под действием уравновешенной системы сил.

3) Картины ускорений точек механизма.

4) Картины конечных перемещений точек механизма или построение траекторий его точек.

Можно думать, что здесь идет речь только о кинематике и статике механизмов. Между тем в этих вопросах заключается также решение основных вопросов динамики механизмов, поскольку механизмом считаются лишь устройства с одной

степенью свободы. Для подобного рода систем вопрос о том, какое произведет движение данная система сил, величина которых зависит только от положения системы, как известно, сводится к квадратуре; последняя может быть произведена либо графическими приемами, либо механическими с помощью особых приборов. И все же решение задачи на деле оказывается не столь простым, как в теории. Если за параметр системы принята некоторая величина q, то живая сила T системы в форме Лагранжа может быть изображена в виде:

$$T = 1/2F(q)\,q'^2,$$

где q' условимся называть скоростью параметра.

Если сумму работ сил, приложенных к точкам системы при изменении q от значения q_0 до q, обозначим через A, скорость параметра для значения $q = q_0$—через q_0', то закон живой силы даст нам соотношение:

$$F(q)\,q'^2 - F(q)\,q_0'^2 = 2A\,.$$

Величина правой части указанного соотношения определяется просто. Известно, что всякую силу, приложенную в какой-либо точке механизма, можно заменить другой силой, приложенной в данной точке механизма и имеющей направление, совпадающее с направлением скорости данной точки. Решить практически последнюю задачу можно лишь в случае механизма, для которого возможно построить либо диаграмму скоростей точек, либо определить положение мгновенных центров. Но раз эта задача решена для ряда положений механизма, то, принимая за величину параметра путь, пройденный точкой приложения равнодействующей всей системы сил, приложенной в данной точке, и откладывая его по оси абсцисс, в то время, как по ординатам будет откладываться величина значений равнодействующей, измерением соответствующей площади определим величину A для всякого положения механизма.

Что касается значений функции $F(q)$, то определить их методом, рекомендуемым чистой теорией, нет никакой

возможности. Стоит только попробовать выразить через какой-либо параметр значения координат шарнирных точек даже простейшего стержневого механизма, в основе которого лежит простая четырехзвенная цепь, чтобы убедиться, насколько здесь сложна задача нахождения этим классическим путем вида функции $F(q)$. В более же сложных случаях можно рекомендовать и не пытаться; если решение и будет возможно, то оно будет слишком сложно, чтобы претендовать на практическую пригодность. Большая заслуга Виттенбауера * состоит в том, что он указал новый путь определения численных значений этой функции при разных положениях механизма, присвоив ей в то же время новое наименование приведенной массы. Последнее можно рекомендовать только в случае, когда действительно за параметр принят путь, пройденный точкой приложения равнодействующей. Если же за параметр принять угол поворота звена, что часто удобнее, то правильнее будет говорить о приведенном моменте инерции.

Так или иначе назовем функцию $F(q)$, но численное ее значение для каждого положения механизма может быть найдено, если пользоваться только картиной скоростей точек механизма. При этом вся сущность этого метода заключается в том, что построить надо не действительную картину скоростей, соответствующую движению механизма под действием данных сил, а совершенно произвольную, задавшись величиной скорости одной из его точек, направление которой известно.

Допустим, что за параметр принята длина пути, проходимого этой точкой; тогда скорость ее будет q'. Разобьем живую силу каждого звена на две составляющие: на живую силу центра тяжести, скорость которого для i-го звена назовем v_i, а массу звена m_i при угловой скорости его ω_i и моменте инерции около центра тяжести S_i, и на живую силу при вращении около центра тяжести. Напишем выражение для суммарной живой силы всего механизма в виде:

* Graphische Dynamik der Getriebe. Zeitsch. f. Math. u. Phys., B. 50.

$$T = 1/2 \sum_i [m_i v_i^2 + I_i \omega_i^2] .$$

Чтобы определить здесь значение суммы, необходимо знать действительные значения линейных и угловых скоростей. Желая от них избавиться, помножим и разделим все выражение на q'^2; получим:

$$T = 1/2\, q'^2 \sum_i \left[m_i \left(\frac{v_i}{q'}\right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{q'}\right)^2 \right] .$$

Очевидно, что то, что стоит под знаком суммы, есть не что иное, как численное значение функции $F(q)$. Величина же дробей, стоящих в круглых скобках, не изменится, если на место действительных скоростей поставим фиктивные, получающиеся при некотором произвольно избранном, отличном от q' значении скорости параметра, так как отношение скоростей двух точек системы с одной степенью свободы есть величина постоянная для данной системы. Действительное значение q' определяется после этого для каждого положения механизма из уравнения живых сил, раз дано q_0' и определено A. Зависимость между q и временем получается после этого с помощью известной квадратуры.

Таким образом, решение вопросов статики и динамики механизмов оказывается тесно связанным с возможностью построить картину скоростей для данного механизма.

Вопрос о давлениях в шарнирах механизма и напряжениях, возникающих в стержнях его во время движения, определяется по законам статики, если известны силы инерции. Для определения величин сил инерции мало построить картину скоростей для данного положения механизма, мало определить и его движение под действием данной системы сил; необходимо еще построить картину ускорений.

Так как все указанные операции приходится делать для ряда положений механизма, то необходимо уметь находить,

задавшись положением его кривошипа (одного из звеньев, связанных шарнирно с основой), положения остальных точек или звеньев механизма. Эта задача, очевидно, тождественна с построением конечных перемещений точек механизма. Хотя этой последней задаче придают маловажное значение, считая, обычно, что она решается элементарным применением циркуля и линейки, но это справедливо лишь в отношении механизмов двухповодковых. Для механизмов трехповодковых эта задача уже значительно сложнее, а для более сложных механизмов она является одной из сложнейших, и даже там, где она теоретически разрешается, практическое выполнение указаний теории настолько громоздко, что можно смело рекомендовать строить для первого приближения хотя бы грубую модель с изменяемым соотношением частей, вместо того, чтобы выполнять предварительное исследование на бумаге. Недаром же существуют на заводах дорого стоящие модели для проектирования кулисы Гейзингера; одна такая модель приобретена и нашим Институтом для нужд студентов Механического отделения.

Быть может кому-либо бросится в глаза, что мы совершенно упустили из виду классические задачи общей теории механизмов: построение мгновенных центров скоростей и ускорений звеньев. Действительно, был период, где без решения этих задач нельзя было строить ни скоростей, ни ускорений точек механизма; требовалось еще знание свойств поворотного круга и полюса поворота, соотношений между центрами кривизны огибающих и огибаемых при движении звена. Все это было настолько сложно, что приемы с большим трудом укладывались в памяти и обычно, несмотря на многократное решение различного рода практических задач, приходилось все же, во избежание ошибок, работать с книжкой под руками, чтобы в чем-нибудь не ошибиться. В настоящее время моровский прием построения скоростей и ускорений, в некоторых частностях усовершенствованный и дополненный автором настоящей работы на страницах наших же «Известий», решает ту же задачу, требуя от инженера лишь знания основных законов кинематики

о сложении движений *. Если же кому-нибудь понадобится найти нередко лежащие, при сколько-нибудь сносном масштабе чертежа, на несколько аршин за пределами чертежа центры скоростей и ускорений, то это можно сделать, имея под руками готовую картину скоростей и ускорений, которая позволит кратчайшим путем найти и полюс поворота, и поворотный круг, и центры кривизны траекторий.

Если в настоящее время построение мгновенных центров скоростей еще входит в общепринятую программу технических учебных заведений, то это можно оправдать лишь той медлительностью, с которой новые идеи проникают в жизнь. В инженерной литературе еще не скоро исчезнут старые, обреченные на отживание приемы решения различных задач, и до тех пор необходимо, чтобы учебные заведения знакомили с этими приемами. Последний смертельный удар популярности задачи о построении мгновенных центров нанес, по нашему мнению, профессор Н. Е. Жуковский в 1911 г.** До того времени существовала одна задача, где знание мгновенных центров хотя и не было необходимо, но именно в сложных случаях сильно упрощало решение ее. Это есть упомянутая выше задача о нахождении равнодействующей данной системы сил, приложенных к точкам механизма. Н. Е. Жуковский показал, что и эта задача решается просто и изящно, если пользоваться только картиной скоростей механизма**.

* К сожалению, автор должен сознаться, что при исследовании движения более сложных форм багаж этот требует пополнения сведениями из проективной геометрии: теория линейных пучков и рядов считается известной; но обременительными для памяти самые приемы, несмотря на сложность теории, назвать все же нельзя.

** Сведѐние динамических задач о кинематической цепи к задачам о рычаге. Московский математический сборник, т. 28.

Глава первая

КАРТИНЫ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК МЕХАНИЗМА. ЧИСТО ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

Существует две тождественных по идее, но различных по расположению и приемам выполнения методы изображения картин скоростей точек плоского механизма. В настоящее время наибольшей популярностью пользуется прием Мора, который действительно заслуживает предпочтения, если, кроме картины скоростей, требуется построить еще и картину ускорений точек плоского механизма. Причиной этого служит то обстоятельство, что картина скоростей, построенная по Мору, содержит не только все абсолютные, но и все относительные скорости точек. Этим последним свойством не обладает картина скоростей, построенная по методу Бурместера; последняя поэтому и не является картиной скоростей в полном смысле этого слова, так как содержит только абсолютные скорости точек. Конечно, имея абсолютные скорости, легко найти и относительные, но для каждой пары точек нужно будет еще выполнить некоторое дополнительное построение. Тем не менее, если требуется только определить абсолютные скорости точек, то оба метода одинаково удобны.

Некоторые изменения в методу изложения приема Мора, имеющие не столько практическое, сколько методическое значение, были введены мною *; при этом указан новый прием построения, относящийся к механизмам, содержащим трехповодковую группу, тоже еще без указания роли самой группы

* «Известия», т. IX, вып. II. Аналоги ускорений, глава I.

в образовании механизмов. Для этой же группы дан новый прием построения ускорений ее точек; в особенности же упрощено построение ускорений точек механизмов, содержащих ползушки, двигающиеся в прорезах подвижных звеньев механизма или вдоль стержней последнего, использованием свойств добавочного ускорения.

С тех пор, по приглашению покойного профессора В. Л. Кирпичева, началось мое руководство работами студентов в области теории механизмов. В результате накопившегося здесь опыта была выпущена брошюра *, в которой приемы, относящиеся к построению скоростей и ускорений точек механизмов, содержащих только двух- и трехповодковую группу, изложены с наибольшей полнотой и методичностью. Указания этой брошюры относительно различия в приемах, когда пара вращения заменяется парой скольжения, я считаю достаточными, чтобы здесь говорить только о случае механизмов, содержащих шарнирные соединения. О приеме Бурместера построения скоростей в брошюре не говорится вовсе, равным образом не говорится о приемах, которые можно бы применить в случае каких-либо более сложных механизмов, чем только что указанные, основанных на комбинациях движений систем с несколькими степенями свободы и решении системы линейных уравнений.

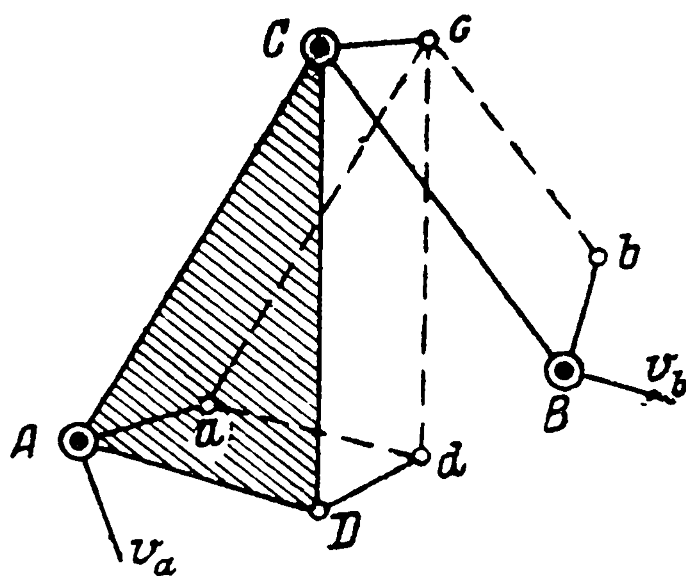
Ввиду необходимости установить связь между существовавшим до сих пор и тем новым, которому посвящена настоящая глава, нам придется все же остановиться вкратце на основах построения картин скоростей. Начнем с видоизмененного приема Мора.

Если мы от общей точки отложим векторы, изображающие скорости некоторого числа точек механизма, то группа точек, обозначающих концы этих векторов, образует то, что называется, по Мору, картиной скоростей соответствующих точек механизма. Обычно обозначают точки механизма заглавными

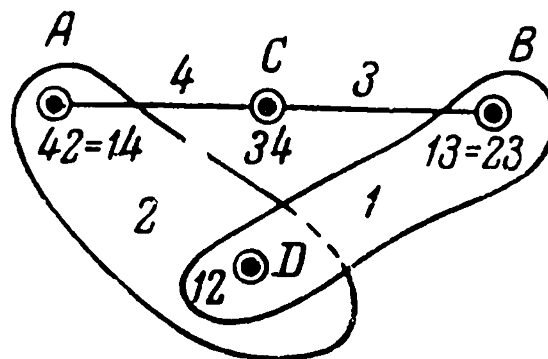
* «Картины скоростей точек плоского механизма». Изд. Кассы взаим. студ. Политехн. института.

латинскими буквами, точки картины скоростей одноименными с ними — строчными. Проф. Н. Е. Жуковский в упомянутой выше статье предложил называть точки картины скоростей изображающими по отношению к соответствующим точкам механизма, термин, по нашему мнению, весьма удачный и облегчающий изложение.

В основу построения картины скоростей стержневых систем могут быть положены следующие две теоремы.



Фиг. 88.



Фиг. 88а.

I. Для случая движения неизменяемого звена в плоскости изображающие точки картины скоростей образуют фигуру, подобную той, которую составляют точки звена, но повернутую на прямой угол.

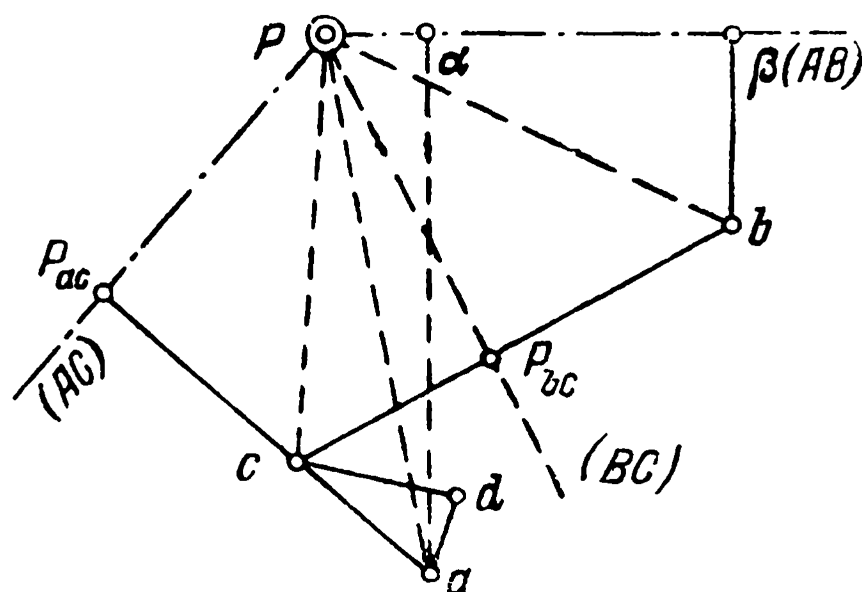
II. Ортогональные проекции скоростей точек неизменяемой прямой на направление последней одинаковы для всех точек прямой *.

Мы начнем с построения скоростей точек механизма, образованного из кривошипа наслоением двухповодковых групп. Для этого достаточно построить скорости точек обоих поводков двухповодковой группы, если даны скорости шарнирных точек, которыми такая группа должна примкнуть к другим звеньям механизма. Допускаем, что свободные концы поводков, форма

* Собственно говоря, здесь не две теоремы, а одна, так как каждая из них является следствием другой; но иногда бывает удобнее пользоваться одной, иногда другой формулировкой.

которых может в общем случае быть самая разнообразная, будут A и B (фиг. 88), общий шарнир, которым поводки соединяются между собой, назовем C; D будет некоторая, произвольно намеченная точка одного из поводков.

Задача представится в таком виде: даны скорости точек A и B, построить скорости точек C и D. Данные скорости назовем соответственно v_a и v_b и отложим их от общего полюса P (фиг. 89) в виде отрезков Pa и Pb; через тот же полюс проведем прямые, параллельные AC и BC, которые обозначены (AC) и (BC); на эти последние прямые проектируем векторы Pa и Pb, причем, по теореме II, получим тем самым проекции на эти направления скорости точки C, которая определится по двум своим проекциям на два различных направления; проекции точек a и b на указанные направления назовем P_{ac} и P_{bc}. Точка d картины скоростей получится построением на стороне ac треугольника, подобного треугольнику ACD.



Фиг. 89.

Изображающие прямые картины скоростей вычерчены у нас сплошными линиями и, по первой теореме, будут все повернуты на прямой угол сравнительно с изображаемыми ими. Это обстоятельство позволяет вовсе не применять вторую теорему и не находить точек P_{ab} и P_{ac}, чем облегчится значительно работа построения. Но для теоретических исследований чрезвычайно удобно базироваться на второй теореме: она позволяет вести все рассуждения, относящиеся к построению, в самом общем виде, без выполнения чертежа картины скоростей. Для примера разберем, какие могут представиться особые случаи. Скорость точки C определяется по двум проекциям на

направления (AC) и (BC); очевидно, что пока эти направления различны, скорость этой точки определится, и каких-либо особых случаев не может быть. Но если эти направления совпадут, то возможны два случая; если проекции окажутся равными, задача окажется неопределенной; если же они не равны, то скорость точки C должна оказаться бесконечно большой. Очевидно, что особые случаи представятся тогда и только тогда, когда три точки A, B и C окажутся лежащими на одной прямой. Здесь следует различать мертвые положения и отличные от них положения с неопределенностью движения (Verzweigungslagen, Wechsellagen).

Случай мертвого положения изображен на фиг. 88а. Здесь *1* и *2* — два звена механизма, к которым соответственно прикреплены поводки, обозначенные цифрами *3* и *4*; D — мгновенный центр в относительном движении звеньев *1* и *2*; четыре мгновенных центра *12*, *13*, *34*, *42*, образующие полюсный четырехугольник Аронгольда, совпадают соответственно с точками D, B, C, A. Пересечение двух противолежащих сторон этого четырехугольника определяет относительный мгновенный центр звеньев, образующих две другие стороны; очевидно, что центр *13* сливается с центром *23* и центр *14* с центром *42*; другими словами, звенья *1* и *2* движутся, как одно жесткое целое. Если кинематическую цепь, лежащую в основе такого механизма, поставить на звено *2*, то сила, приложенная к звену *1*, не была бы в состоянии привести механизм в движение; последнее обстоятельство и является основной характеристикой мертвых положений.

Положение не будет мертвым в только что указанном смысле слова, если и точка D окажется на одной прямой с точками A, B и C, потому что тогда положение мгновенных центров *23* и *14* станет неопределенным. Неопределенность эту можно раскрыть и сущность ее сводится к тому, что определится два различных положения каждого из мгновенных центров; положение центра *13* будет зависеть от того, будут ли в дальнейшем звенья *2* и *3* вращаться в одну сторону относительно звена *1*, или

в разные. В первом случае центр *23* будет лежать между точками A и D, во втором — вне их *.

Случай, когда обе проекции на направление ABC различны, имеет отличное от математического физическое толкование. Когда указанные три точки располагаются на одной прямой, то расстояние между ними будет либо наибольшим, либо наименьшим, и потому длина AC является нерастяжимым и несжимаемым отрезком; условие нерастяжимости и несжимаемости именно и лежит в основе теоремы II. В нашем случае это условие не выполняется, так как проекции неравны, и потому должен иметь место разрыв поводков.

Мы видим, таким образом, что в этом случае изучение картины скоростей дало нам возможность выделить единственное особое расположение двухповодковой группы. Мы уже высказали в первой части нашей статьи предположение, что более глубокое изучение свойств картины скоростей в различных случаях даст нам возможность установить особые положения для нормальных многоповодковых цепей. Мы не обещали решить эту задачу в предыдущей статье; поэтому здесь прямая цель наша будет состоять в том, чтобы дать методы построения картины скоростей, когда таких особых случаев нет налицо. Однако в простейших случаях мы попутно все же будем указывать и особые расположения, раз исследование их не обещает завести нас слишком далеко.

Для построения точек той же двухповодковой группы Бурместер применяет метод отвесных скоростей. Термином отвесной скорости Бурместер предлагает называть вектор, приложенный в движущейся точке, равный по величине вектору, изображающему ее скорость, но повернутый относительно последнего в определенную сторону (скажем, по направлению движения часовой стрелки) на прямой угол. В этом случае изображающими точками будут концы векторов отвесных скоростей, которые и отмечены строчными буквами (см. фиг. 88).

* Подробный разбор подобных случаев см. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, § 52.

По теореме II изображением неизменяемой прямой будет прямая, ей параллельная, а изображение неизменяемого звена будет ему подобно. Построение скорости точки C сведется к проведению прямых ac и bc, соответственно параллельных прямым AC и BC. Построение точки d очевидно из чертежа.

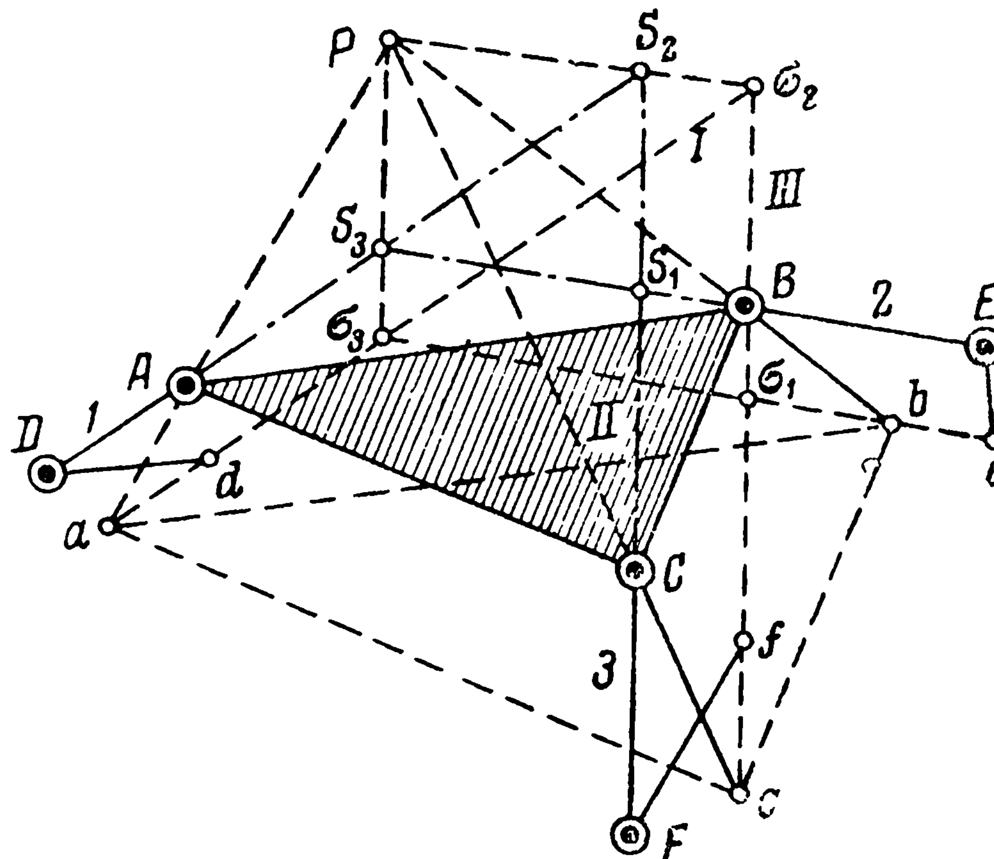
Для построения Бурместера, подкупающего своей простотой, требуется только проведение параллельных; но картина скоростей, построенная по его способу, не обладает той полнотой, которой обладает картина Моора. В последней отрезок, соединяющий две точки картины скоростей, представляет собой геометрическую разность абсолютных скоростей двух точек, т. е. их относительную скорость (скорость одной из них в поступательно движущейся системе координатных осей, начало которой помещается в другой). Здесь легко определить скорость, с которой изменяется расстояние между двумя точками: проекция изображающего отрезка прямой на направление изображаемой прямой дает нам величину этой скорости. На фиг. 89 отрезок $\alpha\beta$ представляет собой скорость, с которой изменяется расстояние между точками A и B. Наконец, отношение отрезков изображающего и изображаемого определяет нам угловую скорость вращения неизменяемой прямой и звена, в котором последняя взята. Все это требует, при применении способа Бурместера, дополнительных построений. С другой стороны, можно свести построение картины скоростей по Мору к проведению ряда параллельных, если повернуть всю картину на прямой угол, что следует из теоремы I; так рекомендует ее строить проф. Н. Е. Жуковский *.

Следует еще отметить, что полюс P картины скоростей (см. фиг. 89) служит изображающей точкой мгновенных центров в абсолютном движении всех звеньев; по Бурместеру же мгновенный центр звена определяется как точка пересечения отвесных скоростей двух его точек.

Указанные построения решают вопрос об определении скоростей точек любого механизма, составленного наслоением одних

* В дальнейшем мы так и будем всюду поступать.

только двухповодковых групп, предполагая, что движение кривошипа такого механизма дано. В самом деле, отделяем сначала по очереди одну двухповодковую группу за другой, пока не останется один кривошип. Скорость точек последнего известна. Прикрепляя теперь к нему первую двухповодковую группу концом одного поводка, знаем скорость конца одного поводка: скорость другого будет равна нулю, так как он будет прикреплен к неподвижной основе, скорость любой точки поводков первой группы может быть построена. Концы поводков следующей группы могут быть укреплены оба в подвижных точках, скорости которых уже установлены, после чего определяются скорости точек вновь присоединяемой группы и т. д.



Фиг. 90.

Переходим теперь к построению скоростей трехповодковой группы. Будем предполагать, что она присоединяется к механизму, скорости точек которого известны; тогда будут известны скорости концов ее поводков. Задача допускает три различных решения, принадлежащих Бурместеру *, Мору и мне.

Первый из этих приемов сводится к следующему. Допустим, что *ABC* (фиг. 90) представляет собой звено трехповодковой группы; *1*, *2* и *3* — его поводки, концы которых *D*, *E*, *F*, *Dd*, *Ee*, *Ff* — отвесные скорости концов поводков. Точки *a*,

* Это построение Бурместер приводит не в отделе, посвященном изучению свойств его трехповодкового механизма, а в отделе, посвященном рассмотрению приборов (Lehrbuch der Kinematik, § 245).

b и *c* картины скоростей должны в таком случае лежать на трех прямых, соответственно параллельных направлениям поводков и проходящих через точки *d*, *e*, *f*; прямые эти названы *I*, *II*, *III*; кроме того, треугольник *abc* должен быть подобен треугольнику *ABC* и соответственные стороны обоих треугольников должны быть параллельны. Поставленная задача решается следующим образом. Три прямые *1*, *2* и *3*, попарно пересекаясь, определяют вершины треугольника S_1 S_2 S_3; три других прямые *I*, *II*, *III* точно таким же образом определяют треугольник σ_1 σ_2 σ_3. Очевидно, оба полученных треугольника подобны, а ввиду параллельности их сторон сходственные их вершины лежат на трех прямых, сходящихся в одной точке *P*. Чисто геометрически доказывается, что три прямые, определяемые сходственными вершинами двух других подобных треугольников, данного *ABC* и искомого *abc*, пересекаются в той же точке *P*. Таким образом, проведя из *P* прямые, на которых должны лежать вершины искомого треугольника, в пересечении прямых *PA* и *I* получаем точку *a*, прямых *PB* и *II* — точку *b*, прямых *PC* и *III* — точку *c*.

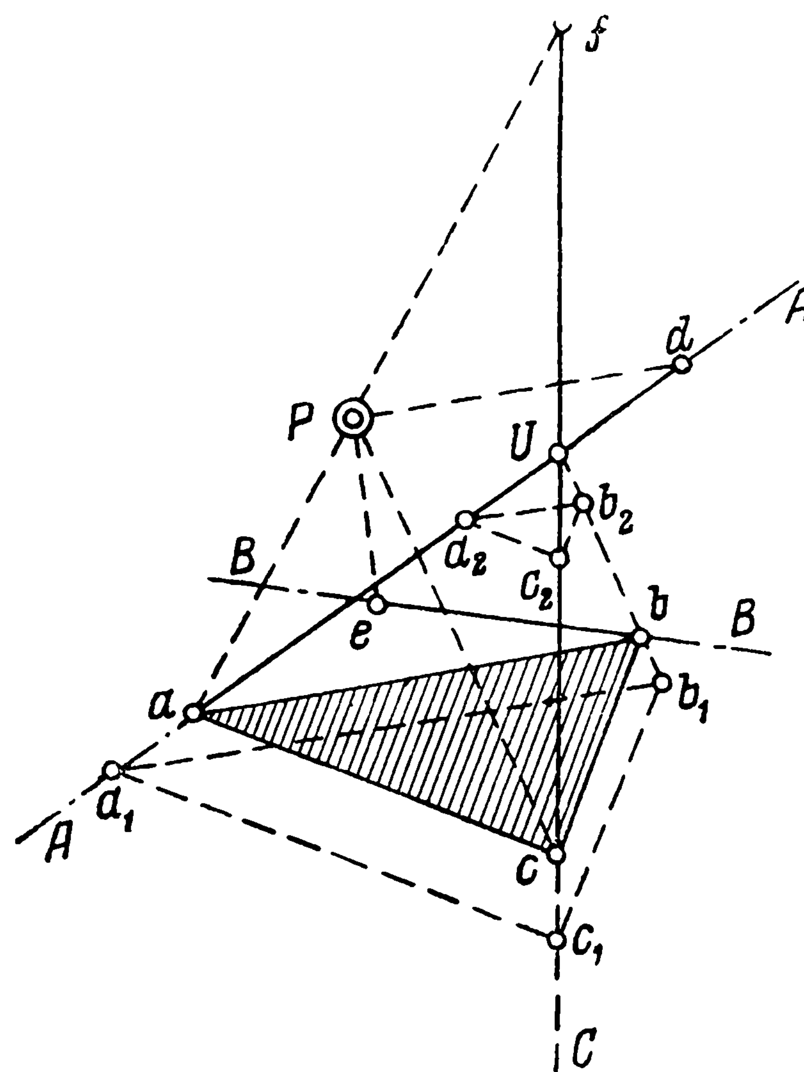
Указанный прием обладает крупным неудобством: в построении участвуют целых пять точек, которые могут оказаться лежащими вне пределов чертежа, именно пара точек *S*, пара точек σ и точка *P*. Если из них только две лежат вне пределов чертежа, то построение выполнимо, при большем же числе результата получить не удается.

Только что указанная задача о построении треугольника, подобного данному, три вершины которого лежат на трех данных прямых и направление сторон которого известно, более удачно решена Мором. Рассматривается она у Мора * в связи с движением неизменяемой фигуры в плоскости при решении вопроса о том, какими данными можно при построении картины скоростей такой фигуры задаваться произвольно. О движении трехповодковой группы, как таковой, ничего не говорится, но

* Abhandlung, IV, § 2.

прилагается прием к построению скоростей точек трехповодкового механизма Бурместера.

Откладывая от полюса P отвесные скорости Pd, Pe, Pf концов поводков, замечаем (фиг. 91), что изображения точек a, b, c вершин треугольника ABC должны лежать соответственно на трех прямых A, B и C, проходящих через d, e и f и параллельных направлениям поводков *1*, *2*, *3*; стороны же изображающего треугольника должны быть параллельны сторонам изображаемого. Выбираем на прямой A положение вершины a произвольно и это ложное положение ее называем a_1; проводим a_1c_1 параллельно AC до пересечения с прямой C, на a_1c_1 строим треугольник, подобный ABC и сходственно с ним расположенный. Так как положение точки a_1 выбрано наугад, то, конечно, точка b_1 не упадет на прямую B, что и обнаружит ложность нашего построения.

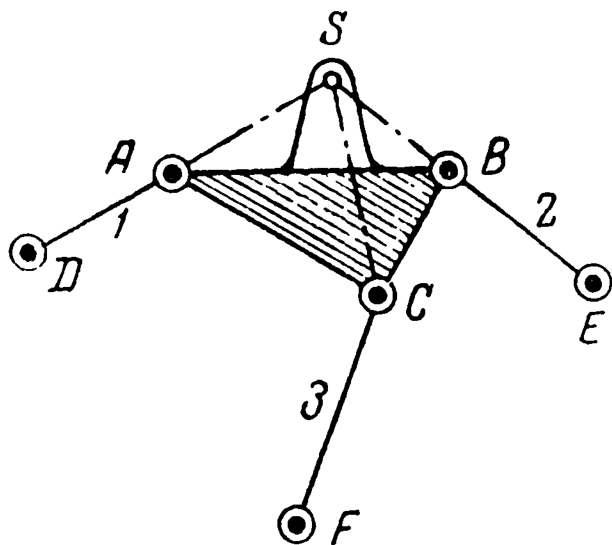


Фиг. 91.

Считая теперь треугольник $a_1b_1c_1$ подобоизменяемым, придадим ему поступательное движение, при котором вершины a_1 и c_1 будут двигаться по прямым A и C. Как известно, тогда вершина b_1 будет описывать тоже прямую, проходящую через точку пересечения U первых двух. Когда при этом вершина b_1 займет положение b на прямой B, соответствующая фаза изменяемого треугольника как раз удовлетворит всем требованиям, предъявляемым к изображающему треугольнику; поэтому точка b определится как пересечение прямых b_1, U и B. Построение всего изображающего треугольника после этого

закончить уже легко. Если бы точка U лежала за пределами чертежа, то прямую b_1U все же провести легко, стоит только начертить вторую фазу $a_2b_2c_2$ подобоизменяемого треугольника.

Переходим к третьему из приемов, основанному на непосредственном применении теоремы II. Зная скорости концов D, E и F поводков, определяем их проекции на направления соответствующих поводков *1*, *2*, *3* (фиг. 92), которые будут в то же время проекциями на те же направления скоростей точек ABC. Таким образом, известно по одной проекции скоростей каждой из этих точек. Если направления двух поводков, скажем *1* и *2*, продолжим до пересечения в точке S, то для этой точки неизменяемой фигуры ABC будут известны проекции скорости ее на оба только что указанных направления, поэтому скорость точки S определится[4]. Взяв проекцию найденной скорости на направление SC, определяем тем самым проекцию на то же направление скорости точки C; вторая ее проекция на FC известна. По скоростям двух точек неизменяемой системы с помощью теоремы I строим скорости остальных точек.



Фиг. 92.

Очевидно, что указанная здесь идея будет приложима одинаково, будем ли мы выполнять картину изображающих точек в расположении Бурместера или Мора. В первом из этих расположений заметим, что точка S_3 (см. фиг. 91) соответствует точке S (см. фиг. 92) и отрезок $S_3\sigma_3$ изображает ее отвесную скорость. Нет надобности находить точки P, S_1, S_2, σ_1, σ_2, нужно только через σ_3 провести прямую, параллельную S_3C, которая на прямой III засечет точку c. Построение удастся довести до конца независимо от того, лежит ли точка σ_3 в пределах чертежа или вне их.

Думается, что нет надобности воспроизводить чертеж в расположении Мора.

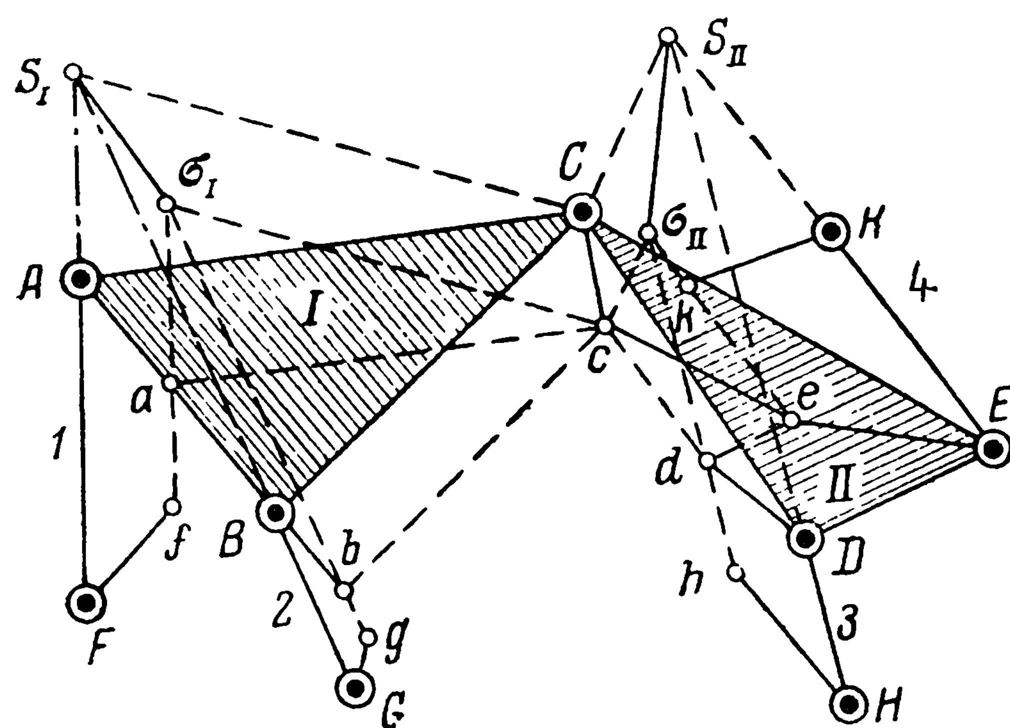
Указанными здесь построениями исчерпывается все, что до сих пор было известно о чисто графических приемах построения скоростей точек механизма. Мы видим, что в этом вопросе, как и во всех остальных общих вопросах теории механизмов, последняя исчерпала лишь то, что относится к механизмам, составленным наслоением двух- и трехповодковых групп. За этим идет «девственная почва».

Прежде, однако, чем перейти к дальнейшим, совершенно новым исследованиям, остановимся на особых положениях трехповодковой группы. Скорость точки S (см. фиг. 92) определяется по своим проекциям на два различных направления. Направления эти могут совпасть в случае параллельности поводков *1* и *2* (см. фиг. 92). Здесь точка S удалится в бесконечность; при расположении мгновенного центра в конечной части плоскости скорость бесконечно удаленной точки должна равняться бесконечности, поэтому вполне возможен и нормален случай неравных проекций на одно и то же направление. Если поэтому третий поводок не параллелен первым двум, то нужно за точку S принять только точку пересечения какой-либо другой пары поводков. Если же все три поводка параллельны, то случай будет особенным, как сейчас увидим.

Пока же рассмотрим другой особый случай. Скорость точки C определяется по проекциям на направление поводка *3* и прямой SC. Если эти два направления сливаются, то это показывает, что направления трех поводков пересекаются в одной точке; параллельность всех трех поводков является частным случаем этого более общего расположения. В этом случае скорость точки F не может быть задана произвольно; скорость точки S определяется вполне по заданным скоростям точек D и E, а проекция скорости точки F должна давать такую же проекцию на направления поводка *3*. Если точки D,E и F укрепить неподвижно, то треугольник ABC не будет неподвижен, но может совершать бесконечно малый поворот около точки S.

Ввиду того значения, которое четырехповодковая группа имеет в применении к кулисному механизму Гейзингера, мы

рассмотрим отдельно построение скоростей ее точек. Предварительно уясним себе схему такого построения. Если даны скорости концов поводков F, G, H, K, то, проектируя их на направления соответствующих поводков *1*, *2*, *3*, *4*, получим проекции на эти направления скоростей точек A, B, D, E звеньев I и II (фиг. 93) четырехповодковой группы. В пересечении пары поводков, принадлежащих одному и тому же звену, получаем точки S_{I} и S_{II} звеньев. Скорости этих добавочных точек могут быть найдены, так как для каждой из них известны две проекции скорости на направления соответствующих поводков. После этого определится скорость точки C по двум своим проекциям на направления $S_{\mathrm{I}}C$ и $S_{\mathrm{II}}C$. Для каждой из остальных двух вершин каждого из треугольников I и II одна проекция скорости уже известна, вторая же получится, как проекция скорости точки C на направление прямой, соединяющей ее с соответствующей вершиной.



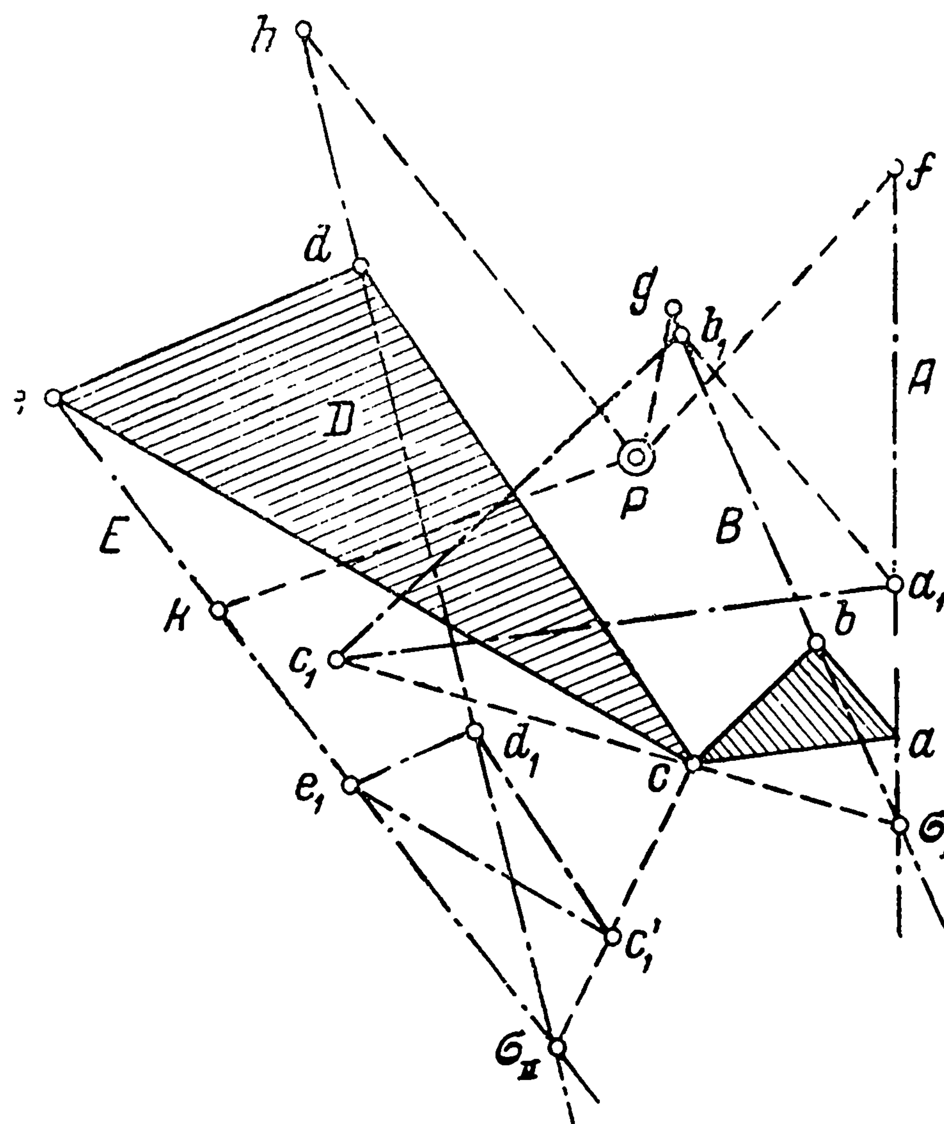
Фиг. 93

Приступая к описанию построений, заметим, что эти построения получаются одинаковыми * как при расположении Бурместера, так и при расположении Мора, если только последнее повернуть на прямой угол (т. е. строить картину отвесных скоростей).

---

* Это замечание применимо ко всем случаям, почему в дальнейшем строятся только картины скоростей в расположении Мора. Последнее предпочитаем ввиду того, что оно позволяет пользоваться более крупным масштабом, чем достигается бо́льшая ясность.

Даны положения изображающих точек f, g, h, k (фиг. 93 и 94). Проводим через f и g прямые, соответственно параллельные FS_{I} и GS_{I}, которые своим пересечением определяют точку σ_{I}; прямые через h и k параллельные направлению соответствующих поводков *3* и *4*, определяют точку σ_{II}; прямые через σ_{I} и σ_{II}, соответственно параллельные $S_{\mathrm{I}}C$ и $S_{\mathrm{II}}C$, пересекаются в точке c; из точки c проводим прямые, соответственно параллельные CA, CB, CD, CE, которые засекают на прямых $f\sigma_{\mathrm{I}}$, $g\sigma_{\mathrm{I}}$, $h\sigma_{\mathrm{II}}$, $k\sigma_{\mathrm{II}}$ точки $a\,b\,d\,e$.



Фиг. 94.

На фиг. 94, кроме того, указано, как применять метод ложных построений. Когда нанесены четыре изображающих точки f, g, h, k, определяются четыре прямые A, B, D, E, на которых соответственно должны лежать изображающие точки a, b, d, e. Наметив на A и E произвольно положения точек a и e, которые, в отличие от истинных, назовем a_1 и e_1, находим соответствующие им ложные положения точек b_1 и d_1 на прямых B и D; третьи вершины треугольников, подобных I и II (см. фиг. 93), будут c_1 и c_1'; ложность построения сказывается в том, что точки c_1 и c_1' не совмещаются. Этой ложной картине соответствует некоторое возможное движение системы, отличающейся от четырехповодковой (см. фиг. 93) тем, что шарнир C разъединен.

Если представим себе такое поступательное перемещение подобоизменяемого треугольника $a_1b_1c_1$, при котором вершины

a_1 и b_1 скользят по прямым A и B, то третья вершина его должна скользить по прямой, проходящей через точку σ_{I} пересечения этих прямых. Если точка σ_{I} не находится в пределах чертежа, то направление прямой, по которой перемещается точка c_1, определится, если изобразить два ложных положения треугольника abc. Соответственным образом определится прямая, по которой скользит точка c'_1; пересечение этих прямых дает истинное положение точки c, после чего картина скоростей достраивается, как и раньше. Указанное ложное построение дословно приложимо и к картине скоростей, расположенной по Бурместеру.

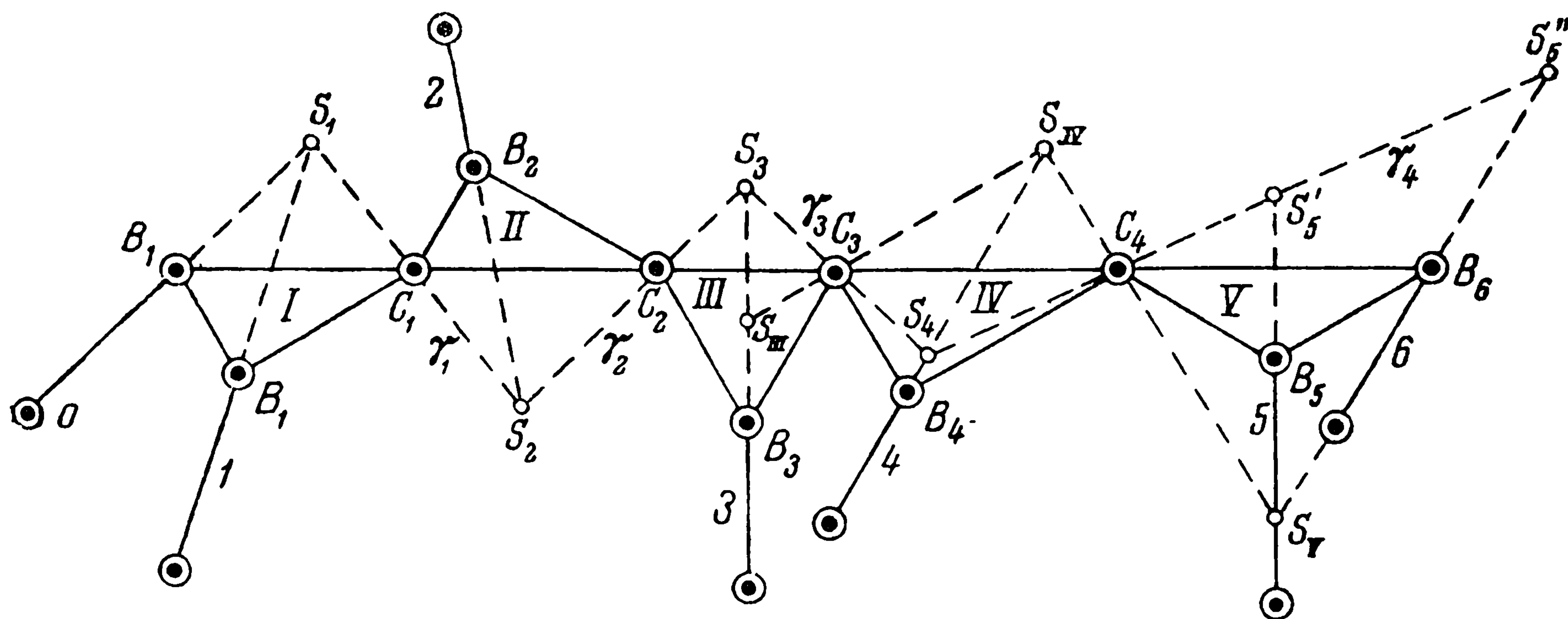
Следует отметить, что какой бы из указанных способов мы ни применили, удаление точек S или σ за пределы чертежа не помешает нам довести построение до конца, хотя бы эти точки и лежали в бесконечности. Особым представится случай, когда три точки S_{I}, C и S_{II} лежат на одной прямой, в частности, когда S_{I} и S_{II} удаляются в бесконечность в одном и том же направлении. В этом случае все четыре поводка параллельны между собой.

Одну из точек S_{I} или S_{II}, нахождение которых может совсем отпасть при применении метода ложных построений, в случае других указанных приемов можно заменить другой точкой. Определивши скорость точки S_{I}, не будем искать скорости точки C, а той точки звена *II*, которая определяется пересечением прямой $S_{\text{I}}C$ с направлением одного из поводков *3* или *4*, после чего определяются скорости вершин треугольника *II*.

Переходим теперь к общему случаю цепи первого класса. Можно было бы трактовать построение картины скоростей в общем виде, предполагая n звеньев; но вполне достаточно будет уяснить построение для изображенной на фиг. 95 цепи, чтобы строить картину скоростей для цепи первого класса с любым числом звеньев. Изображенная цепь имеет всего пять звеньев, занумерованных римскими цифрами. Если даны скорости концов ее поводков, то скорость точки пересечения S_1 поводков *0* и *1*, принадлежащей звену *I*, определится по двум проекциям. Тогда окажется известной проекция скорости всех точек прямой

S_1C_1, принадлежащих не только звену I, но и звену II, и потому скорость точки пересечения S_2 этой прямой с поводком 2 звена II определится по двум проекциям.

Таким же образом определятся скорости одной точки каждого из следующих одноповодковых звеньев S_3 и S_4. Но когда мы переходим к последнему двухповодковому звену, то прямая



Фиг. 95.

S_4C_4 пересекается с направлениями двух его поводков 5 и 6 в точках S'_5 и S''_5; для последних двух точек звена V будут известны, следовательно, их скорости, определенные каждая по двум проекциям. Но раз известны скорости двух точек звена, то в силу подобия в расположении изображающих точек с изображаемыми для случая неизменяемой фигуры, которое имеет место как в расположении по Мору, так и в расположении по Бурместеру, скорости всех точек звена будут известны. Но тогда окажутся известными скорости всех точек звена IV, именно C_4 и S_4, двух точек C_3 и S_3 звена III, точек C_2 и S_2 звена II, наконец, точек C_1 и S_1 звена I. Таким образом, приведенными в известность окажутся скорости точек всех звеньев цепи, а затем и поводков.

Построение может быть доведено до конца независимо от того, будут ли точки S и изображающие их точки σ лежать в пределах чертежа или нет, так как направления прямых

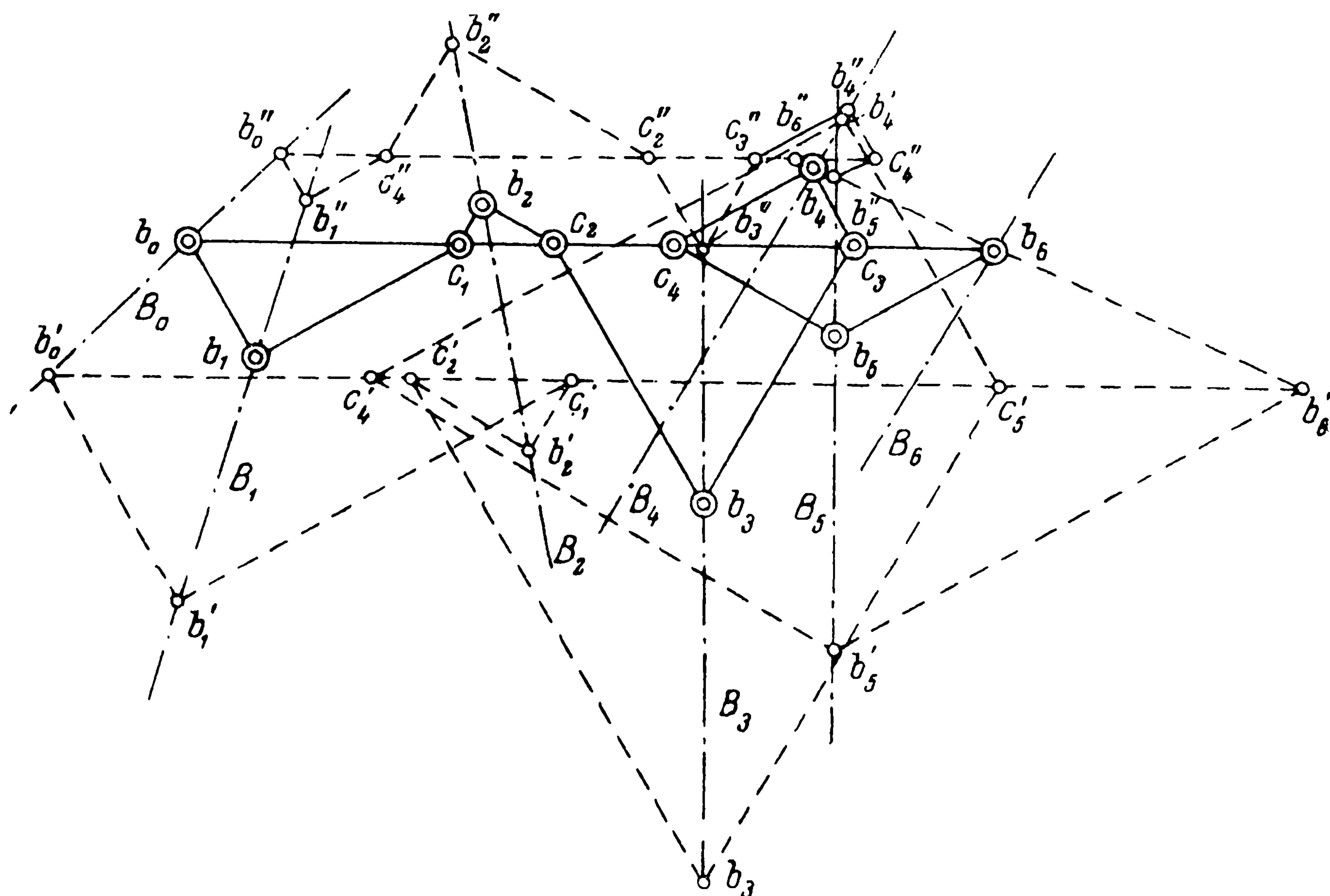
γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 (см. фиг. 95) всегда могут быть определены. Тем не менее возможны особые случаи. Возможно, что точки S'_5, S''_5, а следовательно, и точка S_V пересечения между собой поводков последнего звена сливаются в одну. Тогда для последнего звена окажется известна скорость только одной точки вместо двух.

Случай этот вполне напоминает нам особое расположение поводков в трехповодковой группе, где тоже (см. фиг. 90) три бурместеровские точки S_1, S_2 и S_3 сливаются в одну; в то же время тогда окажутся на одной прямой три точки: S_4, C_4 и S_V. Однако есть и другие особые случаи, которые мы при предыдущих рассмотрениях не указывали, хотя они имеют место в трех- и четырехповодковой группе; они характеризуются тем, что расположение одной или нескольких точек S становится неопределенным. Для двухповодкового звена I это будет иметь место, когда направления обоих поводков сольются в одну прямую с прямой, соединяющей их точки закрепления. В одноповодковом звене для этого требуется, чтобы слились в одну прямую направление поводка и прямая γ, своим пересечением определяющие точку S соответствующего звена.

Построение скоростей может быть произведено и в ином порядке. Вместо того, чтобы итти с одного конца, можно двигаться с обоих концов сразу и связаться на одном из средних одноповодковых звеньев. Допустим, что, двигаясь слева, мы дошли до точки S_3 звена III; затем двигаясь справа, определяем последовательно скорости точек S_V, S_{IV} и S_{III}. Тогда окажутся известными скорости двух точек S_3 и S_{III} звена III, после чего скорости точек остальных звеньев определятся уже легко.

Наконец, при построениях можно и вовсе обойтись без точек S, применяя метод ложных положений. Предположим, что мы строим повернутую на прямой угол картину скоростей в расположении Мора. Наметив изображающие точки свободных концов поводков, замечаем, что изображающие точки b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 будут располагаться на прямых, проходящих через намеченные изображения свободных концов поводков

и параллельных направлению самих поводков. Прямые эти B_0, B_1, B_2, B_3 ... указаны на фиг. 96, где, однако, опущены изображения свободных концов поводков и полюс картины *, как несущественные для дальнейшего построения. Намечаем на прямой B_0 точку b'_0 произвольно и выполняем все построение



Фиг. 96.

так, как будто мы имели дело с истинным положением изображающей точки b_0. Ложность построения скажется в том, что последняя точка b'_6 не окажется на прямой B_6.

Нетрудно видеть, что при выборе различных ложных положений точки b'_0 точка b'_6 будет двигаться по прямой. В самом деле, изображения двух точек B звена I будут двигаться по одноименным с ними прямым, а изображающий треугольник, оставаясь подобным себе, движется поступательно. Поэтому изображение точки C_1 будет двигаться по прямой. Эта точка

* Это упрощение чертежа мы будем допускать всюду в дальнейшем.

изображает одну из вершин треугольника II; изображение другой его точки B_2 тоже движется по прямой; поэтому по прямой будет двигаться изображение точки C_2. Продолжая эти рассуждения, дойдем до изображения точки B_6.

На фиг. 96 построено два ложных положения, соответствующие некоторому возможному движению системы фиг. 95, если в ней отбросить поводок 6. Точка b_6, представляющая истинное положение точки B_6, получается в пересечении прямых $b'_6\, b''_6$ и прямой B_6.

Но можно приложить метод ложных положений и несколько иначе, подобно тому, как мы ею пользовались в случае четырехповодковой группы. Тогда чертим ложные положения, соответствующие возможным движениям систем, на которые распадается наша цепь первого класса, если в ней разъединить один из шарниров между двумя звеньями, например, C_3. При этом задаемся ложными положениями двух изображающих точек, по одному на каждое из крайних звеньев, например, изображений точек B_1 и B_5 на одноименных с ними прямых. Получится два различных изображения точки C_3, чем и скажется ложность выбора исходных точек. Двигая изображение точки B_1 по своей прямой, заметим, что изображение точки C_3 движется по одной прямой; применяя тот же прием к изображению точки B_5, увидим, что другое изображение точки C_3 тоже движется по прямой, в общем случае отличной от первой. Точка пересечения обеих прямых определит нам истинное положение искомого изображения.

Связное построение цепи, состоящей из звеньев, подобных звеньям цепи фиг. 95, как оно выполнено на фиг. 96, может быть неудобным, потому что многие точки могут не уместиться в пределах чертежа и трудно выбрать положение начальной точки так, чтобы удобство было соблюдено для ложных изображений всех звеньев. Можно, однако, выполнять это построение со всеми удобствами, если его свести к последовательному повторению того, что мы имеем на фиг. 91. Имея прямые B_0 и B_1, определяем прямую C_1, на которой должно лежать изо-

бражение одноименной с нею точки, построив, как и раньше, два ложных положения звена I. Но дальше, имея прямые C_1 и B_2, на которых должны лежать изображения одноименных с ними точек звена II, находим прямую C_2, по которой перемещаются изображения точки C_2, наметив два ложных изображения звена II вне всякой связи с ложными изображениями звена I, т. е. решим ту же задачу, которую пришлось решить для звена I, совершенно независимо для звена II. Само собой разумеется, что тогда ложные изображения звеньев всегда можно наметить так, чтобы они удобно располагались на чертеже.

Указанными построениями исчерпывается построение скоростей точек всех механизмов первого класса, какого бы порядка они ни были, сколько бы наслоений цепей первого класса они ни содержали. Следует только отметить, что если концы некоторых поводков закреплены в устое и, следовательно, неподвижны, то вместо того, чтобы пользоваться равенством нулю проекции скоростей точек поводка на его направление, можно просто утверждать, что известно направление этих скоростей; вектор скорости точки прикрепления поводка к звену тогда определится по направлению и одной проекции.

Переходим теперь к механизмам второго класса. Чтобы строить скорости их точек, необходимо уметь построить скорости точек любой нормальной цепи второго класса по данным скоростям свободных концов поводков. Рассуждения представляются здесь более затруднительными и менее наглядными, чем в случае простой цепи, ввиду того, что приходится излагать вопрос в таком виде, чтобы было очевидно, что указываемый прием приведет к цели не только при всяком числе звеньев, но и при всяком расположении бесповодковых и различных разветвлений. Поэтому нельзя излагать приемы построения на частном примере, а приходится вести рассуждения в самом общем виде.

Чтобы облегчить себе дальнейшие рассуждения, укажем два следствия из приема построения скоростей для случая простой цепи.

Следствие I. Если известна скорость одной точки какого-нибудь звена, то можно построить скорость одной точки каждого звена, примыкающей к первому простой цепи одноповодковых звеньев по данным скоростям свободных концов поводков последней.

Следствие II. Если известны скорости точек некоторого звена и скорость одной точки каждого звена простой цепи звеньев, примыкающей к первому, то определятся скорости всех точек звеньев этой цепи.

Следствие I вытекает из приема построения скоростей точек S_2, S_3, S_4, когда известна скорость точки S_1, следствие II — из приема определения скоростей звеньев после того, как приведена в известность скорость звена V и скорости точек S_1, S_2, S_3, S_4.

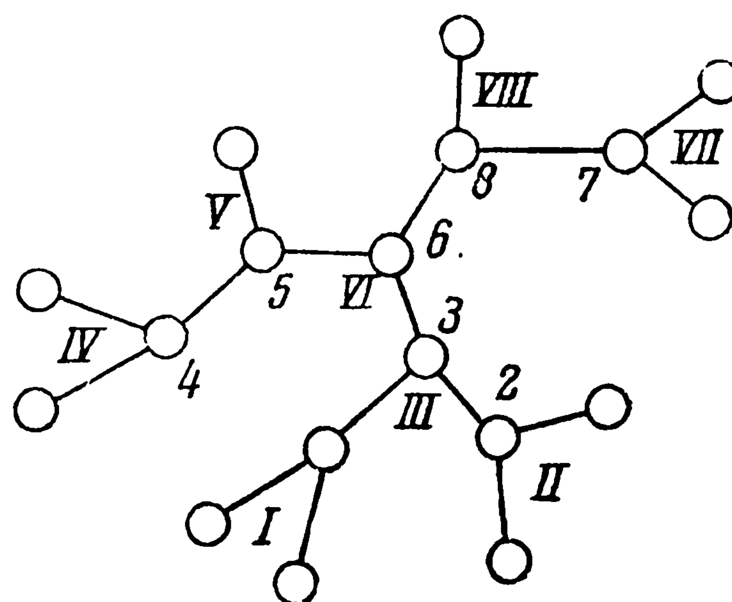
Кроме того, докажем следующую лемму: в нормальной цепи второго класса непременно имеются такие бесповодковые звенья, к которым примыкает пара простых концевых цепей.

Это есть простое следствие того, что число концов цепи второго класса на два больше числа ее звеньев. Так как каждый конец примыкает к некоторому бесповодковому, то заключение леммы очевидно. Больше двух концевых цепей к бесповодковому может примыкать только в том случае, если оно единственное в цепи, потому что в противном случае третья цепь, к нему примыкающая, должна вести к другому бесповодковому.

Условимся называть образование, состоящее из двух концевых цепей, примыкающих к одному и тому же бесповодковому, концевой вилкой. Если мы изобразим нашу цепь в виде линейного комплекса, то вилка (фиг. 97) будет образована из двух отрезков с замыкающими их кружками на концах. По удалении вилки остаток представляет опять цепь второго класса, потому что поставив на место вилки два поводка, пристегнутых к бесповодковому, к которому примыкала вилка, получим опять нормального типа цепь второго класса, если не придем к цепи первого класса; поэтому в остатке тоже должно получиться либо образование, в котором будут иметься вилки,

или простая цепь. Если на место отброшенной концевой цепи не будем ставить поводков, то остаток будет отличаться от нормальной цепи второго класса тем, что среди концевых звеньев будут иметься бесповодковые. Все же, продолжая прием отбрасывания вилки *, мы должны в конце концов притти к простой цепи, исчерпав все бесповодковые первоначального образования; в этой простой цепи одно или оба концевых звена будут бесповодковые.

Все указанные здесь соображения применим теперь к построению скоростей точек цепи второго класса, когда концы скоростей свободных концов поводков даны. Так как концевые звенья нормальной цепи обладают двумя поводками, то скорость одной точки их может быть приведена в известность; после этого можно поводки временно отбросить. В остатке будет цепь второго класса, все концевые звенья которой — бесповодковые, но скорость одной точки каждого из которых известна. От такого концевого бесповодкового звена идет простая цепь звеньев к следующему, среднему бесповодковому, к которому примыкает данная концевая цепь.



Фиг. 97.

Из следствия I мы можем определить скорость одной точки каждого звена этой концевой цепи. Если мы начнем построение с концевых звеньев некоторой вилки, то определим скорость одной точки каждого из звеньев, которыми эта вилка примыкает к бесповодковому. Этого достаточно, чтобы определить скорость опять-таки одной точки бесповодкового. Ведь мы уже знаем из примера двухповодкового звена, что достаточно знать

* Под вилкой в ненормальной цепи второго класса должна, очевидно, разуметься совокупность двух ненормальных простых концевых частей, примыкающих к одному и тому же узловому звену.

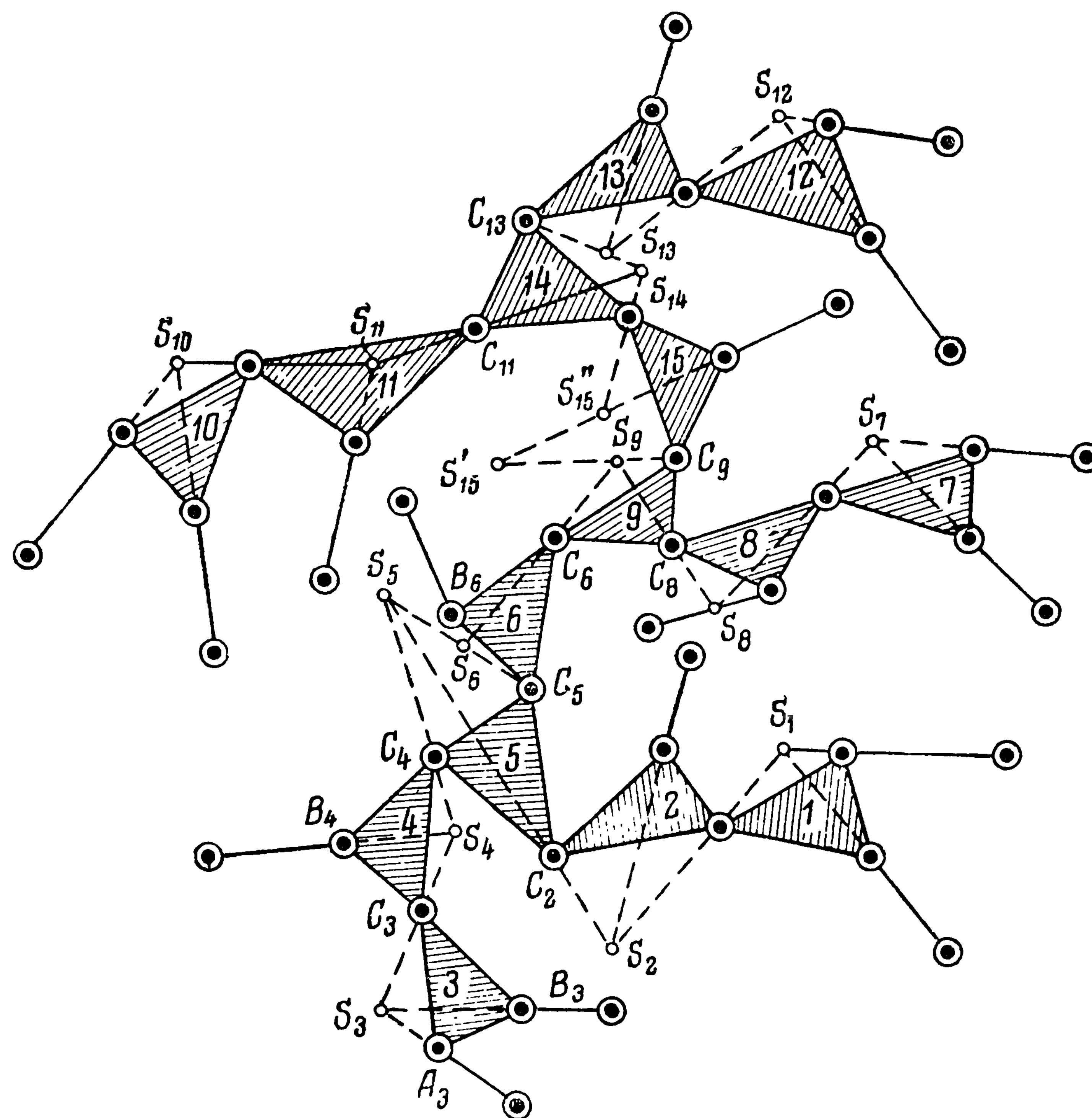
скорость одной точки каждого из поводков, чтобы определить скорость одной точки звена, к которому они примыкают. После этого можем временно отбросить вилку, причем мы придем опять-таки к цепи второго класса, в которой известна скорость одной точки каждого из концевых звеньев.

Проделывая то же самое с какой-либо вилкой этого остатка и отбрасывая, таким образом, каждую использованную вилку, придем, наконец, к простой цепи, в которой одно из концевых звеньев, к которому примыкала последняя из отброшенных вилок, будет непременно бесповодковым. Второе звено может оказаться либо бесповодковым, либо двухповодковым. Однако в том и другом случае скорость одной точки концевых звеньев будет известна, а этого достаточно, чтобы в общем случае построить скорости всех промежуточных одноповодковых звеньев, как мы убедились на примере фиг. 95, начиная построение с точек S_1 и S_{V}.

На фиг. 97 показано примерно, в каком порядке мы можем в таких случаях действовать. С помощью вилки *I* определяем скорость одной точки звена *1*, с помощью вилки *II* — скорость одной точки звена *2*. Далее, в порядке естественной нумерации, следуют вилка *III* и звено *3*, вилка *IV* и звено *4* и т. д., кончая вилкой *VIII* и звеном *8*. Остаются бесповодковые звенья *6* и *8*, скорость одной точки каждого из которых приведена в известность, а между ними — цепь одноповодковых звеньев.

После того, как приведены в известность скорости точек этой последней простой цепи, нетрудно убедиться, что будут известны скорости точек остальных, временно отброшенных звеньев. С этой целью восстановим мысленно отброшенные части. Каждое звено было отброшено только после того, как оказалась приведенной в известность скорость одной из его точек. К любому из отброшенных звеньев ведет непрерывная цепь звеньев от одного из концевых звеньев той простой цепи (*6*—*8*), скорости точек которой приведены в известность. Отбросим все звенья, кроме тех, которые составляют этот единственный путь от звена, скорости всех точек которого известны, к из-

бранному нами звену. Как последнее, так и все промежуточные звенья обладают каждое одной точкой, скорость которой приведена в известность; поэтому в силу следствия II скорость точек избранного нами звена и попутно всех ведущих к нему звеньев определится.



Фиг. 98.

Общий ход построений иллюстрирован на цепи с тремя бесповодковыми звеньями *5*, *9* и *14* и пятью концами (фиг. 98). Начинаем с вилки, примыкающей к звену *5*. В звене *1* определяем скорость точки S_1, затем в звене *2* — скорость точки S_2. Переходим к другому концевому звену той же вилки, определяем сначала скорость точки S_3 звена *3*, затем скорость точки

S_4 звена *4*. С помощью скоростей точек S_4 и S_2 явится возможность определить скорость точки S_5 звена *5*. После этого вилка использована. За следующую вилку берем примыкающую к звену *9* с концевыми звеньями *5* и *7*. Пользуясь скоростью точки S_5, определяем скорость точки S_6 звена *6*, затем, начиная с другого концевого звена,— скорости точек S_7 и S_8 звеньев *7* и *8*. Скорости точек S_6 и S_8 дают возможность определить скорость точки S_9 звена *9*; после этого и вторая вилка использована. За третью будем считать вилку с концевыми звеньями *10* и *12*.

Определяем сначала скорости точек S_{10} и S_{11}, затем — точек S_{12} и S_{13}; скорости точек S_{11} и S_{13} дают возможность определить скорость точки S_{14}. Теперь использована последняя вилка, и скорости точек оставшейся простой цепи, состоящей из трех звеньев *9*, *15* и *14*, могут быть найдены, как указано на фиг. 95. Чтобы показать, как находятся скорости точек какого-либо другого звена, выберем звено *3*. Скорости точек S_9 и S_{14} позволяют определить скорости двух точек звена *15*, именно точки S'_{15} и S''_{15}. Этого достаточно, чтобы определить скорость шарнирной точки C_9; скорости двух точек S_9 и C_9 звена *9* позволяют определить скорость третьей его точки C_6; точки C_6 и S_6 дают точку C_5; последняя и точка S_5 дают точку C_4; далее идут точки C_3, A_3, B_3. Совершенно так же определятся скорости точек любого другого концевого или среднего звена. Построение может быть выполнено как в расположении Бурместера, так и Мора; воспроизводить его, думается, нет надобности.

Расположение точек S за пределами чертежа не мешает довести до конца построение. Особые случаи, как и в простой цепи, сведутся либо к неопределенности положения одной или нескольких точек S, либо к слиянию в одну точку двух таких точек в первом звене, скорости точек которого должны были бы определиться.

При построении картины скоростей можно, однако, и вовсе обойтись без точек S, пользуясь методом ложных положений.

Чтобы облегчить себе дальнейшие рассуждения, выведем из построения (см. фиг. 96) следующее следствие.

Следствие III. Если дается простая цепь звеньев и для двух точек одного крайнего звена две прямые, на которых в картине скоростей должны лежать изображения этих точек, для остальных же звеньев — лишь по одной такой прямой для одной точки каждого, то геометрическим местом возможных положений изображения каждой точки любого звена будет прямая.

Выполняя ложное построение, мы не требовали, чтобы изображение b_6 точки B_6 второго крайнего звена V (см. фиг. 95) упало на прямую B_6, и потому мы его выполняли так, как будто для этого звена дана только прямая B_5, на которой должно лежать изображение точки того же наименования. При этих условиях изображением точки B_0 можно было задаться на своей прямой совершенно произвольно. Перемещая это изображение по прямой, мы заметили, что все точки подобоизменяемой системы, служащей изображением точек звена I, двигаются по прямым; отсюда то же самое следовало для точек звена II, затем звена III и т. д. до последнего, в частности же, для изображения точки B_6. Данные условия и заключение вполне согласуются, таким образом, с нашим следствием.

Переходя к построению картины скоростей цепи второго класса, заметим, что данные скорости концов поводков определяют столько прямых, на которых должны лежать изображения точек прикрепления поводков к звеньям цепи, сколько имеется в цепи поводков. Для каждой концевой цепи выполнены условия нашего следствия, так как концевое звено обладает двумя поводками, все следующие за ним — одним. Поэтому можно найти прямую, на которой лежит изображение той точки последнего из этих звеньев, которой концевая цепь примыкается к бесповодковому звену. Если мы выберем две концевые цепи, образующие вилку, то для бесповодкового звена, к которому такая вилка примыкает, окажутся известными две прямые, на которых должны лежать изображения шарнирных точек,

связывающих бесповодковое звено с каждой из концевых цепей.

Если теперь вилку отбросим, то образуется, правда, ненормальная цепь второго класса, потому что одно из ее концевых звеньев бесповодковое; но это концевое звено удовлетворяет всем условиям, которым удовлетворяли концевые звенья первоначальной цепи; известны две прямые, на которых должны лежать изображения двух точек этого звена. Переходя к следующей вилке, определяем две прямые, на которых должны лежать соответственно, изображения двух точек другого бесповодкового звена, после чего вилку отбрасываем. Так будем продолжать, пока в остатке не получим простой цепи, в которой одно из концевых звеньев может оказаться и двухповодковым, но могут и оба быть бесповодковыми. Во всяком случае, для них известны по две прямые для изображения двух точек каждого звена. Это и будет случай фиг. 95 и 96, разрешаемый методом ложных построений. После этого легко будет достроить картину скоростей для любого звена отброшенной части. От произвольно заданного звена этой части есть путь, которым можно притти к звену, скорость точек которого уже приведена в известность. На этом пути встречаются звенья, для которых даются прямые либо для изображений пары точек (бесповодковые звенья), либо для изображений одной точки (одноповодковые звенья). Но так как положение изображающей точки крайнего звена, которым такая простая цепь звеньев (все звенья, не составляющие части трактуемого пути, можно отбросить) примыкает к звену, скорость точек которого приведена в известность, дано, то достаточно было бы знать для каждого звена по одной только прямой, как на фиг. 96, чтобы довести построение до конца. Присутствие лишних прямых обеспечит только проверку точности построений.

Покажем приложение наших рассуждений к примеру, изображенному на фиг. 98. Концевые цепи со звеньями *1* и *3* позволят определить прямые, на которых должны лежать изображения точек C_2 и C_4 бесповодкового звена *5*, которое, по отбрасывании примыкающей к нему вилки, окажется концевым.

Вилка с концевыми звеньями *5* и *7* позволит определить две прямые, на которых должны лежать изображения точек C_6 и C_8 звена *9*, а вилка с концевыми звеньями *10* и *12* — прямые, на которых должны лежать изображения точек C_{11} и C_{13} звена *14*. Для крайних звеньев простой цепи, состоящей из звеньев *9*, *14*, *15*, известны теперь прямые, на которых должны лежать изображения двух точек каждого из них, для среднего звена — одна такая прямая. С помощью двух ложных построений, как это делалось на фиг. 96, определится истинное положение изображений точек этих звеньев, между прочим и точки C_6. После этого определится на своей прямой изображение точки B_6 и, в силу подобия, — положение точки C_5, затем на своих прямых — изображения точек C_4 и B_4 и, по подобию, — точки C_3, наконец, на своих прямых — изображения точек A_3 и B_3.

Этими соображениями можно считать исчерпанным вопрос о построении скоростей точек *всех механизмов второго класса*, так как все они состоят из кривошипа и наслоения групп нормальных цепей первого и второго классов.

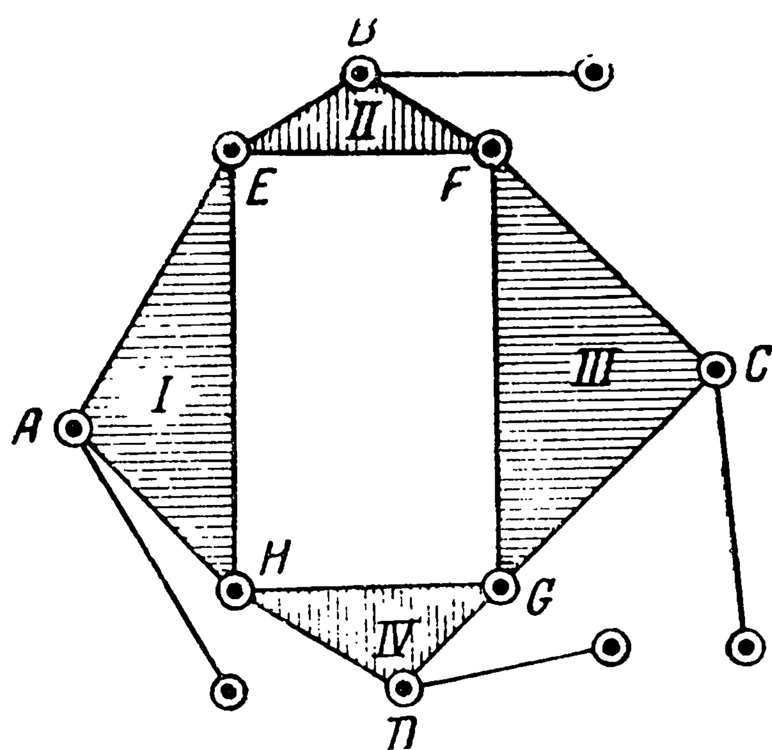
Дальше переходим к механизмам *третьего класса*. Начнем с построения скоростей точек нормальной цепи третьего класса с однообразным распределением поводков.

В такой цепи каждое звено снабжено одним только поводком, и это составляет обстоятельство существенно новое. Не существует ни в одном звене всего механизма ни одной точки, скорость которой могла бы быть непосредственно определена; в цепях второго и первого классов такими точками были вспомогательные точки S двухповодковых звеньев. Поэтому кажется естественным прибегнуть с самого начала к методу ложных положений.

Прежде чем излагать соображения, лежащие в основе указываемого приема, изложим последний на примере цепи третьего класса, состоящей из четырех звеньев (фиг. 99). Указанное на фиг. 100 построение будем называть *первым приемом* использования метода ложных положений для построения картины

скоростей точек нормальной цепи третьего класса по данным скоростям свободных концов ее поводков.

Скорости концов поводков определят столько прямых, на которых должны соответственным образом располагаться изображения точек их прикрепления к звеньям цепи, сколько имеется поводков или звеньев в данной цепи. В нашем случае это будут прямые A, B, C и D (см. фиг, 100), параллельные поводкам, соответственно прикрепленным в точках того же наименования. Полюс и изображающие точки свободных концов поводков опущены. Ложное построение будет соответствовать возможной картине скоростей системы, отличающейся от данной тем, что в ней шарнир H разъединен. Поэтому для точки H получится два различных изображения, которые назовем для точки звена I через h, для точки звена IV — через χ.

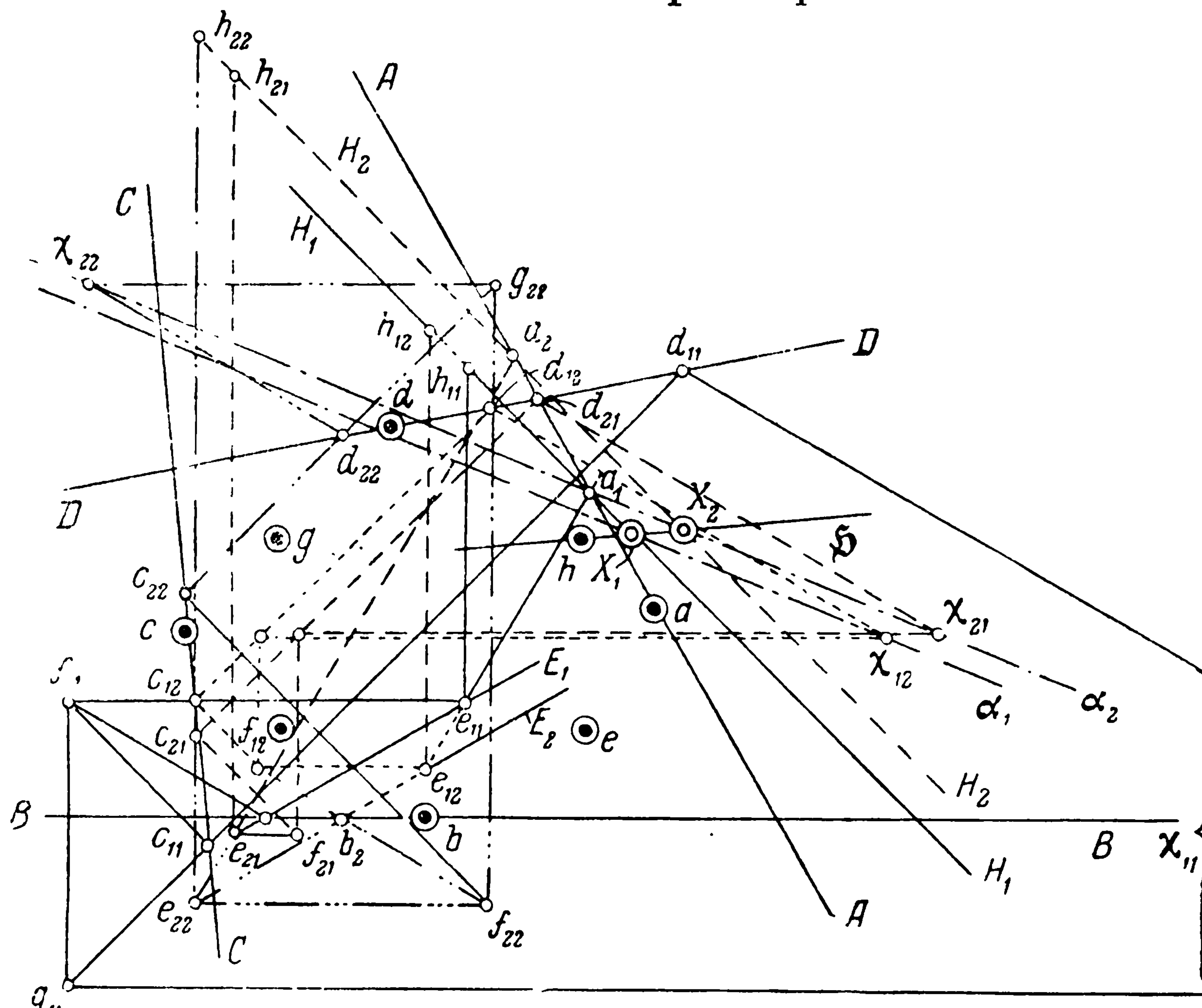


Фиг. 99.

Наметим на прямой A первое ложное положение a_1 изображения одноименной с прямой точки. Этого окажется недостаточным, чтобы построить картину скоростей простой цепи, которая образуется из сложной по разъединении шарнира H, так как нет данной прямой для второй точки того же звена (следствие III). Поэтому изображение точки H того же звена I на прямой H_1, параллельной AH и проходящей через a_1, может быть тоже еще задано произвольно. Таким образом, намечая ложное положение a_1 изображения точки A, мы тем самым намечаем *ложную прямую* H_1, *на которой, в свою очередь, произвольно намечаем ложное положение изображения второй точки* H. Во всех предыдущих случаях, где мы задавались тоже ложными положениями одной или двух точек, эти положения, по крайней

мере, намечались на действительных положениях соответствующих прямых; здесь и сама прямая — ложная.

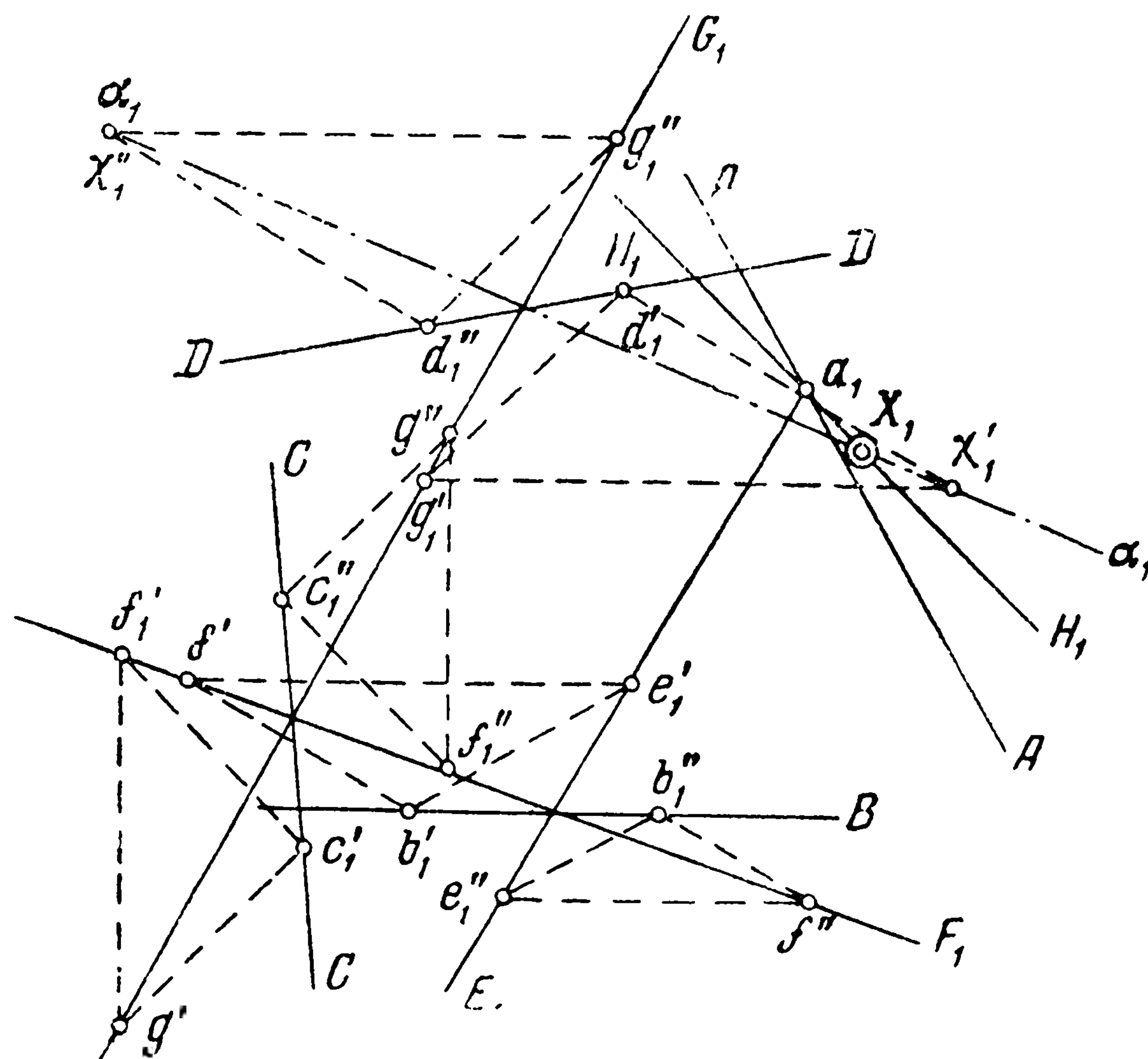
На самом деле, вместо того, чтобы задаваться явно положением изображения точки H, зададимся им неявно через посредство ложного положения точки b_1 изображения точки B на



Фиг. 100.

одноименной с ней прямой. Тогда изображение точки H найдется построением предварительно ложного положения изображения E. Будем обозначать ложные положения всех остальных точек, кроме точек A и B, двумя индексами, так как построения придется делать при разных ложных положениях указанных двух точек. Первый индекс будет указывать, которым ложным положением точки A мы пользовались, второй — каким положением изображения B.

Итак, пока мы пользуемся первым ложным положением обеих указанных точек, и потому изображения всех остальных точек будут снабжены индексом 11. Ложное положение точки e_{11} найдется, если мы проведем через точки b_1 и a_1 прямые, соответственно параллельные отрезкам BE и AE, в точке их пересечения. Прямая через точку e_{11}, параллельная отрезку EH, засечет на ложной прямой H_1 точку h_{11}.



Фиг. 100а.

Таким образом, очевидно, что произвольный выбор положения точки b_1 на прямой B равносилен произвольному выбору положения точки h_{11} на прямой H_1. По двум точкам e_{11} и b_1 строим изображение точки f_{11} третьей вершины F треугольника II. Изображение точки c_{11} получится в пересечении проведенной через точку f_{11} прямой, параллельной FC, с прямой C. Точка g_{11} определится в силу подобия изображаемого и изображающего треугольника,— d_{11}, если провести через точку g_{11} прямую, параллельную GD до пересечения с прямой D; точка χ_{11} (на нашем чертеже не уместилась и лежит в пересечении

двух прямых, соединенных скобкой)—определится в силу подобия изображающего треугольника с изображаемым *IV*. Все прямые этого первого ложного изображения вычерчены сплошной чертой.

После этого выполняем второе ложное построение, при той же точке a_1, но при другом положении изображения точки B, которое назовем b_2. Изображающие точки этого второго построения будут отмечены индексом *12*, а изображающие прямые — пунктиром с короткой чертой.

В обоих ложных построениях изображающие точки h и χ с соответствующими индексами не совпали, чем и обнаруживается ложность выбора начальных точек. Но нетрудно заметить, что если изображение точки A остается на месте, а изображение точки B будет перемещаться по прямой, то не только изображение h точки H будет двигаться по прямой H_1, но и второе ее изображение χ будет двигаться по некоторой прямой, которую назовем α_1; последняя определяется на чертеже двумя своими точками χ_{11} и χ_{12}.

Прямые H_1 и α_1, на которых лежат ложные изображения точки H_1, пересекаются в точке X_1, но последняя не будет истинным изображением точки H. Дело в том, что положение точки χ на прямой α_1 определяется по данному положению h; поэтому, если мы точку h приведем в X_1, то это не значит еще, что положение точки χ на прямой α_1 с ним сольется.

Тем не менее точка X_1 имеет для нас некоторое, хотя и другое значение. Проделаем еще два ложных построения, заменив точку a_1 другим ложным изображением a_2. Изображениями точки B будут опять служить те же точки b_1 и b_2. Ложные положения изображающих точек соответственно помечены индексами 21 и 22; изображающие прямые для первого построения проведены пунктиром с длинной чертой, для второго — с длинной чертой и тремя короткими. В результате двух таких ложных построений получим точку X_2, лежащую в пересечении ложной прямой H_2, по которой теперь, при неподвижности точки a_2 и перемещении изображения точки B, двигается

изображающая точка h по прямой α_2, определяемой точками χ_{21} и χ_{22}.

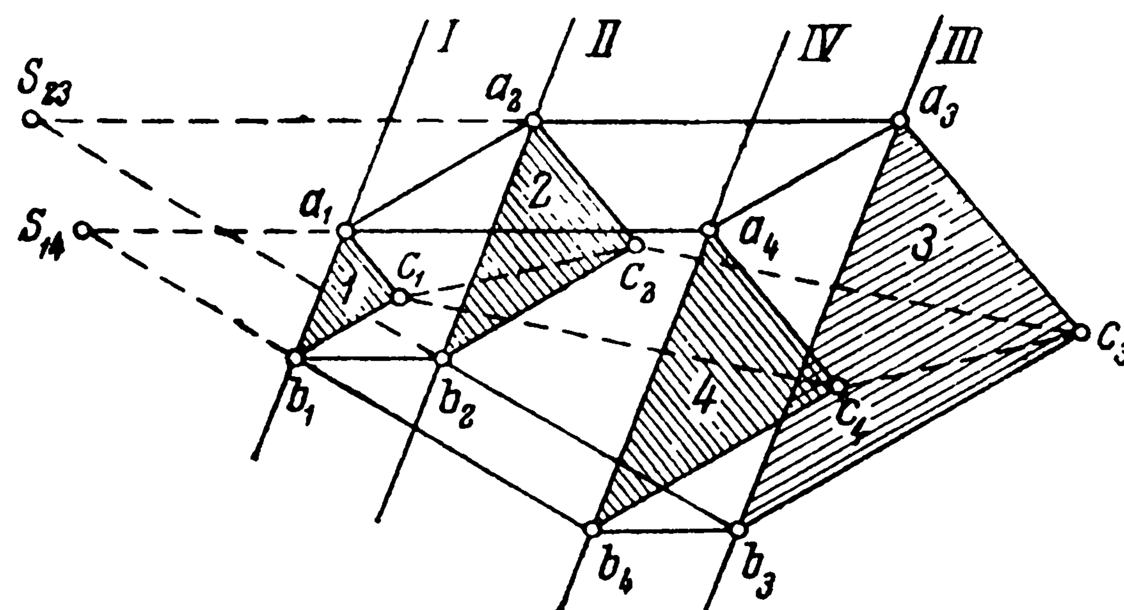
Оказывается, что точки X_1 и X_2 определяют прямую, на которой лежит истинное изображение точки H. Эта последняя прямая, на которой должна лежать истинная точка h, присоединяясь к прямой A, образует две прямые, на которых должны лежать изображения двух точек звена I. Так как мы выполняем построение так, как будто шарнир в H разъединен, т. е. как для простой цепи, то теперь будет возможность найти еще с помощью двух новых ложных построений прямую, по которой (следствие III) двигается изображающая точка χ, когда изображающая точка h движется по прямой $X_1 X_2$. В обоих последних ложных положениях точка χ не окажется на прямой X_1X_2, которую назовем $\mathfrak{H}$, но два ее ложных положения определят упомянутую выше прямую, которая, пересекаясь с последней, даст нам истинное положение точки h *. Эти два последних ложных положения на фиг. 100 не показаны, чтобы не затемнять и без того сложного чертежа. По той же причине не проведены истинные изображения прямых, образующих стороны треугольников на фиг. 99; отмечены только жирными кружками изображения вершин этих треугольников. Проверкой точности построения служит совпадение истинных положений изображающих точек h и χ, если последние построить, исходя из истинных изображений точек A и H.

Построение, после того как прямая $\mathfrak{H}$ найдена, будет вестись совершенно так, как для случая цепи фиг. 95. Ведь шарнир H мы представляем себе разъединенным; для каждого из звеньев, кроме содержащих точку H, имеем по одной прямой, на которой должно лежать изображение точки прикрепления поводка звена, для звена I имеем две прямые ($\mathfrak{H}$ и A), на которых соответственно должны лежать изображения точки

* Указываемый здесь первый прием применения метода ложных положений с соответствующими видоизменениями может применяться и в цепях четвертого класса; для краткости его удобно называть методом прямой $\mathfrak{H}$.

H этого звена и точки прикрепления поводка; для другого звена, содержащего точку H (у нас звено IV), тоже имеем две прямые ($\mathfrak{H}$ и D), на которых должны лежать изображения точки H и точки прикрепления поводка этого звена. Разница, следовательно, лишь в том, что две из данных прямых сливаются в одну прямую $\mathfrak{H}$.

Переходя к доказательству правильности указанного построения, докажем следующую лемму.



Фиг. 101.

Лемма I. Если построить четыре подобных треугольника с параллельными сходственными сторонами на принимаемых за сходственные стороны отрезках четырех прямых, соединяющих вершины двух параллелограмов, то третьи сходственные вершины этих треугольников тоже совмещаются с вершинами некоторого параллелограма.

Допустим, что вершины первого из параллелограмов будут a_1, a_2, a_3, a_4. Через эти точки проводим четыре параллельных прямых I, II, III, IV и строим второй параллелограм, вершины которого b_1, b_2, b_3, b_4 лежат соответственным образом на тех же прямых (фиг. 101). Принимая отрезки a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4 за сходственные стороны треугольников 1, 2, 3, 4, строим положения вершин c_1, c_2, c_3, c_4 этих подобных треугольников, намечая положение первой из них произвольно. Докажем, что фигура $c_1c_2c_3c_4$ будет параллелограм.

Продолжим стороны a_2a_3 и b_2b_3 до пересечения в точке S_{23}, стороны a_1a_4 и b_1b_4 — до пересечения в точке S_{14}. В силу параллельности пересекающихся сторон углы с вершинами S_{23} и S_{14} равны; при этом на сторонах одного угла помещаются две пары вершин треугольников *2* и *3*, на сторонах другого — вершин треугольников *1* и *4*. Представим себе, что весь угол S_{14}, рассматриваемый вместе с треугольниками *1* и *4* как неизменяемая система, перенесен поступательным движением так, что вершина S_{14} совпала с вершиной S_{23}. При этом бывшие параллельными прямые, образовавшие стороны углов, сольются, и четыре треугольника наши могут быть рассматриваемы, как четыре фазы подобоизменяемого треугольника, движущегося поступательно, так, что две вершины его a и b скользят по двум заданным прямым. Тогда, как мы уже не раз отмечали, третья вершина тоже описывает прямую; поэтому после переноса отрезок c_1c_4 окажется лежащим на одной прямой с отрезком c_2c_3; следовательно, до переноса эти отрезки параллельны. Кроме того, при указанном движении вершины треугольника проходят пропорциональные пути; поэтому из равенства отрезков a_2a_3 и a_1a_4 следует равенство параллельных отрезков c_2c_3 и c_1c_4. Но в таком случае лемма доказана.

Нам придется еще обратить внимание на ряд частных случаев, для которых доказательство наше остается в силе.

1-й случай. Второй параллелограм превращается в прямую, когда углы его будут равны 0 и 180°.

2-й случай. Прямые *I* и *II* сливаются в одну прямую, равным образом и прямые *III* и *IV*. В этом случае вместо четырех прямых имеется только две, причем пара сторон каждого из параллелограмов с ними совмещается.

3-й случай. Отличается от 2-го случая тем, что при том же расположении параллельных прямых стороны одного из параллелограмов, сливающиеся с означенными прямыми, становятся равными нулю; вследствие этого получается вместо четырех точек только две: точка b_1 сливается с точкой b_2 и точка b_3 с точкой b_4.

Переходя теперь к непосредственному доказательству правильности построения (см. фиг. 100), покажем прежде всего, что прямые α_1 и α_2, сопряженные ложным параллельным прямым H_1 и H_2, тоже параллельны. Кстати, условимся под прямой H разуметь некоторую прямую, проходящую через истинное положение изображения точки H и параллельную ложным прямым H_1 и H_2. Тогда можно прямые H_1 и H_2 рассматривать, как ложные положения прямой H; каждому ложному положению прямой H соответствует вполне определенная прямая α, и все прямые α между собой параллельны. Чтобы убедиться в последнем, достаточно будет доказать, что четыре точки χ_{11}, χ_{12}, χ_{21}, χ_{22} расположены в вершинах параллелограма, ибо первыми двумя определяется прямая α_1, вторыми — прямая α_2.

Замечаем, что четыре точки e, индексы которых, для краткости, опускаем, образуют параллелограм, две стороны которого будут параллельные прямые, исходящие из точек a_1 и a_2, две другие — такие же прямые, исходящие из точек b_1 и b_2. Заметим, далее, что у нас имеются четыре ложных изображения треугольника II (см. фиг. 99); вершины e этих четырех подобных треугольников образуют параллелограм; вершины b, которых всего только две, но которые лежат на параллельных сторонах только что упомянутого параллелограма, дают начало частному случаю параллелограма, отмеченному у нас третьим. Поэтому вершины f этих треугольников тоже образуют параллелограм. Но эти вершины принадлежат в то же время четырем ложным изображениям вершины F треугольника III. Четыре ложных изображения c второй его вершины получаются на одной прямой c, если провести из вершин f параллельные прямые; поэтому образованная ими фигура представляет частный случай параллелограма, отмеченный первым, и четыре точки g тоже образуют параллелограм. Точки d на прямой D получаются опять в пересечении с ней четырех параллельных, проходящих через точки g, и потому третьи вершины ложных изображений треугольника IV, т. е. четыре точки χ, располагаются в вершинах параллелограма, и прямые α_1 и α_2 — параллельны.

Покажем теперь, что прямые α_1 и α_2 представляют собой геометрическое место точек χ при перемещении изображения точки B по прямой того же наименования. При этом прямая α_1 сопряжена с изображением a_1 точки A, считаемым неподвижным, прямая α_2 — с изображением a_2 той же точки. Легко заметить, что при неподвижности изображения точки A, предполагая изображение точки B перемещающимся по прямой, точка χ будет описывать прямую. Так как шарнир H представляем себе разъединенным, то мы имеем дело с простой цепью. Задавшись изображением точки A, кроме прямой, на которой должно лежать изображение точки H, определяем также прямую, на которой должно лежать изображение точки E. Таким образом, имеем две прямые, на которых должны лежать изображения точек B и E звена II. К этому звену примыкает у нас два других звена III и IV, в общем же случае — неопределенное количество одноповодковых звеньев, для каждого из которых известно по прямой, на которой должно лежать изображение точки прикрепления поводка.

Этот случай нами разбирался в следствии III из построения фиг. 96, причем оказалось, что геометрическим местом изображения любой точки любого звена будет прямая. В нашем случае отнесем это заключение к изображению χ. Но изображению a_1 сопряжены, между прочим, также изображения χ_{11} и χ_{12} на прямой α_1, изображению a_1 — изображения χ_{21} и χ_{22} на прямой α_2. Отсюда очевидно, что при неподвижности изображения a_1 и подвижности изображения точки B изображение χ описывает именно прямую α_1; точно так же прямая α_2 описывается тем же изображением, когда неподвижно изображение a_2 и движется изображение точки B.

Представим себе теперь, что нами на прямой A намечен ряд изображений точки A. Каждому из этих изображений сопряжены некоторая прямая α с соответствующим индексом и некоторая прямая H. При этом все прямые α параллельны между собой и образуют пучок, который будем называть пучком α, все прямые H тоже параллельны между собой и образуют пучок H

Покажем теперь, что пучки α и H между собой подобны. Допустим, что мы наметили положения a_1, a_2, a_3, ..., a_n изображений точки A и получили сопряженные им прямые α_1, α_2, α_3, ..., α_n и H_1, H_2 H_3, ..., H_n пучков α и H. Какое бы положение изображения точки B мы ни скомбинировали с одним из намеченных изображений точки A, непременно изображение точки χ окажется на одной из названных прямых α и именно, — на сопряженной выбранному изображению точки A. Представим же себе, что мы будем комбинировать все одно и то же изображение точки B, скажем точки b_1 с n намеченными изображениями точки A. Тогда получим на указанных прямых пучка α точки χ_{11}, χ_{21}, χ_{31}... χ_{n1}, где второй индекс есть индекс постоянного изображения точки B, первый же — переменного изображения точки A и вместе с тем той из прямых пучка α, на которой точка χ лежит. Только что указанный ряд точек χ окажется прямолинейным и притом подобным ряду намеченных изображений точки A.

В самом деле, теперь у нас изображение точки B неподвижно, а движется изображение точки A, занимая последовательно указанные выше положения. Положение изображения точки B определяет прямую, на которой лежит изображение точки F; таким образом, для двух точек звена *III*, именно F и C, известны прямые, на которых лежат их изображения; для следующих на пути к точке H звеньев известно будет по прямой для изображений только одной точки; таким образом, для названных выше изображений χ определится прямая.

Что расположение последних точек на этой прямой подобно расположению изображений точки A, следует из повторного применения теоремы о поступательном движении подобоизменяемого треугольника, две вершины которого движутся по данным прямым. Заметим, прежде всего, что изображение b_1 определяет прямую E_1, на которой будут лежать изображения e_{11}, e_{21}, e_{31}, ..., e_{n1}, которые несомненно образуют ряд точек, подобный ряду изображений точки A, так как расположены относительно последнего перспективно, проектируясь лучами

пучка прямых, параллельных AE. Из указанных точек e тоже будет исходить пучок прямых, параллельных EF, засекающий ряд изображений точки F на прямой, параллельной BF и исходящей из точки b_1. Этот ряд изображений $f_{11}, f_{21}, f_{31}, \ldots, f_{n1}$ будет подобен ряду названных выше изображений точки E.

Далее переходим к применению теоремы о движении подобоизменяемого треугольника. Изображение вершины F треугольника II движется по только что указанной прямой, изображение вершины C — по прямой C. Отсюда следует, что изображение вершины G описывает прямолинейный ряд, подобный ряду изображений вершины F. Но точка G принадлежит в то же время звену IV, изображение точки D которого движется тоже по прямой; поэтому ряд изображений χ точки H этого звена подобен ряду изображений точки G. Итак, мы последовательно получили подобие следующих рядов:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}) \sim (e_{11}, e_{21}, e_{31}, \ldots, e_{n1}) \sim$$

$$\sim (f_{11}, f_{21}, f_{31}, \ldots, f_{n1}) \sim (g_{11}, g_{21}, g_{31}, \ldots, g_{n1}) \sim$$

$$\sim (\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}, \ldots, \chi_{n1}).$$

Если бы число звеньев нашей цепи было больше четырех, то пришлось бы лишь большее число раз применить теорему о движении подобоизменяемого треугольника.

Теперь подобие пучков H и α очевидно, ибо первый из них опирается на ряд изображений точки A, второй — на подобный ему ряд изображений χ точки H. Два подобных параллельных пучка, если они только не исходят из общей вершины, всегда находятся в перспективном положении. Перспективную ось этих пучков, т. е. геометрическое место пересечений сопряженных их лучей, мы и назвали прямой $\mathfrak{H}$.

На одном из лучей пучка H лежит истинное изображение точки H звена I, ибо среди различных положений изображений точки A на прямой того же наименования есть некоторое

истинное. Этому лучу H соответствует сопряженный луч α пучка α, на котором лежит изображение той же точки, отнесенной к звену IV. Но истинные изображения h и χ от ложных отличаются тем, что они совмещаются. Так как одно из них лежит на луче пучка H, второе — на сопряженном ему луче пучка α, то истинное изображение может лежать только в точке пересечения этих лучей; геометрическим местом точек пересечения сопряженных лучей пучков H и α является у нас прямая $\mathfrak{H}$. Если так, то на ней лежит истинное изображение точки H.

В том виде, как построение исполнено на фиг. 100, оно необходимо для доказательства правильности методы. Для практического осуществления оно обладает большим неудобством. Приходится чертить непрерывную цепь подобоизменяемых треугольников и, наметив первый из них, трудно предугадать, как ляжет последний. По большей части и выйдет, что построение окажется неудачным в том смысле, что выйдет за пределы чертежа. Этот недостаток легко устранить, заменив вычерчивание связной цепи треугольников вычерчиванием треугольников, не имеющими между собой связи. Такое построение показано на фиг. 100а.

Отметив на прямой A произвольно изображение a_1 точки A, мы в силу предыдущего доказательства знаем, что этому положению сопряжены определенные лучи H_1 и α_1, своим пересечением определяющие точку X_1. Для определения этих двух лучей поступаем следующим образом. Луч H_1, как геометрическое место возможных изображений точки H при данном изображении точки A и разъединенном шарнире H, проходит через точку a_1 и параллелен изображаемому отрезку AH. Точно также луч E_1, проходящий через ту же точку a_1 и параллельный изображаемому отрезку AE, будет геометрическим местом возможных, при тех же условиях, изображений точки E.

Изображения вершин E и B треугольника EBF должны соответственно располагаться на прямых E_1 и B; поэтому геометрическим местом изображений вершины F того же треугольника будет прямая F_1, которая определится построением

двух * каких-нибудь с удобством размещающихся на чертеже изображений $b'_1e'_1f'_1$ и $b''_1e''_1f''$. Изображения двух вершин F и C треугольника FCG лежат на двух известных прямых F_1 и C_1; поэтому два ложных положения $f'_1c'_1g'$ и $f''_1c''_1g''$ определяют прямую G_1. Теперь имеются прямые G_1 и D, по которым перемещаются соответственно изображения точек G и D треугольника GDH; изображение третьей вершины его названо буквой χ и перемещается по искомой прямой α_1. Задавшись на прямой D произвольно положениями изображений d'_1 и d''_1, строим два ложных положения изображения этого треугольника $d'_1g'_1\chi'_1$ и $d''_1g''_1\chi''_1$; через точки $\chi'_1\chi''_1$ проводим прямую α_1, пересекающую луч H_1 в точке X_1. После этого берем второй луч H_1 и тем же приемом определяем точку X_2. Точки X_1 и X_2 определяют прямую $\mathfrak{H}$.

Теперь проделываем то же построение еще два раза, только с заменой луча пучка H, который нами намечался произвольно, прямой $\mathfrak{H}$, на которой лежит в действительности для данной цепи изображение точки H. Получим последовательно прямые, на которых лежат изображения точек E, F, G, и, наконец, точки χ, изображающие точку H треугольника DGH. Последняя прямая, пересекаясь с $\mathfrak{H}$, определит нам истинное положение изображения h точки H.

При всех этих построениях в выборе ложных положений каждого из изображений треугольников мы ничем не связаны и потому выбираем их, сообразуясь только с удобствами чертежа. Число ложных положений каждого треугольника попрежнему будет шесть.

Число ложных изображений треугольников может быть уменьшено, при этом заметим, как нами указано в сноске на этой стр., что при поступательном перемещении подобоизменяемой системы, когда две ее точки описывают прямые, все точки ее движутся по прямым, пересекающимся в одной точке. Можно

* Вместо двух изображений достаточно одного, если прямые E_1 и B пересекаются в пределах чертежа, так как прямая F_1 проходит через их точку пересечения.

построить только одно ложное положение изображения треугольника *II* и найти прямую F_1, заметив, что она проходит через точку пересечения прямых B и E_1. Равным образом пересекаются в одной точке прямые C, F_1 и G_1, или G_1, D_1 и α_1.

Как и в случае простой открытой нормальной цепи, в случае такой же замкнутой для изложения метода построения скоростей ее точек и для доказательства правильности такого метода мы пользовались чертежом цепи с определенным числом звеньев. Но нетрудно заметить, что указанное построение и прием доказательства будут применимы для любого числа звеньев, и уяснить себе, как вести доказательство от цепи, содержащей n звеньев к цепи, содержащей $(n + 1)$ звено.

Только что указанный прием требует выполнения шести ложных построений, вследствие чего может показаться громоздким. Легко подумать, что сложность его обусловлена неудачным выбором метода. Дело в том, что ложные положения дают нам некоторые возможные скорости точек системы, отличающейся от данной двумя степенями свободы вследствие разъединения шарнира H. Во всех же предыдущих случаях ложные положения изображали возможные скорости цепей, отличающихся от нормального типа одной только лишней степенью свободы. Повидимому, однако, такое соображение неправильно. Мы приводим *второй прием* приложения методы ложных положений, где в основу положено построение возможной картины скоростей системы, отличающейся от данной только одной лишней степенью свободы; и все же приходится применить шесть ложных положений *.

Чтобы применить этот новый прием, будем строить картину скоростей для цепи, отличающейся от нормальной цепи третьего класса тем, что, считая одно из ее треугольных звеньев,

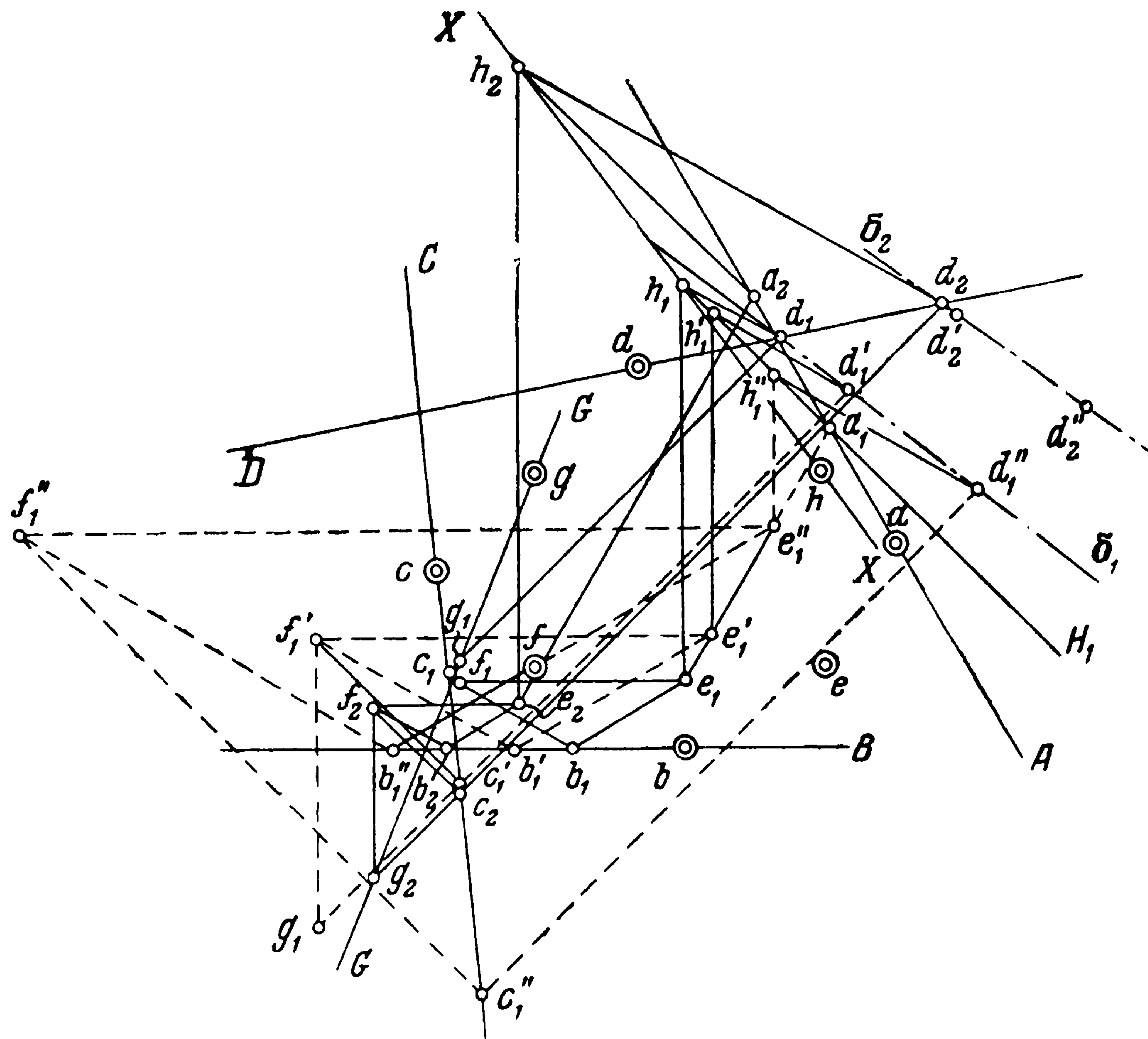
* При практическом выполнении число это несколько меньше и в случае первой методы. Четвертое ложное построение может быть всегда опущено, так как четвертая вершина параллелограма определяется по трем первым. Шестое тоже, при сколько-нибудь благоприятном расположении чертежа, отпадает (см. прием фиг. 100а).

например *IV* (см. фиг. 99), составленным из трех двухшарнирных стержней *HG*, *HD*, *GD*, мы выбрасываем тот из них, который соединяет между собой непосредственно шарниры двух смежных звеньев цепи, в нашем случае — стержень *HG*. Полученную цепь, отличающуюся от данной одной степенью свободы, будем называть, для удобства речи, первым преобразованием. Чтобы определилась картина скоростей преобразованной цепи, мало дать скорости свободных концов поводков, т. е. задать на картине скоростей столько прямых, сколько имеется поводков, на которых должны лежать изображения точек прикрепления поводков; необходимо задать еще одно условие, именно положение одного из этих изображений на своей прямой.

Допустим же, что, кроме прямых *A*, *B*, *C*, *D*, дано еще положение изображения a_1 точки *A*. Этого достаточно, чтобы построить картину скоростей точек преобразованной цепи. Но эта картина не строится непосредственно, а лишь с помощью метода ложных положений. Точка a_1 определяет нам прямую H_1 (фиг. 102), на которой должно лежать изображение *h*. Но приступить к выполнению построения можно только задавшись положением изображения точки *H*, которое, конечно, будет ложным, так как вероятность задаться истинным ее положением бесконечно мала. Задавшись ложным положением h'_1, находим последовательно точки e'_1, b'_1, f'_1, c'_1 и g'_1 так же, как при пользовании предыдущим приемом.

Что касается построения изображения точки *D*, то оно построится, как в случае двухповодковой группы, так как точка *D* к точкам *H* и *G* прикреплена двумя поводками *HD* и *GD*; поэтому $h'_1d'_1$ параллельно *HD* и $g'_1d'_1$ параллельно *GD*. Ложность построения скажется в том, что точка d'_1 не попадает на прямую *D*; таким образом, эта ложная картина изображает скорости точек системы, отличающейся от первого преобразования тем, что уничтожен еще и поводок, прикрепленный в точке *D*, т. е. поводок того звена данной цепи, которое в первом преобразовании превратилось в изменяемое соединение двух стержней. Лишенное указанного поводка первое преобразо-

вание можно назвать вторым преобразованием, и наша картина скоростей, ложная в отношении первого преобразования, будет истинной картиной скоростей второго преобразования, для построения которой должны быть даны изображения точек A и H.



Фиг. 102.

Легко убедиться, что две картины скоростей второго преобразования дают возможность построить истинную картину скоростей первого по данному изображению a_1 точки A. Мы видели, что для построения картины скоростей второго преобразования нужно задавать положение точки h на прямой H_1. Обратим внимание на то, как будет перемещаться изображение d точки D, когда точка h движется по прямой H_1; нетрудно

убедиться, что оно будет двигаться по прямой. Заметим, что при этом движении точки h изображения оставшихся во втором преобразовании треугольных звеньев будут двигаться поступательно, оставаясь подбными изображаемым звеньям. Переходя от звена I к следующему и т. д., мы заметим, что всегда две из вершин каждого из изображающих треугольников движутся по двум прямым, причем ряды точек, описываемые этими вершинами, будут подобны. В таком случае и третья вершина такого треугольника движется по прямой, описывая ряд точек, подобный обоим предыдущим. Последовательными рассуждениями, примененными нами уже при доказательстве первого приема приложения метода ложных положений, мы придем к заключению, что ряд точек g будет прямолинеен и подобен ряду точек h.

Каждая из точек d получается в пересечании двух лучей: одного, проходящего через точку g и параллельного отрезку GD, другого, проходящего через точку h и параллельного отрезку HD. Если имеем ряд точек h и ряд точек g им соответствующий, то ряд точек d образуется пересечением соответствующих лучей двух параллельных пучков, перспективно расположенных относительно рядов g и h. Так как последние ряды подобны, то подобны и опирающиеся на них пучки; два подобных пучка параллельных лучей всегда расположены перспективно и их общая перспективная ось δ_1 будет геометрическим местом точек d. В пересечении этой прямой δ_1 с прямой D будет лежать точка d_1 — истинное изображение точки D в картине скоростей первого преобразования.

Чтобы получить прямую δ_1, нужно построить две картины скоростей второго преобразования, являющиеся ложными по отношению к первому. Эти две картины построены на фиг. 102 применительно к положениям h'_1 и h''_1 изображения точки H второго преобразования; изображения остальных точек снабжены такими же индексами; в результате прямая δ_1 определяется точками d'_1 и d''_1 (точка g''_1 в пределах чертежа не уместилась и потому опущена; при этой частной конфигурации, которая изо-

бражена на фиг. 99, изображения точек D, G и C лежат на одной прямой, и потому опущенную точку вполне может заменить c_1'').

Когда определено истинное положение изображения точки D первого преобразования, по данному положению a_1, то истинные изображения остальных его точек получить не представляет трудности. Прямая, параллельная DH и проходящая через d_1, засечет на прямой H_1 точку h_1, после чего истинное положение точек e_1, b_1, f_1, g_1, являющихся изображениями точек первого преобразования, будет строиться так же, как раньше строились их ложные положения. Проверкой построения будет служить параллельность прямых g_1d_1 и GD.

Итак, задавшись для первого преобразования положением точки a_1 на прямой H_1, мы построили картину скоростей его точек. Но эта картина, построенная с помощью двух ложных положений, сама в свою очередь является ложной по отношению к данной цепи, так как для последней положение точки a_1 на прямой a не может задаваться произвольно. Для определения истинной картины скоростей данной цепи требуется построить еще картину скоростей первого преобразования, задавшись другим положением a_2 изображения точки A на одноименной с ней прямой; а для этого в свою очередь нужно построить две картины скоростей второго преобразования; в общей сложности опять получится шесть ложных построений. На фиг. 102 вторая пара картин скоростей второго преобразования опущена, чтобы не затемнять чертежа, и построена только по заданной точке a_2 вторая картина скоростей первого преобразования; при этом, однако, отмечены точки d'_2 и d''_2 опущенных картин скоростей и прямая δ_2, определяющая точку d_2.

Строя картины скоростей первого преобразования, можно перемещать изображение точки a по прямой A; при этом изображение точки H будет тоже перемещаться, однако не по прямой H_1, потому что каждому положению точки a соответствует проходящий через нее луч пучка H параллельных лучей. Докажем, что при перемещении изображения точки A первого

преобразования по прямой A точка h тоже движется по некоторой прямой X.

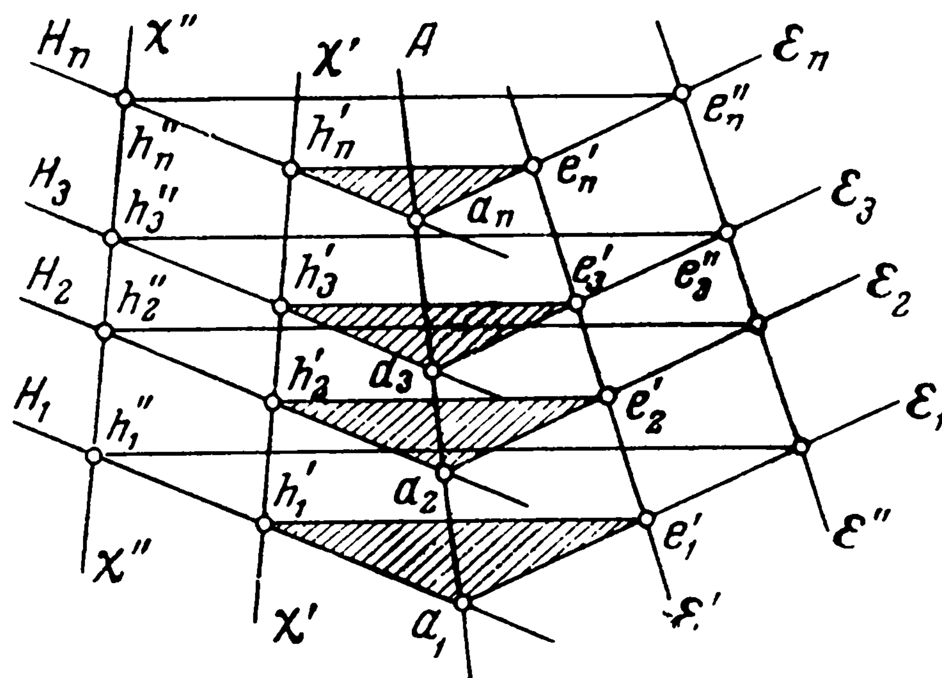
Предварительно еще отметим, что ложность картины скоростей первого преобразования по отношению к данной цепи обнаруживается тем, что изображение отрезка GH, например, g_1h_1 или g_2h_2, не параллельно изображаемому отрезку. Это есть следствие того, что указанный отрезок в первом преобразовании обладает изменяемой длиной, в данной же цепи он неизменяем.

Мы уже заметили, что каждому положению точки a соответствует проходящий через нее луч параллельного пучка H; но в то же время каждому положению точки a соответствует определенная прямая δ, на которой лежат изображения точки D' второго преобразования. Покажем прежде всего, что все прямые δ между собой параллельны и образуют пучок параллельных лучей, подобный пучку H. Соображения, лежащие в основе доказательства, будем излагать, пользуясь чертежами с более наглядным расположением прямых и подобоизменяемых треугольников, чем те, которые получаются при действительных построениях (см. фиг. 102), соответствующих данному случаю.

Построение каждой картины скоростей первого преобразования требует предварительного построения двух картин скоростей второго. Вообще говоря, последние могут быть заданы совершенно произвольным выбором положений точек h' и h'' на избранном луче пучка H. Однако для доказательства произвольно наметим только h'_1 и h''_1 на первом из этих лучей. Избрав на прямой A ряд положений a_1, a_2, a_3, ..., a_n точки A первого преобразования, проведем через них лучи H_1, H_2, H_3, ..., H_n пучка H. Затем проведем через произвольно заданные на луче H_1 точки h'_1 и h''_1 два каких-нибудь параллельных луча χ' и χ'', в пересечении которых с лучами пучка H получатся точки h'_1, h'_2, h'_3, ..., h'_n на луче χ' и $h''_1, h''_2, h''_3, \ldots, h''_n$ на луче χ'' (фиг. 103).

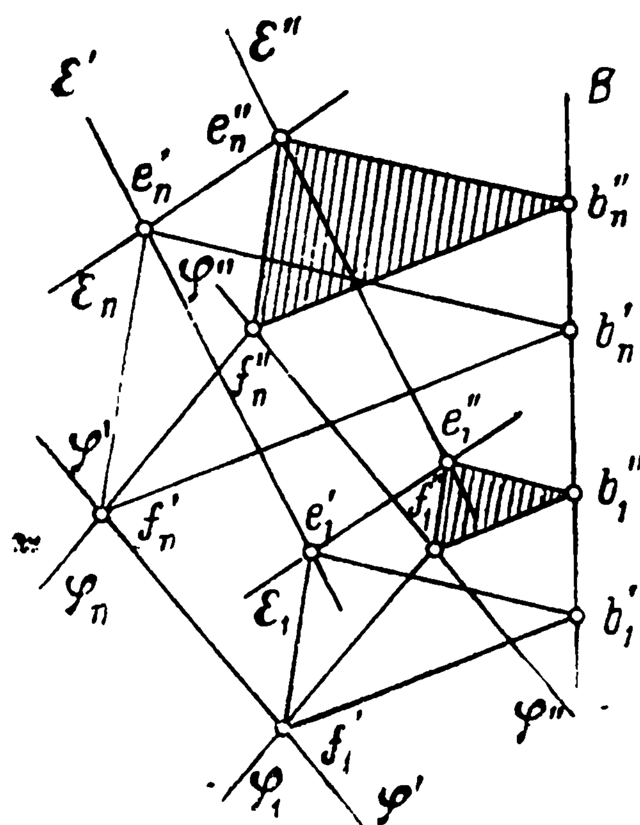
Мы раньше убедились (см. фиг. 100), что при неподвижном изображении точки a и при перемещении изображения точки H по одному из лучей пучка H точка e движется по некоторой пря-

мой. Положениям a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_n изображений точки A будут соответствовать прямые, обозначенные ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$, ε_n; прямые эти параллельны и, очевидно, образуют пучок, подобный пучку H, имея с последним общую перспективную ось A. Но, кроме того, параллельны между собой и прямые ε' и ε'', по которым будет перемещаться изображение точки E, когда изображение точки H перемещается по одной из прямых χ' или χ''.



Фиг. 103.

В этом проще всего убедиться с помощью леммы I. Рассмотрим четыре (два заштрихованных и два незаштрихованных) изображения треугольника I, например, те, в которых изображениями точки A служат точки a_1 и a_2; отрезок a_1a_2 может рассматриваться как две совмещенные стороны параллелограма, две другие стороны которого обратились в нуль; вершины же h, лежащие на прямых χ' и χ'', расположены по углам параллелограма; отсюда следует, что и третьи их вершины e'_1 e''_1 e'_2 e''_2 располагаются по углам параллелограма и потому прямые ε' и ε'' — параллельны, ряды же точек, на них лежащих, подобны рядам точек на прямых A, χ' и χ''.



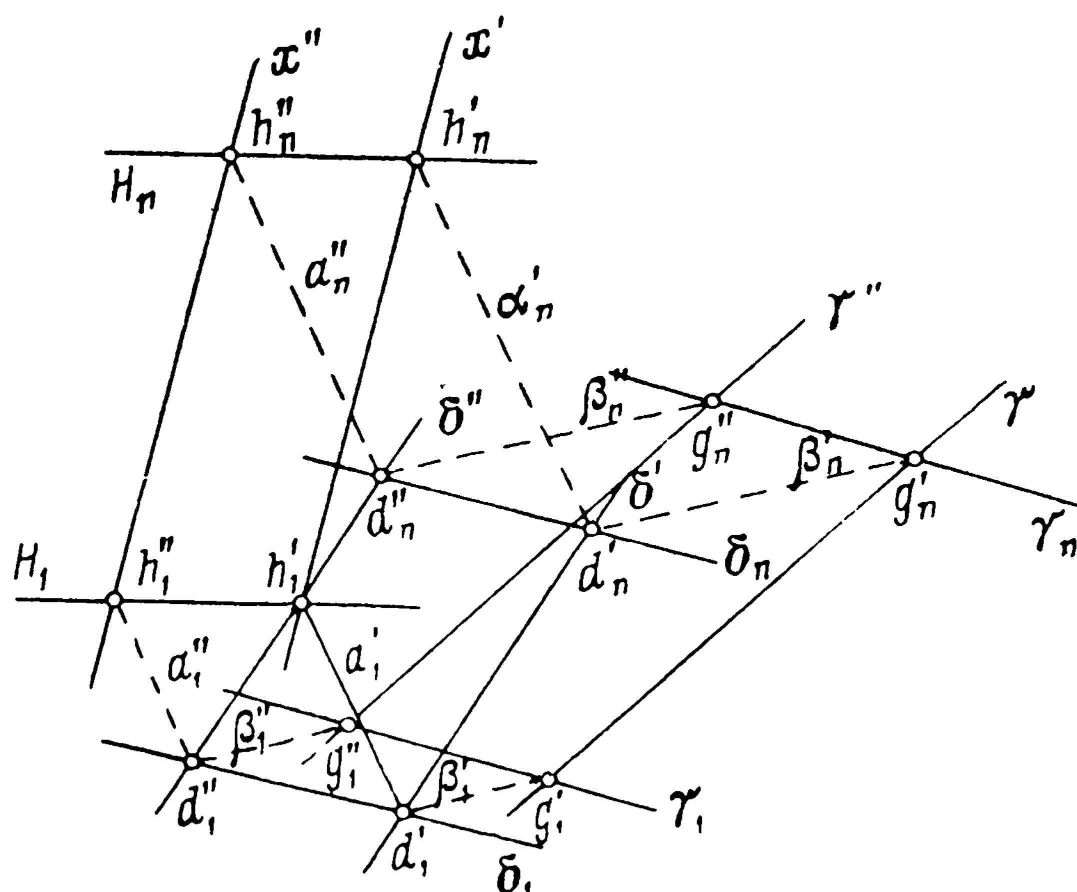
Фиг. 104.

Рассмотрим теперь $2n$ изображений звена II, соответствующие изображениям (см. фиг. 103) звена I. Чтобы не затемнять

чертежа (фиг. 104), нанесем на него лишь два луча пучка прямых ε, именно ε_1 и ε_n (ε_2 и ε_3 опущены); вследствие этого вместо восьми изображений звена II, как было в случае звена I, получим всего четыре. Проводя из точек e параллели изображаемому отрезку EB (наша фиг. 104 не имеет непосредственной связи с фиг. 99 вследствие произвольного выбора направлений для достижения большей ясности чертежа и сохраняет лишь правильность буквенных обозначений), на прямой B получаем изображения вершины B, причем точки b'_1, b'_n, b''_1, b''_n могут рассматриваться как расположенные в вершинах параллелограма, все четыре стороны которого сливаются с прямой B; вершины же e тоже расположены в вершинах параллелограма, как мы убедились раньше. Отсюда следует, что в вершинах параллелограма расположены и точки f и потому прямые φ' и φ'' параллельны, а прямые φ_1, φ_2, $\varphi_3, \ldots, \varphi_n$ образуют пучок параллельных лучей. Этот пучок подобен пучку лучей H, потому что он перспективен ряду точек на прямых φ' и φ'', который (по свойству поступательного движения подобоизменяемого треугольника, две вершины которого описывают прямые) подобен ряду точек на прямых ε' и ε''; последнему перспективен пучок лучей ε, в свою очередь, подобный пучку H.

Для дальнейших трехшарнирных звеньев первого преобразования можно не делать новых чертежей, а воспользоваться фиг. 104, переименовав только название прямых. Так, переходя к третьему звену, на место прямой B ставим прямую C, на место прямых ε', ε'' и пучка ε — прямые φ', φ'' и пучок φ, подобный пучку ε, на место точек e и b — точки f и c. В результате найдем, что движению изображения точки H по параллельным прямым χ' и χ'' соответствует движение изображения точки G по прямым γ' и γ'', параллельным между собой, причем ряды точек на этих прямых, например, h'_1, h'_2, $h'_3, \ldots, h'_n$ и g'_1, g'_2, $g'_3, \ldots, g'_n$ подобны. Движению же изображения точки H по лучам пучка H соответствует движение изображения точки G по лучам пучка γ_1, γ_2, γ_3, ..., γ_n параллельных между собой лучей, подобного пучку H. Если бы в первом преобразовании было больше, чем три трех-

шарнирных звена, т. е. в данной цепи больше четырех, то пришлось бы только еще несколько раз переменить название точек и прямых на фиг. 104; но чертеж и все выводы будут оставаться в силе для любого из трехшарнирных звеньев первого преобразования. Подробнее нам нужно остановиться на изображениях последней вершины G последнего из треугольников.



Фиг. 105.

На фиг. 105 изображены две параллельные прямые γ' и γ'' и два луча γ_1 и γ_2 пучка лучей $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$. В вершинах параллелограма, сторонами которого являются указанные четыре прямые, располагаются изображения точки G; сопряженные им изображения точки H помещаются в углах параллелограма, образованного лучами H_1 и H_n пучка H и прямыми χ' и χ''. Чтобы получить изображение точки D, нужно из изображения точки H провести луч, параллельный изображаемому отрезку HD, из сопряженного с ним изображения точки G — луч, параллельный изображаемому отрезку GD. Лучи, исходящие из изображений точки H, отмечены буквой α, из изображений точки G — буквой β.

Нетрудно заметить, что при расположении изображений точек H и G в углах соответствующих параллелограмов изображения точки D окажутся тоже размещенными в углах параллелограма. В самом деле, перенесем, как неизменяемое целое, поступательно отрезок $d_1'' d'_1$, вместе с исходящими из конечных его точек лучами α_1'', β_1'', α'_1, β'_1 и лежащими на последних точках h_1'', h'_1, g_1'', g'_1, так, чтобы точка d_1'' совместилась с точкой d_n''. Очевидно, что луч α_1'' совместится при этом с лучом α_n'', и на последнем будет лежать точка h_1''; но тогда точка h'_1 окажется на луче α'_n. С другой стороны, луч β_1'' совместится с лучом β_n'', и на последнем будет лежать точка g_1''; в силу этого точка g'_1 упадет на луч β'_n. Так как точка h'_1 попала на луч α_n'', а точка g_1'' — на луч β_n'', а лучи α'_1 и β'_1 сохранили свое направление, то они совместятся соответственно с лучами α'_n и β'_n и точка d'_1 совместится с d'_n. Отсюда заключаем, что отрезки $d'_1 d_1''$ и $d_n'' d'_n$ между собой равны и параллельны, и фигура $d_1' d_1'' d_n'' d'_n$ представляет собой параллелограм.

Результат только что приведенного доказательства можно формулировать в лемму, которой нам придется еще пользоваться впоследствии.

Лемма II. Если рассматривать два параллелограма как две фазы аффино-изменяемой системы и через сходственные вершины каждого из них провести по четыре параллельных прямых, то точки пересечения прямых, исходящих из сходственных вершин, тоже располагаются в вершинах параллелограма.

Здесь говорится о двух фазах аффино-изменяемой системы лишь с целью правильного сопоставления вершин; нужно вообразить себе, что один из параллелограмов получен из другого переносом и деформацией сторон и углов.

Так как точки d'_1 d_1'', d'_n, d_n'' расположены в вершинах параллелограма, то прямые δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n образуют пучок параллельных лучей (на фиг. 102 изображены лучи δ_1 и δ_2 этого пучка). Докажем же, что этот пучок δ подобен пучку H. Это просто следует из того, что перспективная ось δ' подобных

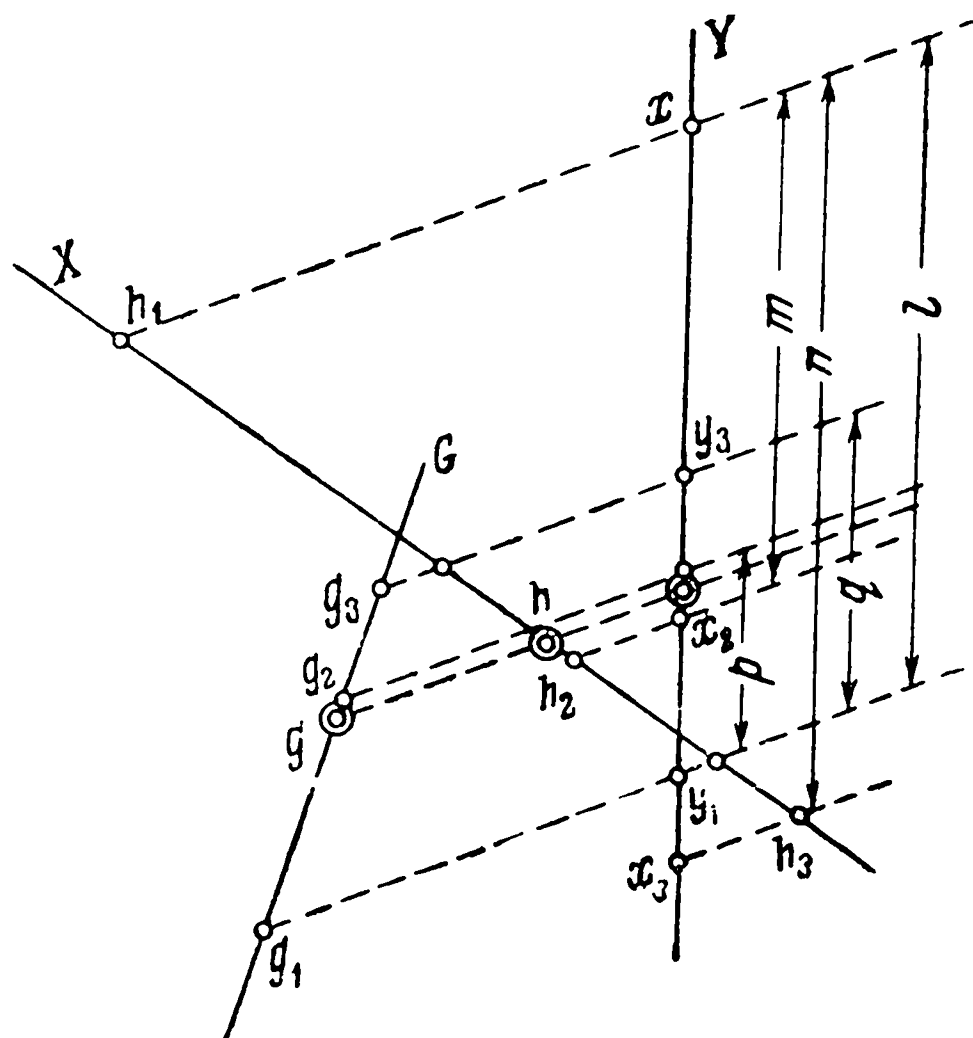
пучков $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$ и $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \ldots, \beta'_n$ в то же время является перспективной осью одного из них и пучка $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$, а прямая χ' — перспективной осью пучков $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ и $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$.

После этого уже нетрудно доказать, что изображения точки H первого преобразования, при различных возможных картинах скоростей его точек, будут лежать на одной прямой, названной нами X (см. фиг. 102). В самом деле, пучок лучей $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots, \delta_n$ высекает на прямой D ряд точек $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$. Из этих точек должен исходить ряд параллельных лучей (все они параллельны направлению изображаемого отрезка DH), в пересечении с соответствующими лучами пучка H, определяющий точки $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$. Этот пучок лучей подобен пучку H, имея прямую D перспективной осью с пучком лучей $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$, а потому он должен быть перспективен пучку H. На перспективной оси обоих пучков, которой у нас служит прямая X, располагаются точки $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$. Прямая X, очевидно, будет определена, если мы построим две из точек на ней лежащих, т. е. две картины скоростей первого преобразования. На фиг. 102 определены точки h_1 и h_2.

Нам остается еще выяснить, как воспользоваться двумя построенными картинами скоростей первого преобразования, чтобы найти искомую картину скоростей данной цепи. Легко заметить, с помощью рассуждений, нами неоднократно уже примененных, что если изображение точки A будет скользить по прямой A, а изображение точки H — по прямой X, то изображение вершины G последнего из трехшарнирных звеньев движется по некоторой прямой G (см. фиг. 102). При этом ряды точек, описываемые на прямых A и G изображениями одноименных с ними точек, будут подобны.

Ложность картин скоростей первого преобразования по отношению к картине скоростеи данной цепи сказывалась тем, что прямые, соединяющие соответствующие точки h и g рядов, расположенных на прямых X и G, не оказывались, вследствие неправильного выбора положения точки a на прямой A,

параллельными изображаемому отрезку данной цепи GH. Однако существует в указанных двух рядах такая пара соответствующих точек, которая этому условию удовлетворяет. Чтобы эту пару найти, проектируем (фиг. 106а) ряд точек h на прямой X и ряд точек g на прямой G на некоторую третью прямую Y пучком, все лучи которого параллельны направлению GH. Тогда на прямой Y получатся два подобных ряда точек, причем всякой точке одного ряда сопряжена другая точка другого на той же прямой, вообще говоря, отличная от первой. Но два подобных ряда точек, расположенные на одной прямой, имеют по одной точке, которая сама себе сопряжена, кроме бесконечно удаленной. Нахождением этой точки наша задача и решается.



Фиг. 106а.

При этом возможно применить или простой расчет или построение. Первый сведется к следующему. На фиг. 106а изображены прямые G и X с нанесенными на них точками h_1, h_2, g_1, g_2. Проекции этих точек на прямую Y назовем соответственно x_1, x_2, y_1, y_2. Задаем на прямой X точку x_3, ищем с ней сопряженную y_3. В силу подобия обоих рядов на прямой Y, обозначая через m и n расстояния от точки x_1 до точек x_2 и x_3, через p и q расстояние от точки y_1 до точек y_2 и y_3, пишем пропорцию

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}.$$

Если неизвестно положение y_3 и дано положение x_3, то, определив из указанной пропорции единственное неизвестное q, находим y_3. Таким образом, имея две пары сопряженных точек, можно определить точку, сопряженную любой точке одного из рядов. Наша задача, однако, состоит в том, чтобы найти такое положение точки x_3, чтобы сопряженная с ней точка y_3 совпадала с нею. В таком случае в нашей пропорции окажутся неизвестными q и n, но прибавится новое соотношение

$$q + n = l.$$

Взяв производную пропорцию так, чтобы в нее вошла сумма $q + n$, находим

Фиг. 106б.

$$q = \frac{lp}{m + p}.$$

Точка двух подобных рядов на прямой Y, сама себе сопряженная, отмечена двойным кружком. Двум сопряженным точкам x_3 и y_3 рядов, расположенных на прямой Y, будут соответствовать сопряженные точки h_3 и g_3 на прямых X и G; последние получаются на основании перспективного расположения относительно лучей нашего параллельного пучка (см. фиг. 106 а) рядов, расположенных на этих трех прямых. Отсюда следует, что точке рядов на прямой Y, которая сама себе сопряжена (обозначена двойным кружком), соответствуют две различные

сопряженные точки g и h рядов, расположенных на прямых G и X, но на общем луче параллельного пучка. Эти точки только и требовалось определить.

Имея, таким образом, истинные положения изображений точек G и H (на фиг. 102 истинные изображения показаны двойными кружками), найдем истинное изображение точки D проведением из h и g двух прямых, соответственно параллельных отрезкам HD и GD, которые должны пересечься на прямой D, позволяя, таким образом, проверить правильность построения. Далее, начиная от изображения вершины G, последовательно определяем приемами, уже неоднократно описанными, положения изображений вершин C, F, B, E и, наконец, прямой A. Последняя должна лежать в точке пересечения двух прямых, исходящих из точек h и e и параллельных изображаемым отрезкам HA и EA, но в то же время и на прямой A, что дает вторичную проверку. Легко, конечно, усмотреть, что и построение методом прямой $\mathfrak{H}$ (см. фиг. 100) тоже заключает в себе проверку своей правильности.

Мы определили точку обоих рядов на прямой Y, которая сама себе сопряжена, с помощью расчета. Конечно, величину q легко построить по найденному для нее выражению. Но проективная геометрия дает известный прием построения этой точки, который приводит к цели, не прибегая к пропорции. Построение это является одним из весьма характерных для этого отдела геометрии. Чтобы выполнить его, необходимо иметь две пары точек двух подобных рядов, расположенных на одной прямой, так как лишь таким числом точек определяется соответствие между обоими рядами. Мы выполним построение (см. фиг. 106б), предполагая, что даны точки x_1, x_3, y_1 и y_3; замена точек x_2 и y_2 точками x_3 и y_3 имеет целью дать более наглядное расположение чертежа.

Прежде всего наносим на чертеж совершенно произвольно выбранную окружность; на этой окружности, опять-таки совершенно произвольно, намечаем точку S. Из последней проектируем данные на прямой Y четыре точки на окружность; получаем

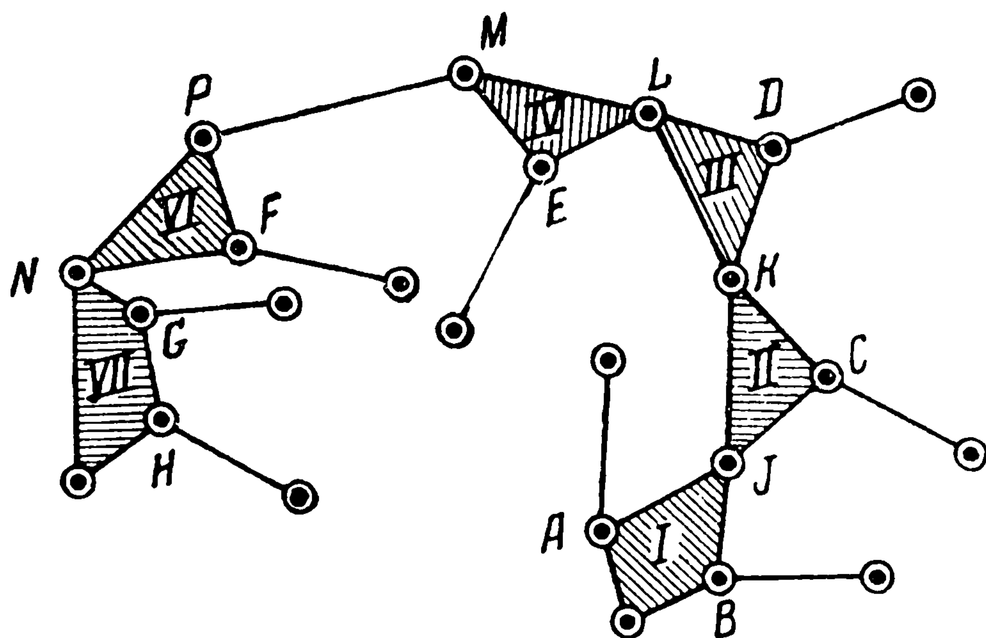
на последней точки ξ_1, ξ_3, η_1, η_3; проводим прямые ε_1 η_3 и η_1 ξ_3, которые пересечением своим определяют точку Γ_2; последнюю соединяем прямой с точкой Γ'_1 пересечения с окружностью прямой Y', параллельной Y и проходящей через S; прямая Γ_1 Γ_2 пересекает окружность в точке Γ_3; последняя является проекцией из вершины S на окружность искомой точки, которая, следовательно, лежит в пересечении луча $S\Gamma_3$ с прямой Y.

Указанное только что построение, интересное с теоретической точки зрения и являющееся частным случаем построения по трем парам точек двух проективных рядов, расположенных на одной прямой, двух точек таких рядов, которые сами себе сопряжены, поскольку мне его приходилось применять, редко дает надежный результат. Причина кроется в крайней трудности расположить произвольно избираемую окружность, а на ней точку S таким образом, чтобы точки чертежа размещались удачно. Ввиду этого следует рекомендовать следующий прием, который можно применять только к подобным рядам, но не к проективным. Через точки x_1 и x_3 проводим две параллельные прямые; равным образом проводим две параллельные прямые, пересекающие первую пару через точки y_1 и y_3; точку пересечения прямых, исходящих из x_1 и y_1, обозначим *1*, точку же пересечения двух остальных — *3*; прямая, определяемая точками *1* и *3*, пересекает прямую Y в искомой точке.

Это весьма простое и надежное построение основано на следующих соображениях. Через ряд точек x можно провести некоторый перспективный ему пучок параллельных лучей; другой пучок параллельных лучей можно провести через ряд точек y_1, расположенный на той же прямой Y. Так как оба указанных ряда подобны, то оба пучка, как подобные и содержащие параллельные лучи, имеют общую перспективную ось. Из точки прямой Y, которая сама по себе сопряжена, исходит пара сопряженных лучей обоих пучков; следовательно, эта точка лежит на перспективной оси их. Чтобы определить последнюю, достаточно знать точки пересечения двух пар сопряженных лучей; это и будут точки *1* и *3* нашего чертежа.

Переходим теперь к построению скоростей точек нормальной цепи третьего класса тоже с неразвитыми поводками, но *со смешанным их расположением.* При этом мы припоминаем, что в этом типе цепей двухповодковые и бесповодковые звенья чередуются, будучи либо смежными, либо разделенными цепью одноповодковых[5].

Выделим в такой цепи ряд звеньев, состоящий из бесповодкового звена и примыкающих к нему с двух сторон цепей одноповодковых звеньев с замыкающим каждую из них двухповодковым звеном; ряд одноповодковых может и вовсе отсутствовать. Такой ряд звеньев изображен на фиг. 107.

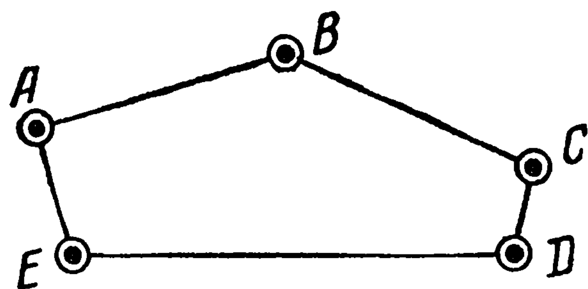


Фиг. 107.

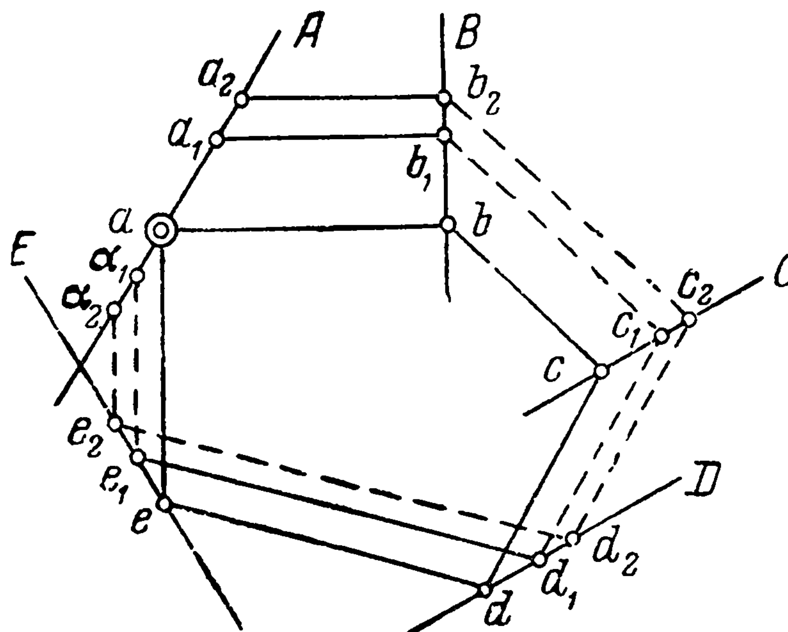
Очевидно, что, предполагая скорости свободных концов поводков известными, мы получим в картине скоростей прямые A, B, C, D, E, F, G, H, на которых тогда должны лежать изображения одноименных с ними точек. Но тогда, с помощью двух ложных построений, удается определить прямые, на которых лежат изображения шарнирных точек J, K, L, M, N, P, которыми связываются между собой звенья цепи. В самом деле, для звена I известны прямые, на которых должны находиться изображения точек A и B, и пара ложных построений определит нам прямую J. Теперь, для звена II, кроме этой прямой, известна C, и определится прямая K; кроме нее, для звена III известна прямая D и потому определится прямая L; прямые L и E, на которых должны лежать изображения одноименных с ними точек звена IV, дадут возможность определить прямую, на которой должно лежать изображение точки M бесповодкового звена V.

После этого надо начинать с другого двухповодкового звена *VII* и получить прямые, на которых лежат изображения точек *N* и *P*. Очевидно, что, проделав указанный ряд действий для каждого бесповодкового данной цепи третьего класса, мы найдем по одной прямой для изображения каждой из шарнирных точек, соединяющих между собой два соседних звена цепи. Совокупность этих точек и отрезков прямых, соединяющих каждые две точки, принадлежащие одному звену, образует замкнутый многоугольник; часть его периметра у нас будет *NPMLKJ*.

Задача сводится к тому, чтобы *построить замкнутый многоугольник со сторонами, параллельными сторонам данного, вершины которого лежат на данных прямых.* Характер задачи не изменяется и для того случая, если бы оказалось в цепи только одно двухповодковое и одно бесповодковое звено, потому что от первого из них мы можем итти в двух направлениях и с двух сторон подойти к бесповодковому.



Фиг. 108.



Фиг. 109.

Допустим же, что мы определили прямые A, B, C, D, E, на которых должны лежать изображения вершин шарнирного многоугольника фиг. 108. Задаемся (фиг. 109) на прямой A положением изображения a_1 вершины A. Тогда явится возможность найти ложные положения всех остальных вершин и притти ко второму ложному положению той же вершины A, которое назовем α_1. Ложность всего построения сказывается в том именно, что точки α_1 и a_1 не совпадают и изображение многоугольника получается разомкнутым. Чтобы найти истинное

положение изображения вершины A, будем перемещать его по прямой того же названия, пока изображения a и α не совпадут.

Легко заметить, что изображения всех вершин, перемещаясь по своим прямым, будут описывать подобные ряды точек. Оба подобных ряда α и a лежат на одной и той же прямой, причем каждой точке a сопряжена некоторая точка α. Истинным изображением вершины A явится та из точек a, с которой совпадает сопряженная с ней точка α. Для того, чтобы это истинное положение найти, достаточно иметь по две точки каждого ряда, и тогда можно воспользоваться либо построением (см. фиг. 106б), либо пропорцией (см. фиг. 106а) для нахождения искомой точки.

Замечаем, что построение скоростей точек в случае цепи третьего класса со смешанным расположением поводков проще, чем для цепи с однообразным. Всего требуется четыре ложных построения: два для определения прямых, на которых лежат изображения вершин многоугольника, составленного шарнирными точками, соединяющими между собой звенья, и два для определения положения изображений на этих прямых.

Все построение будет нами выполнено ниже, при построении скоростей для точек кулисы Савельева.

Нам остается еще разобраться в построении скоростей для точек цепей третьего класса с развитыми поводками. По этому поводу сказать придется сравнительно немного. Нужно только доказать, что концевая цепь, будет ли она простая или сложная, дает возможность определить прямую, на которой должно лежать изображение той точки звена основного полигона, к которой концевая цепь примыкает. Тогда дальнейшее построение будет совершаться совершенно так же, как в только что описанных случаях, так как, закрепляя простой поводок в той же точке, мы приходим к такой же прямой.

Для случая простой концевой цепи указанный вывод почти очевиден. Мы уже неоднократно убеждались (см. фиг. 96 и следствие III), что для простой цепи, состоящей из двухповодкового звена и примыкающего к нему ряда одноповодковых звеньев, по данным скоростям свободных концов поводков опре-

деляется для изображений любой точки любого звена по прямой, на которой должно лежать ее изображение. Применим это к той точке, которой звено концевой цепи примыкает к звену основного полигона. Для изображения этой точки тогда и удается определить прямую, как и в том случае, если бы вместо концевой цепи примыкал к звену основного полигона поводок. Когда с помощью таких прямых, приемом, указанным на фиг. 100, 102 или 109, скорости точек звеньев основного полигона будут определены, то окажется известной скорость той точки, которой звено концевой цепи примыкает к звену основного полигона. Тогда (см. фиг. 96 и следствие I на стр. 255 и 258) можно построить скорости всех точек концевой цепи.

В случае сложной концевой цепи отметим, прежде всего, что в ней непременно найдется образование, названное нами вилкой. Существование такой вилки нами доказано пока только для случая нормального типа цепи второго класса. Докажем его и для случая сложной концевой цепи. Мы помним, что как вся концевая цепь, так и любая часть ее, может рассматриваться, как часть цепи второго класса, полученная уничтожением в последней одного шарнира. При этом, если в звене раздела прикрепить поводок, то получится из этой части, в общем случае, опять нормального типа цепь второго класса; в частном случае может оказаться вместо цепи второго класса цепь первого.

Отметим звено основного полигона, к которому концевая цепь примыкает, цифрой *I*; звено концевой цепи, которым она примыкает к основному полигону — цифрой *II*, ближайшее к последнему бесповодковое концевой цепи — цифрой *III*. Отделим от концевой цепи часть, начинающуюся звеном *III*, что всегда можно сделать, разъединив только один шарнир звена *III*, так как между звеньями *I* и *III* располагается простая цепь одноповодковых звеньев, число которых может оказаться равным нулю. Если мы после отделения этой части к звену *III* присоединим поводок, то получится нормальная цепь второго (или первого) класса.

Чтобы доказать, что в концевой цепи непременно имеется вилка, достаточно подсчитать число имеющихся в ней бесповодковых и число концов, причем исходить можно из подсчета тех же элементов в полученной из нее указанным образом нормальной цепи. Если в данной концевой цепи число бесповодковых было n, то в нормальной цепи их будет $n - 1$, потому что звено *III* превратилось в одноповодковое; число концов в ней будет поэтому $n + 1$ и равно притом числу концов концевой цепи, за счет которой получилась нормальная, так как нового конца не образовалось; звено *III* было и осталось средним. Итак, в концевой цепи было n бесповодковых и $n + 1$ концов; так как каждый конец примыкает к бесповодковому, то хотя бы одно бесповодковое, к которому примыкает два конца, должно найтись; но в таком случае эти два конца образуют вилку.

Как и в случае цепи второго класса, замена вилки двумя поводками не меняет типа цепи; после такой замены концевая цепь останется нормальной концевой, причем в ней опять будет иметься вилка, если она не перейдет в простую концевую цепь.

Теперь переходим к нахождению прямой, на которой должно лежать изображение точки звена *I*, в которой оно шарнирно соединено со звеном *II*.

Концевые звенья концевой цепи обладают тем свойством, что для каждого из них известны две прямые, на которых должны лежать изображения точек закрепления поводков. Но тогда такие прямые для каждой точки любого звена вилки окажутся известными по одной, в том числе и для двух точек бесповодкового звена, которыми последнее шарнирно соединено с вилкой. Найдя эти две прямые для точек бесповодкового звена, можно временно считать роль первой вилки законченной и мысленно ее отбросить. Если теперь к бесповодковому звену мы присоединили бы два поводка, то получили бы опять нормального типа концевую цепь, в которой опять имелась бы вилка. Но нам незачем присоединять их, потому что с нашей точки зрения наше бесповодковое звено обладает всеми свойствами конечных звеньев концевой цепи: известны две прямые, на кото-

рых должны лежать изображения скоростей двух его точек. Поэтому берем следующую вилку, в состав которой, может быть, входит только что указанное бесповодковое, может быть, и нет.

Использовав вторую вилку, мы снова можем отбросить ее и получить новое бесповодковое, для которого известны две прямые, на которых должны лежать изображения двух его точек. Так как при повторении этого процесса число концов все время убывает, то наступит момент, когда всего останется один конец.

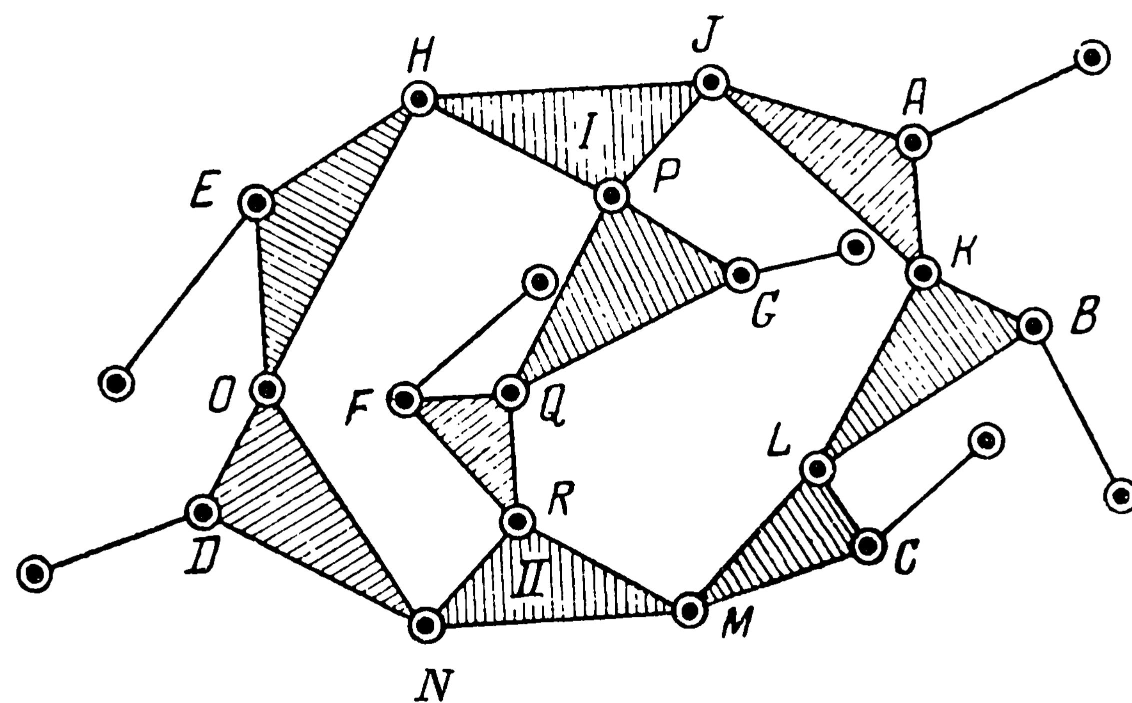
Но для всех концевых звеньев все время были известны по две прямых для каждого, на которых лежат изображения двух их точек; поэтому и для оставшегося концевого звена это также известно. Оставшаяся простая цепь будет, кроме конечного звена, содержать только одноповодковые звенья и одним из них (именно звеном *II*, которое за время всех преобразований осталось нетронутым, так как не могло войти в состав вилок) будет примыкать к звену основного полигона. Для точек каждого из этих одноповодковых звеньев определятся прямые, на которых должны лежать изображения любых их точек, следовательно, и для той точки звена *II*, которой оно шарнирно связано с *I*. Это только и требовалось доказать.

Когда скорости точек основного полигона будут определены, то для звена *II* окажется известной скорость той точки, которой она связана со звеном *I*, т. е. истинное положение изображения этой точки на прямой, которая раньше была известна. После этого в обратном порядке, как в случае цепи второго класса (см. фиг. 98), найдутся скорости остальных точек концевой цепи.

Указанными приемами исчерпывается построение скоростей точек *всех механизмов третьего класса.*

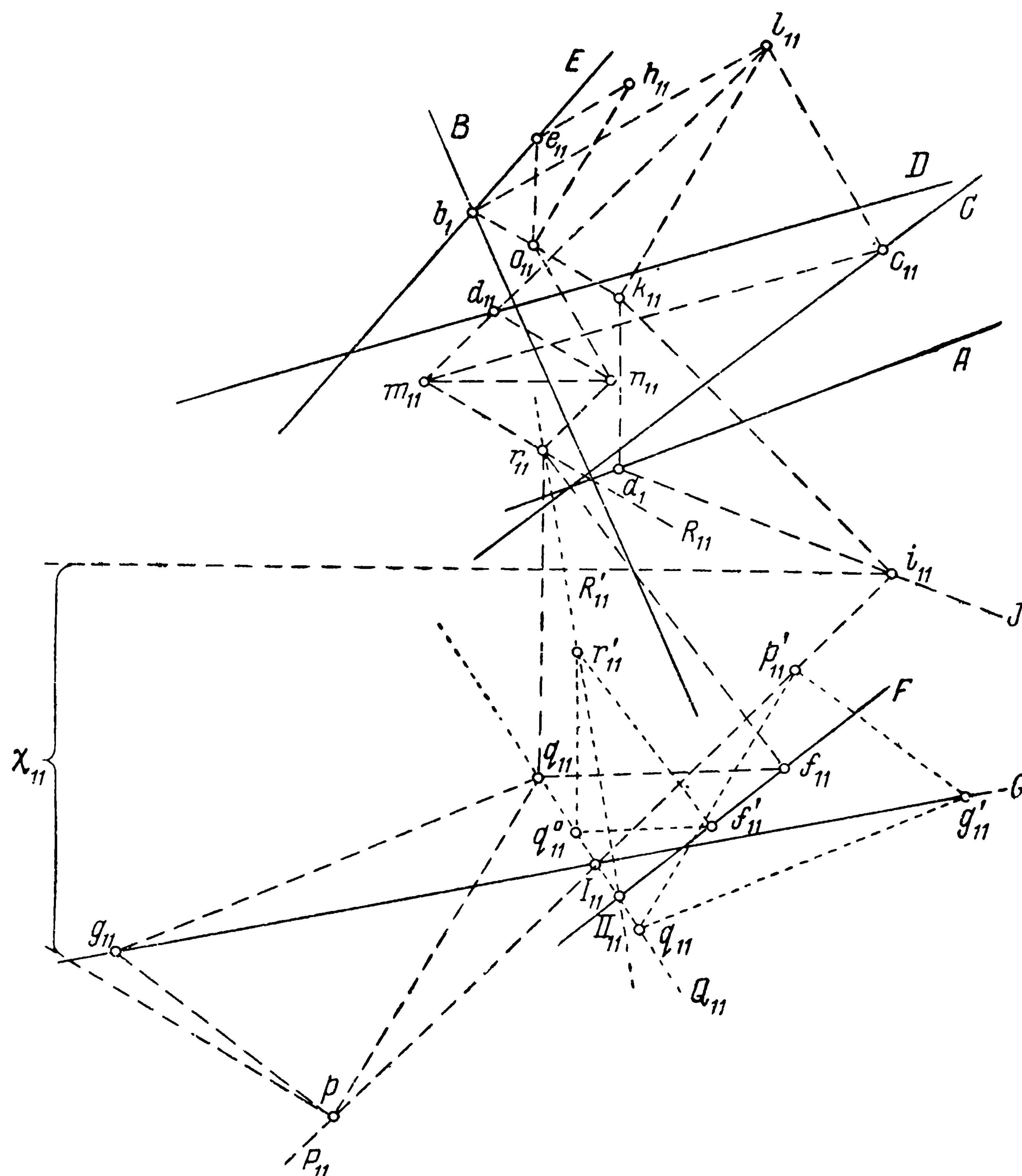
Рассуждения, касающиеся построения скоростей *механизмов четвертого класса* или, что то же,— построения скоростей точек цепи четвертого класса по данным скоростям концов поводков, отличаются, сравнительно с предыдущими, сложностью. Их ведь нельзя вести непосредственно методом доказательства от n до $n+1$, потому что характерным для такой цепи

является не число звеньев или узловых точек, а расположение диагональных цепей. Само собой разумеется, что наши рассуждения общего характера могут касаться только тех типов, которые нами разобраны и исследованы, т. е. основного типа с трехшарнирными звеньями и получаемого из него перестановкой диагональных цепей. Ввиду крайней сложности вопроса, мы начнем не с рассуждений общего характера, а с сравнительно простого примера цепи с одной диагональной цепью (фиг. 110).



Фиг. 110.

Выделяем в цепи какой-нибудь замкнутый контур. При этом, чтобы не вводить лишних обозначений звеньев, *условимся все одноповодковые звенья обозначать той же буквой, которой обозначена точка прикрепления к ним поводка*. Бесповодковые будем нумеровать римскими цифрами. Выбираем замкнутый контур, состоящий из звеньев A, B, C, II, F, G, I, отбрасывая временно звенья D и E. Такая замкнутая цепь будет простой, но звенья I, II не снабжены поводками и потому не даны на картине скоростей прямые, на которых должны лежать изображения одной из точек каждого из этих звеньев. Поэтому число данных мало для того, чтобы можно было построить картину скоростей этой цепи. Недостающие данные пополняем данными, ложными относительно всей цепи (см. фиг. 110). Именно, задаем на двух данных прямых, например A и B, положения a_1 и b_1



Фиг. 111.

изображений, одноименных с указанными прямыми точек *. После этого для звеньев упомянутого замкнутого полигона можно будет построить (фиг. 111) изображения всех остальных

* Прямые, на которых должны лежать изображения точек прикрепления поводков, уже без всяких оговорок отмечены теми же буквами, как и эти точки и нанесены на чертеж; в дальнейшем нанесение подобных прямых мы тоже оговаривать не будем.

точек, которые будем обозначать индексами 11. Последовательно строим изображения точек K, J, L, C, M точно так же, как мы поступали в случае простой замкнутой цепи.

Результаты этого построения, равно как и того, которое производилось нами четыре раза подряд при нахождении прямой $\mathfrak{H}$ для случая простой замкнутой цепи, могут быть формулированы в следующее следствие, на которое нам еще неоднократно придется ссылаться.

Следствие IV. Скорости всех точек простой цепи звеньев определяются, если известны скорости двух каких-либо точек цепи и по одной прямой для изображения одной точки каждого из звеньев, которому не принадлежат первые две точки.

Эти первые две точки могут принадлежать либо одному звену, либо двум различным. В первом случае и если два различных звена будут соседними, скорости находятся непосредственно построением. Если же эти условия не выполнены, то придется применить метод ложных положений в том виде, как он применялся к цепи фиг. 95, где известна скорость одной точки каждого из крайних звеньев. Не следует это следствие смешивать со следствием I.

Итак, можно считать известными изображения i_{11} и m_{11} точек M и J, звеньев A и C. Но точки J и M в то же время принадлежат звеньям I и II. Таким образом, для цепи, состоящей из этих звеньев и диагональной цепи (следствие IV), опять удастся построить скорости точек; но так как известные изображения точек J и M принадлежат не смежным звеньям, то придется прибегнуть к методу ложных положений.

Проще всего уяснить себе, как вести построение, если считать звенья I и II поводками крайних звеньев диагональной цепи, состоящей у нас только из двух звеньев F и G. Тогда построение будет производиться, как для нормальной цепи первого класса. Проводим через i_{11} прямую P_{11}, параллельную отрезку JP, и через m_{11} — прямую R_{11}, параллельную MR. На прямой P_{11} должно лежать изображение p_{11} точки P,

на R_{11}— изображение r_{11} точки R. Для звена G имеем две прямые P_{11} и G, на которых должны лежать изображения двух из его точек. Эти прямые пересекаются в пределах чертежа в точке I_{11}; поэтому строим только одно ложное положение треугольника G, наметив на прямой того же наименования произвольно точку g'_{11} и определяя точки p'_{11} и q'_{11}. Соединяя последнюю точку с I_{11}, определяем прямую Q_{11}, на которой лежит изображение точки Q. Изображение другой точки звена F лежит на прямой F. Наметив на прямой Q_{11} произвольно изображение q^0_{11} точки Q, определяем ложное положение звена F, построив точки f'_{11} и r'_{11}.

Второго ложного построения не требуется, так как прямые F и Q_{11} пересекаются в пределах чертежа в точке II_{11}. Поэтому прямая R'_{11}, определяемая точками II'_{11} и точкой r'_{11}, является геометрическим местом изображений вершины R. Точка пересечения прямых R_{11} и R'_{11} является истинным положением r_{11} изображения точки R. Конечно, не следует забывать, что, являясь истинным в отношении к данным положениям точек a_1 и b_1, оно, как и все точки с тем же индексом *11*, будет постольку ложным относительно данной цепи, поскольку ложны положения a_1 и b_1.

После этого легко будет построить, исходя из изображающей точки r_{11}, сопряженные точкам a_1 и b_1 изображения звеньев F и G, в частности, определить точки p_{11} и n_{11}, а также χ_{11}. Последняя оказалась за пределами чертежа и скобкой соединены две прямые, исходящие из точек p_{11} и i_{11}, в пересечении которых она лежит.

Теперь можем перейти к построению скоростей точек оставшихся звеньев данной цепи, образующих простую цепь одноповодковых между точками H и N. При этом необходимо, для компенсации двух лишних данных, которые получились благодаря произвольному заданию изображений a_1 и b_1, считать разъединенным шарнир H. Тогда изображения точек этих звеньев, так как для крайнего звена цепи одноповодковых известно положение n_{11} изображения точки N, найдутся в следующем порядке: d_{11}, o_{11}, l_{11}, h_{11}.

Возможность произвести в этом случае построение есть, собственно говоря, следствие того, что цепь одноповодковых, прикрепленная шарнирно одной точкой крайнего звена и поводками всех звеньев, может рассматриваться как наслоение двухповодковых групп. Но для дальнейшего удобнее этот вывод формулировать в еще одно следствие из построения фиг. 96.

Следствие V. Если в цепи одноповодковых звеньев, скорости концов поводков которой даны, известна, кроме того, скорость одной точки, которая не должна быть точкой укрепления поводка, то скорости всех точек цепи определятся.

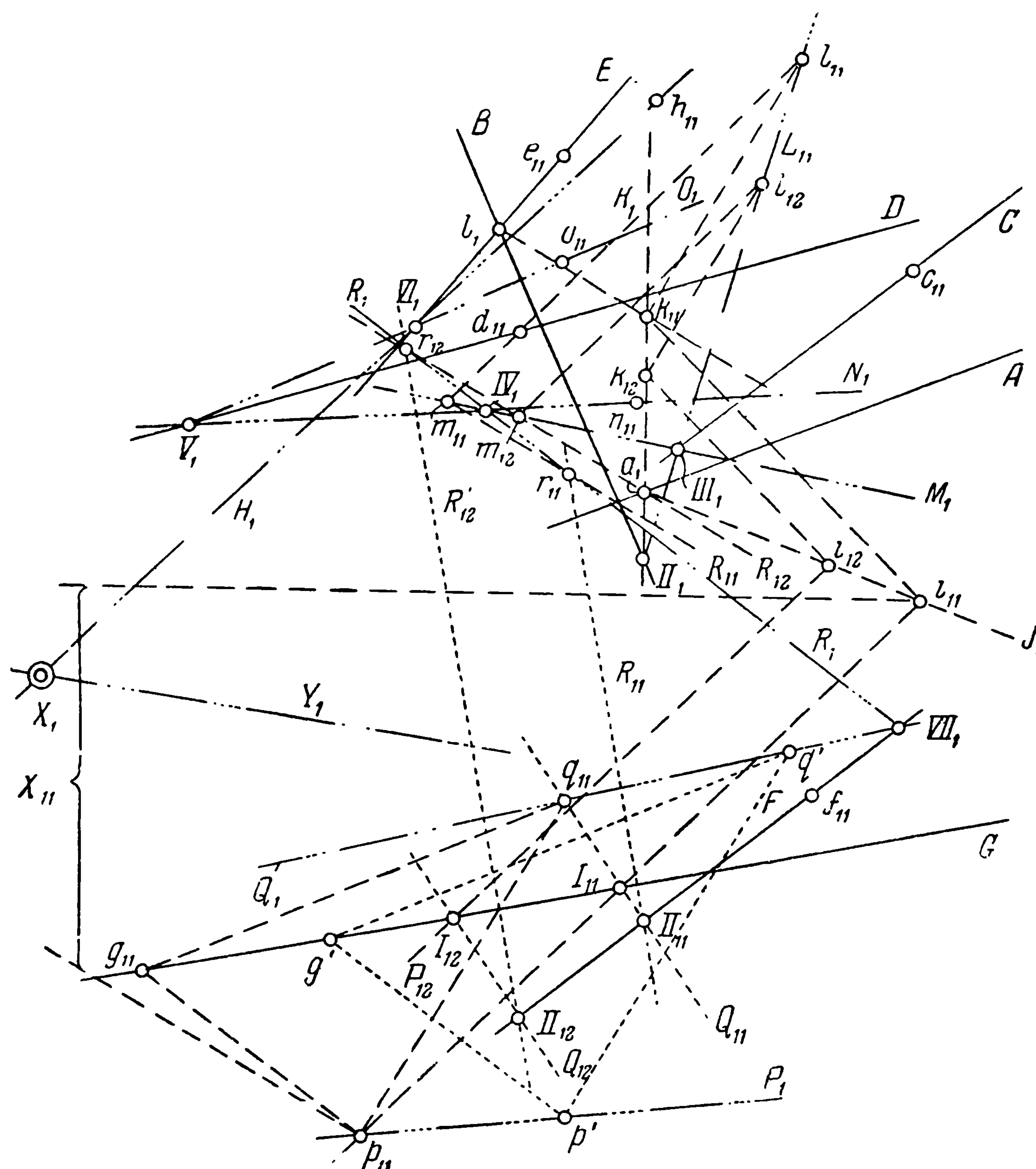
Точка χ_{11} с точкой h_{11} не совпадают. Это показывает, что, задаваясь точками a_1 и b_1, мы не угадали истинных положений изображений этих точек. Поэтому нужно изучить перемещения точек χ и h для случая, когда изображения точек A и B перемещаются по прямым того же наименования.

Будем перемещать по прямой B изображение точки B, задаваясь на этой прямой точками b_1, b_2, b_3, ..., b_n. Покажем, что при этом изображения точек h и χ будут перемещаться тоже по двум прямым, описывая ряды, подобные ряду точек b. То же самое будет относиться и к изображениям любой точки, которым мы будем приписывать два индекса: первый индекс будет 1, так как изображение точки A будет a_1, второй — будет переменный индекс изображения точки B. Указанное положение легко будет доказать для рядов точек, являющихся, при неподвижном a_1, изображениями точек звеньев A, B и C, исходя из следствия III, так как положение изображения точки A определяет прямую, на которой должно лежать изображение точки K звена B, а вторая прямая дается для изображения точки B последнего. Звено B может рассматриваться как крайнее для двух цепей одноповодковых звеньев, из которых одна цепь содержит звенья, примыкающие к нему посредством шарнира K, другая — посредством шарнира L. Кроме того, так как ряд изображений одной точки на указанных прямых будет получаться из ряда положений предыдущей проектированием лучами

пучка параллельных, то ряды сопряженных изображений на каждой из прямых будут подобны, как мы уже неоднократно убеждались. В частности, окажется:

$$(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \sim (i_{11}, i_{12}, i_{13}, \ldots, i_{1n}) \sim$$

$$\sim (m_{11}, m_{12}, m_{13}, \ldots, m_{1n}).$$



Фиг. 112.

С перемещением изображения точки J, которое будет совершаться по прямой J_1 (фиг. 112), будет смещаться параллельно самой себе и прямая P_{11}, образуя пучок параллельных лучей,

опирающихся на изображения точки J; лучи этого пучка будем называть P_{11}, P_{12}, P_{13}, ..., P_{1n}. Поэтому засекаемый ими на прямой G ряд точек I_{11}, I_{12}, I_{13}, ..., I_{1n} окажется подобным все тому же ряду изображений точки B. Покажем, что проходящие через эти точки лучи Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ..., Q_{1n} образуют параллельный пучок. Строя (см. фиг. 111) треугольник p'_{11}, g'_{11}, q'_{11}, положением вершины p'_{11} на прямой P_{11} мы задавались произвольно. Можно ее взять совпадающей с точкой i_{11}, а в общем случае совмещать точки i_{1k} и p'_{1k}, где k — переменный индекс. Тогда, при перемещении изображения точки B, вершина p'_{1k} будет двигаться по прямой J_1, вершина g'_{1k}—по прямой G и потому точка q'_{1k} будет описывать прямолинейный ряд, подобный ряду точек i_{1k}, а следовательно, и ряду I_{1k}. Итак, имеем подобие рядов:

$$(q'_{11}, q'_{12}, q'_{13}, \ldots, q'_{1n}) \sim (I_{11}, I_{12}, I_{13}, \ldots, I_{1n}) .$$

Легко заметить, что в точке пересечения прямых J_1 и G оба ряда имеют общую сопряженную точку; следовательно, они расположены перспективно, и соединяющие сопряженные их точки прямые Q_{11}, Q_{22}, Q_{13}, ..., Q_{1n} — параллельны. Эти лучи Q_{1k} высекают не только на прямой G ряд точек I_{1k}, но и на прямой F ряд точек II_{1k}, который в развернутом виде напишется: (II_{11}, II_{12}, II_{13}, ..., II_{1n}) и, будучи подобен ряду I_{1k}, в свою очередь, окажется подобным ряду изображений B *.

При построении (см. фиг. 111) треугольника q^0_{11}, f'_{11}, r'_{11} можно было задаваться произвольно положением вершины q^0_{11} на прямой Q_{11}. Можно было поэтому брать ее также совмещенной с точкой I_{11}. Поэтому, при переменном индексе k, будем считать совмещенными ряды точек I_{1k} и q^0_{1k}. Легко будет заметить, что тогда ряд точек (r'_{11}, r'_{12}, r'_{13}, ..., r_{1n}), или, сокращенно, ряд r_{1k} будет прямолинеен и подобен ряду I_{1k}, а через него — ряду изображений точек B. Покажем теперь, что

* На фиг. 112 показаны только по две точки каждого из упоминаемых рядов, по два луча каждого из пучков.

лучи R'_{1k} все параллельны между собой. Заметим, что ряд точек r'_{1k} проходит через точку пересечения лучей F и G (здесь все три вершины треугольника q^0_{1k}, r'_{1k}, f'_{1k} сливаются в одну точку) и здесь же находится сопряженная ему точка подобного ему ряда II_{1k}; поэтому подобные ряды r'_{1k} и II_{1k} оказываются рядами, перспективно расположенными, и прямые R'_{1k} между собой параллельны.

Пучок параллельных лучей R_{1k} проходит через ряд точек m_{1k} подобный ряду изображений точек B; пучок параллельных лучей R'_{1k} проходит через ряд точек r'_{1k}, тоже подобный тому же ряду. Следовательно, оба пучка параллельных лучей R_{1k} и R'_{1k} подобны и имеют общую перспективную ось. Но в пересечении сопряженных лучей этих именно двух пучков лежат точки (r_{11}, r_{12}, r_{13}, ..., r_{1n}); следовательно, перспективная ось представляет собой геометрическое место точек, образующих последний ряд. Итак, имеем подобие прямолинейных рядов:

$$(r_{11}, r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{1n}) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n).$$

После этого уже просто, исходя из следствия III, доказывается подобие все тому же ряду изображений точки B рядов изображений всех остальных точек, снабженных постоянным индексом 1 и переменным индексом k. Отсюда и вытекает прямолинейность и подобие рядов:

$$(\chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{13}, \ldots, \chi_{1n}) \sim (h_{11}, h_{12}, h_{13}, \ldots, h_{1n}).$$

Прямые, на которых расположены последние два ряда, назовем соответственно Y_1 (ряд точек χ_{1k}) и H_1 (ряд точек h_{1k}). Пересекаются они в точке, которую назовем X_1 и роль которой будет такая же, как роль точки того же наименования на фиг. 100. Она давала бы истинное положение изображения точки H, если бы точка a_1 случайно являлась истинным изображением точки A; тогда в точке X_1 должны были слиться изображения точек H звеньев I и E; последнее обстоятельство может иметь место лишь тогда, если оба указанных выше ряда не только подобны,

но и перспективно расположены. Так как точка a_1 взята нами наугад, то нет никаких оснований ожидать такого совпадения.

Только что сделанный вывод, поскольку он касается звеньев диагональной цепи, позволяет дать более общую формулировку. Нам были даны два подобных прямолинейных ряда изображений точек I и M; оказалось, что им сопряжены прямолинейные и подобные ряды изображений точек звеньев F и G. Но присоединяя к звеньям диагональной цепи звенья I и II, для которых были даны изображения только одной точки каждого, можно рассматривать их как поводки звеньев диагональной цепи. Кроме того, нетрудно наш вывод распространить от случая диагональной цепи с двумя звеньями на случай диагональной цепи с каким угодно числом звеньев. Тогда полученный вывод можно формулировать в виде следующей леммы.

Лемма III. Если в нормальной цепи первого класса даются изображения концов всех поводков, за исключением двух, для концов которых дается два (по одному на каждый) прямолинейных подобных ряда изображений, то этим двум рядам изображений сопряжены подобные им ряды изображений любой точки цепи.

Но нам приходится перемещать не только изображение точки B по прямой того же наименования, но и изображение точки A по своей прямой. Если теперь, при неподвижности точки b_1 будем перемещать изображение точки A так, чтобы оно описало ряд $(a_1, a_2, a_3, .., a_n)$ на прямой A, то так же, как и в предыдущем случае, докажем, что изображения точки H, в зависимости от того, которому из звеньев I и E мы ее отнесем, располагаются на двух прямых, образуя при этом подобные ряды:

$$(\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{31}, \ldots, \chi_{n1}) \sim (h_{11}, h_{21}, h_{31}, \ldots, h_{n1}).$$

Прямую, на которой располагается первый ряд, назовем Z_1, на которой располагается второй, — Γ_1.

Мы считали до сих пор за неподвижные точки изображения либо точки a_1, либо точки b_1. Но очевидно, что дело не в том,

в каком порядке будем нумеровать точки наших рядов. Поэтому на место постоянного индекса 1 может стать для точки a постоянный индекс k, если при переменном изображении точки B будет неподвижно изображение a_k, а для точки B — индекс q, считая, при переменном изображении точки A неподвижным изображение b_q. Тогда на некоторых прямых Y_k и H_k окажутся расположенными подобные ряды точек:

$$(\chi_{k1}, \chi_{k2}, \chi_{k3}, \ldots, \chi_{kq}, \ldots, \chi_{kn}) \sim (h_{k1}, h_{k2}, h_{k3}, \ldots, h_{kq}, \ldots, h_{kn}).$$

Равным образом на прямых Z_q и Γ_q будут расположены подобные ряды точек:

$$(\chi_{1q}, \chi_{2q}, \chi_{3q}, \ldots, \chi_{kq}, \ldots, \chi_{nq}) \sim (h_{1q}, h_{2q}, h_{3q}, \ldots, h_{kq}, \ldots, h_{nq}).$$

Покажем теперь, что все прямые Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n параллельны между собой, равно как и все прямые H_1, H_2, H_3,..., H_n между собой. С этой целью выполним четыре таких ложных построений, как выполнено на фиг. 111 для совокупности всех звеньев данной цепи. Отметим, кроме точек a_1 и b_1, еще точки a_k и b_q. Для каждой точки любого звена получим тогда четыре ложных изображения, между прочим, для точки H звена E — изображения h_{11}, h_{1q}, h_{k1}, h_{kq}, а для одноименной с ней точки звена I — изображения χ_{11}, χ_{1q}, χ_{k1}, χ_{kq}. Покажем, что каждая из этих групп, содержащая по четыре изображения, равно как и четыре изображения любой точки, располагаются в вершинах некоторого параллелограма.

Пользуясь леммой I, без труда докажем наше положение для изображений любой точки звеньев A, B и C, между прочим, и для изображений точек M и J. Чтобы иметь возможность применять лемму дальше, нужно предварительно доказать, что изображения r_{11}, r_{1q}, r_{k1}, r_{kq} располагаются в вершинах параллелограма. Для доказательства этого положения мы воспользуемся леммой II.

Когда точка a_1 была неподвижна, а перемещалось изображение точки B, то прямые Q_{12}, Q_{13}, ..., Q_{1n} оказались параллельными прямой Q_{11}. Если обратно будет неподвижно изобра-

жение точки B, а двигаться изображение точки A, то таким же образом докажем, что прямые Q_{21}, Q_{31}, ..., Q_{n1} будут параллельны прямой Q_{11}. Поэтому четыре прямые Q_{11}, Q_{1q}, Q_{k1}, Q_{kq} параллельны между собою. Равным образом, на основании таких же соображений окажутся параллельными прямые R'_{11}, R'_{1q}, R'_{k1}, R'_{kq}.

Из вершин параллелограма i_{11}, i_{1q}, i_{k1}, i_{kq} исходят четыре параллельные прямые P_{11}, P_{1q}, P_{k1}, P_{kq}, пересекаемые лучом G в точках I_{11}, I_{1q}, I_{k1}, I_{kq}; поэтому последние четыре точки могут рассматриваться как вершины параллелограма, расположенные на одной прямой. Через них, в свою очередь, проходят упомянутые выше четыре луча Q, пересекаемые прямой F; таким образом, получатся на последней опять четыре точки II_{11}, II_{1q}, II_{k1}, II_{kq}, которые тоже могут рассматриваться как расположенные в вершинах параллелограма. Из этих четырех точек исходит четыре упомянутых луча R', а из сходственных вершин параллелограма m_{11}, m_{1q}. m_{k1}, m_{kq} исходят четыре параллельных луча R_{11}, R_{1q}, R_{k1}, R_{kq}, пересечением с одноименными лучами R' определяющие точки r_{11}, r_{1q}, r_{k1}, r_{kq}. В силу леммы II четыре последних точки располагаются в вершинах параллелограма.

После этого, применяя опять лемму I, легко покажем в определенной последовательности для четырех изображений точки любого звена, что они располагаются в вершинах параллелограмов. В частности, это будет доказано относительно точек χ_{11}, χ_{1q}, χ_{k1}, χ_{kq}; первые две из этих точек лежат на прямой Y_1, вторые — на прямой Y_k, откуда следует, что семейство прямых Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n образует пучок Y параллельных лучей. Равным образом образует пучок параллельных лучей H и семейство прямых H_1, H_2, H_3, ..., H_n.

Остается доказать, что пучки H и Y подобны. В этом легко убедиться, заметив, что пучок Y высекает на прямой Z_q ряд точек (χ_{1q}, χ_{2q}, χ_{3q}, ..., χ_{kq}, ...; χ_{kn}) а пучок H — на прямой Γ_q ряд точек (h_{1q}, h_{2q}, h_{3q}, ..., h_{kq}, ..., h_{nq}), по доказанному, ему подобный.

Раз пучки H и Y подобны, то они имеют перспективную ось, на которой и будут лежать точки X_1, X_2, X_3, ..., X_n сопряженных лучей. Эту перспективную ось обозначим буквой $\mathfrak{H}$. Нетрудно показать, что на этой прямой $\mathfrak{H}$ должно лежать истинное изображение точки H данной цепи. В самом деле, стоит нам только напасть на истинные изображения точек A и B на прямых того же наименования,— и изображающие точки χ и h сольются в одну. Но такое истинное изображение χ непременно лежит на одном из лучей пучка Y, а истинное изображение h — на сопряженном ему луче пучка H, так как заданное положение изображения точки A определяет всегда два сопряженных луча этих обоих пучков. Раз так, то истинное изображение точки H лежит в точке пересечения каких-то двух сопряженных лучей указанных двух пучков, т. е. на перспективной оси $\mathfrak{H}$ этих пучков.

Отметим, что для определения прямой $\mathfrak{H}$ для всех звеньев пришлось сделать четыре ложных построения, а для звеньев диагональной цепи — восемь. Если бы точки пересечения прямых P с G и прямых Q с F не оказались в пределах чертежа, то для последнего рода звеньев понадобилось бы еще четыре ложных построения, т. е. всего двенадцать.

Знание прямой $\mathfrak{H}$, на которой находится истинное изображение точки H, однако, не позволяет еще закончить построение без новых применений методы ложных положений. Истинное положение на этой прямой изображения точки H неизвестно. Поэтому приходится задаться ложным положением h'. После этого определятся без труда ложные изображения, сопряженные изображению h', для звеньев E и D, затем для звеньев диагональной цепи, в которой звенья I и II будут рассматриваться как поводки; при этом для данного положения h' сопряженные изображения точек этих звеньев будут строиться не непосредственно, а опять-таки приемом ложных положений.

Затем, получив ложное изображение m' точки M, сопряженное с h', непосредственно строим изображения точек звеньев C, B, A. Ложность выбора изображения h' скажется в том, что два

различных изображения точки J, считая ее, с одной стороны, принадлежащей к звену I, с другой,— звену A не совпадут. Двигая изображения точки H по прямой $\mathfrak{H}$, заметим, что оба изображения точки J движутся тоже по двум разным прямым. Совместиться они могут только в точке пересечения прямых; но здесь они и должны совместиться, когда изображение точки H на прямой $\mathfrak{H}$ займет истинное положение. Так будет найдено истинное положение изображения точки J, которым будем пользоваться для построения теперь уже истинных положений изображений остальных точек данной цепи так, как раньше пользовались ложным положением h' точки H.

Если указанное здесь построение сравним с применением методы прямой $\mathfrak{H}$ к нахождению скоростей точек цепи третьего класса, то заметим, что большее число ложных построений выпадает только на долю звеньев, принадлежащих диагональной цепи.

На фиг. 112 построены простейшим способом прямые H_1 и Y_1, своим пересечением определяющие точку X_1. При этом считаются данными ложные изображения, соответствующие положениям a_1 и b_1 изображений точек A и B; все эти изображения снабжены индексом 11. Кроме того, перенесены с фиг. 111 изображения некоторых отрезков, сопряженных этим положением, например, всей ломаной линии $IKLM$, и некоторые другие прямые, с которыми приходится соображаться при дальнейших построениях. Построение основано на предыдущих доказательствах, но при практическом осуществлении число ложных построений доведено до возможного минимума.

Допуская неподвижность точки a_1 и принимая, что изображение точки B движется по прямой B, заметим, что изображения точек J и K будут перемещаться по прямым K_1 и J_1. Прямые, по которым перемещаются две вершины изображения треугольника B, будут, следовательно, K_1 и B. Эти прямые пересекаются в точке II_1, через которую должна поэтому проходить прямая L_1, по которой будет перемещаться изображение точки L; вторая точка, определяющая эту прямую, будет l_{11}. Прямые L_1

и C пересекаются в точке III_1; по ним перемещаются изображения двух вершин треугольника C и потому через нее должна проходить прямая M_1, по которой перемещается изображение точки M; второй точкой, определяющей эту прямую, будет точка m_{11}. Дальше определение прямых, по которым перемещаются изображения точек, вследствие перемещения изображения точки B по данной прямой, становится сложнее.

Необходимо, кроме точек i_{11} и m_{11}, найти еще одну пару сопряженных точек на прямых I_1 и M_1. Одну из этих точек, например, i_{12}, намечаем произвольно, вторую находим, построив изображение i_{12}, k_{12}, l_{12}, m_{12}, ломаной $IKLM$, что сделать совсем уже просто, раз известны прямые K_1, L_1, M_1. Проведя через i_{12} прямую P_{12}, параллельную P_{11}, засекаем на прямой G точку I_{12}, через которую должна пройти прямая Q_{12}; последняя, по доказанному, параллельна прямой Q_{11} и засекает на прямой F точку II_{12}, через которую проходит прямая R'_{12}, по доказанному, параллельная R'_{11}. Из точки m_{12} исходит прямая R_{12}, параллельная R_{11}, и в пересечении с R'_{12} определяющая точку r_{12}. Две точки r_{11} и r_{12} определяют прямую R_1, по которой движется изображение точки R. Дальнейшее построение опять совершается просто и излагается нами поэтому несколько сокращеннее.

Прямые R_1 и M_1 пересекаются в точке IV_1, которая вместе с точкой n_{11} определяет прямую N_1. Последняя, пересекаясь с прямой D в точке V_1, определяет проходящую через o_{11} прямую O_1. Эта последняя, наконец, дает в пересечении с прямой E точку VI_1, через которую должна пройти искомая прямая H_1, на которой сверх того лежит точка h_{11}. Остается еще найти прямую Y_1.

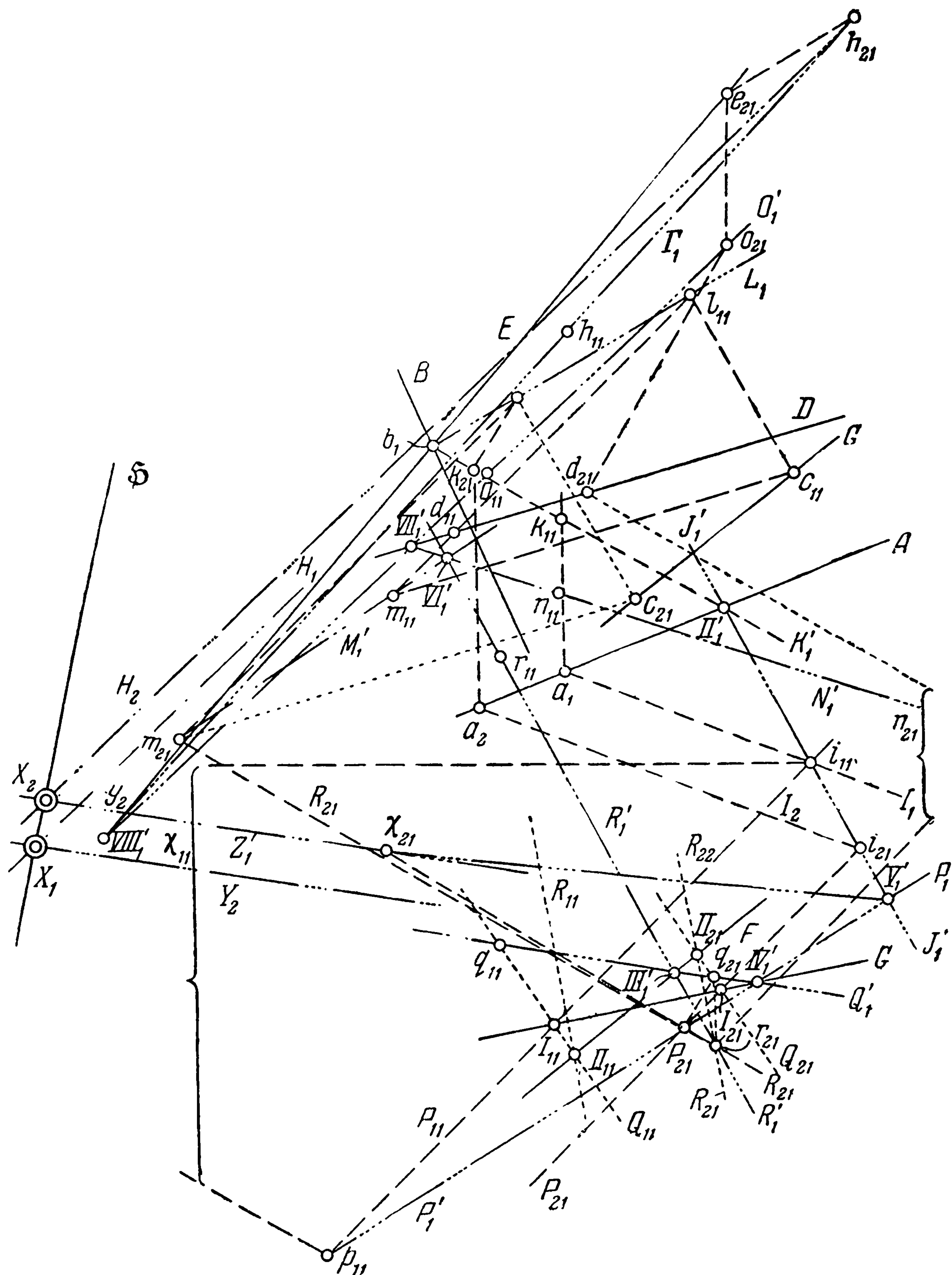
Прямая R_1 пересекается с прямой F в точке VII_1; последняя и точка q_{11} определяют прямую Q_1. Прямая Q_1 с прямой G пересекается в точке $VIII_1$, которая оказалась за пределами нашего чертежа; поэтому для определения прямой P_1 приходится прибегнуть к ложному положению. Наметив на прямой G произвольно изображение g' точки G, легко определяем сопряженное

с ним изображение q' на прямой Q_1, а затем и p'. Два положения изображения точки P, именно p_{11} и p', определяют прямую P_1. Последняя пересекается с прямой J_1 в точке IX, лежащей тоже за пределами чертежа. Через нее-то и должна проходить прямая Y_1, по которой перемещается изображение третьей вершины H треугольника I. Кроме того, на прямой Y_1 лежит раньше найденная точка χ_{11}. Так как и эта последняя лежит за пределами чертежа, то для построения прямой Y_1 пришлось применить добавочное построение, на чертеже не показанное, дающее возможность построить прямую, пересекающую площадь чертежа, по данным двум точкам, лежащим за его пределами. В пересечении прямых Y_1 и H_1 находится точка X_1.

Определение точки X_2 нами сделано на фиг. 113, куда перенесены необходимые для этого элементы с предыдущих чертежей. Способ нахождения этой точки может быть повторением предыдущего построения. Так, мы нашли прямые H_1 и Y_1, считая изображение a_1 точки A неподвижным, изображение точки B — двигающимся; при этом понадобилось вычертить предварительно ложные положения изображений каждой точки, отмеченные индексом 11. Можно было бы теперь считать неподвижным изображение a_2, построить сначала картину скоростей, соответствующую при этом неподвижности изображения b_1, т. е. вычертить изображения всех точек, снабженные индексом 21. Когда окажутся найденными точки h_{21} и χ_{21}, то остается через них только провести прямые Y_2 и H_2, параллельные Y_1 и H.

На фиг. 113 изображен, однако, отличный от этого прием*, в основу которого положена прежняя ложная картина скоростей, в которой изображения точек снабжены индексом 11. Затем предположено, что движется изображение точки A и

* Какой-либо экономии в количестве построений этот прием, сравнительно с указанным выше, не дает; поэтому смотреть на него следует только как на возможную вариацию. По всей вероятности, повторение построения, уже раз выполненного, окажется более легким в применении, чем новое.



Фиг. 113.

найдены прямые, по которым будут перемещаться изображения остальных точек. Таким образом, получатся прямая Γ_1, по которой перемещается изображение точки H звена E и на которой должны лежать точки h_{11} и h_{12}, и прямая Z_1, по которой перемещается изображение точки H звена I и на которой должны лежать точки χ_{11} и χ_{21}. Когда даны все прямые, на которых должны лежать соответствующие изображения каждой точки, то уже просто, задавшись положениями a_2 и b_1 изображений точек A и B, построить изображения всех остальных точек, в том числе и точек χ_{21} и h_{21} на прямых Z_1 и Γ_1; эти точки, как указано, определят прямые Y_2 и H_2.

Когда точка b_1 остается на месте, а движется изображение точки A, то изображение точки K перемещается (см. фиг. 113) по прямой K_1', параллельной BK и проходящей через точку b_1. Прямая K_1' пересекает прямую A в точке II_1' и через эту же точку должна проходить прямая J_1', по которой перемещается изображение точки J; вторая точка, определяющая эту прямую, будет i_{11}. Что касается прямой L'_1, по которой перемещается изображение точки L, то она проходит через точку b_1; точка пересечения ее с прямой C лежит далеко за пределами чертежа и потому не использована для нахождения прямой M'_1; последняя найдена определением на чертеже положения точки m_{21}. Для этого построено изображение $a_2k_{21}l_{21}$ ломаной AKL, а затем треугольник $l_{21}c_{21}m_{21}$. Прямая M'_1 определяется точками m_{11} и m_{21}. Для дальнейших построений необходимо найти еще точку i_{21} на прямой J'_1, что сделать просто, исходя из a_2.

Точки m_{21} и i_{21} определяют прямые R_{21} и P_{21}, на которых должны лежать точки r_{21} и p_{21}. Прямая P_{21} пересекает прямую G в точке I_{21}, через которую должна проходить и прямая Q_{21}, по предыдущему параллельная Q_{11}. В пересечении прямых F и Q_{21} определяется точка II_{21}, через которую проводим прямую R'_{21}, параллельную R'_{11}. Прямые R_{21} и R'_{21} определяют точку r_{21}.

Теперь является возможность провести прямую R'_1, по которой перемещается изображение точки R при перемещении

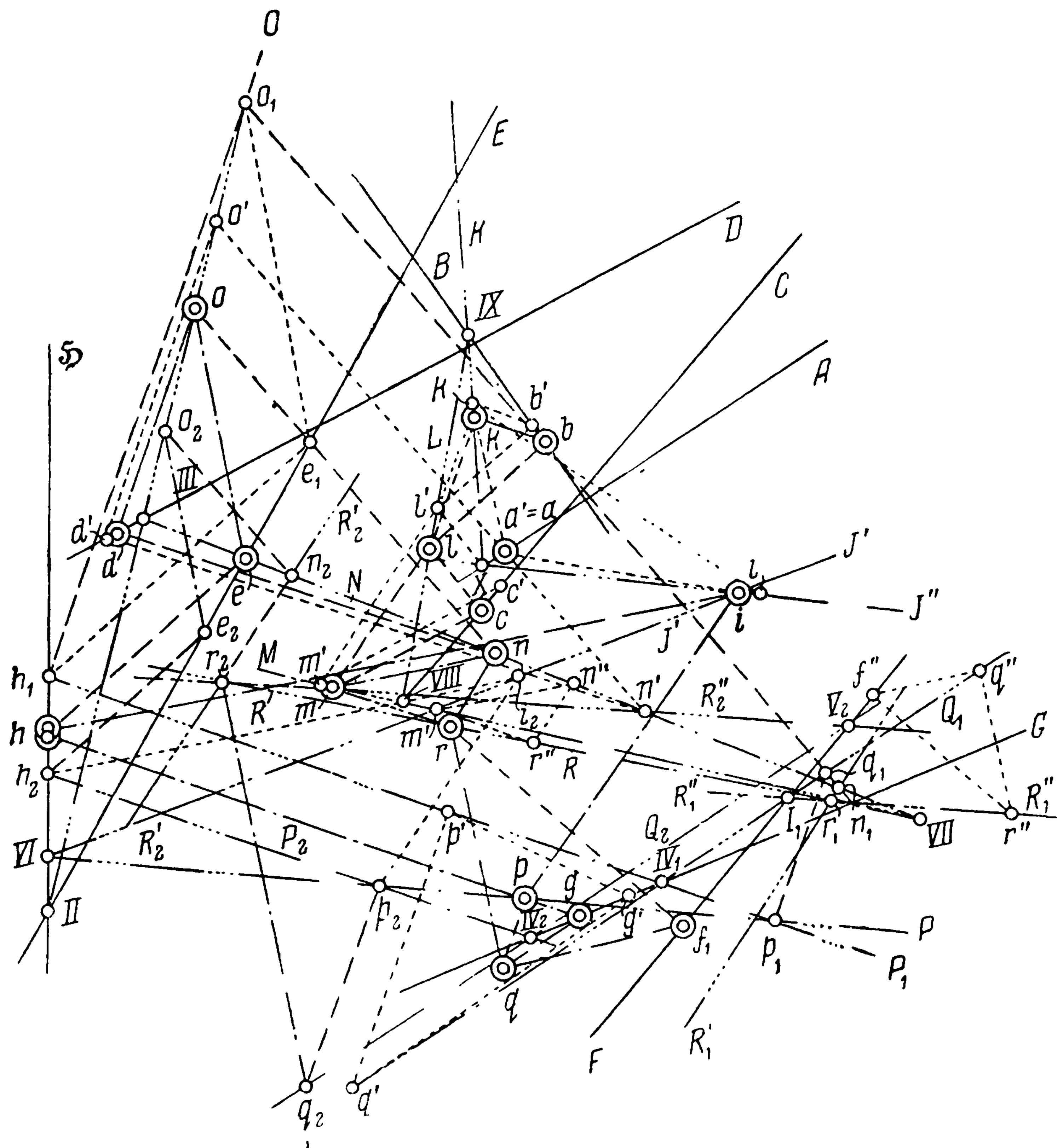
изображения точки B, так как она проходит через точки r_{11} и r_{21}. Эта прямая пересекает F в точке III'_1, которая совместно с точкой q_{11} определит прямую Q'_1. Последняя пересекает прямую G в точке IV'_1; через нее и точку p_{11} прокладываем прямую P'_1, определяющую совместно с прямой J'_1 точку V'_1, через которую должна проходить прямая Z_1; второй точкой, определяющей эту прямую, служит лежащая за пределами чертежа точка χ_{11}. Та же прямая R'_1 пересекает прямую M'_1 в точке VI'_1; через последнюю и точку n_{11} проходит прямая N_1'; последняя, в свою очередь, пересекаясь с точкой D, дает точку VII'_1; через нее и точку o_{11} проводим прямую O'_1, пересекающую E в точке $VIII'_1$. Точки $VIII'_1$ и h_{11} определяют искомую прямую Γ_1.

Исходя из точки r_{21}, построением изображений a_2 и b_1, сопряженных изображению ломаной $RNDOEH$, найдена точка h_{21}; при этом точка n_{21} оказалась за пределами чертежа. Точка χ_{21} найдена построением изображения ломаной $RQPH$. Через точки h_{21} и χ_{21} проведены соответственно лучи H_2 и Y_2, параллельные раньше найденным лучам H_1 и Y_1 и определяющие точку X_2. Через точки X_1 и X_2 проложена прямая $\mathfrak{H}$.

Построение продолжено на фиг. 114, на которую нужно перенести только данные прямые A, B, C, D, E и найденную $\mathfrak{H}$*. На последней задаемся ложным положением h_1 точки H и строим сопряженное ему изображение $h_1e_1o_1$ треугольника E. Через точку II пересечения прямых $\mathfrak{H}$ и E должна проходить прямая O, на которой лежит, кроме того, точка o_1 и по которой будет перемещаться изображение точки O, когда изображение точки H перемещается по прямой $\mathfrak{H}$. Через лежащую в пересечении точек O и D точку III должна проходить прямая N; вторая точка этой прямой находится, задавшись положением d' изображения точки D, на прямой того же наименования и построив треугольник $d'o'n'$; точка n' лежит на пря-

* Перенос найденных элементов для продолжения построений на другом чертеже проще всего выполнить, если чертеж вычертить на кальке.

мой N. На этой прямой находим точку n_1, сопряженную с точкой h_1, построив изображение o_1n_1 отрезка ON. Точки h_1 и n_1 определяют две прямые P_1 и R, параллельные изображаемым



Фиг. 114.

отрезкам HP и NR, на которых должны лежать сопряженные с точкой h_1 изображения p_1 и r_1 точек P и R.

Прямая P_1 пересекает прямую G в точке IV_1, через которую должна проходить и прямая Q_1; вторая точка этой прямой получится, если выбрать произвольно на прямой P_1 точку p' и построить изображение $p'g'q'$ треугольника R; точка q' также

лежит на прямой Q_1. Через точку пересечения V_1 прямых Q_1 и F должна проходить вторая прямая R''_1, на которой лежит точка r_1. Чтобы получить еще точку этой прямой, выбираем на прямой F произвольно точку f'' и строим соответствующее изображение $f''q''r''$ треугольника F; точка r'' является искомой второй точкой. Прямые R_1' и R_1'' пересекаются в точке r_1. Теперь уже, построив изображение ломаной RQP, просто определить на прямых Q_1 и P_1 точки q_1 и p_1.

Однако нам требуется определить еще прямые P, Q, R, по которым перемещаются изображения одноименных с ними точек, когда изображение точки H перемещается по прямой $\mathfrak{H}$. С этой целью выбираем второе ложное положение h_2 точки H на этой прямой и находим сопряженные ему изображения точек E, O, N на прямых того же наименования. Через точки h_2 и n_2 проходят прямые P_2 и R_2', на которых должны лежать изображения p_2 и r_2. Прямая P_2 пересекает прямую G в точке IV_2, через которую должна проходить прямая Q_2; второй точки этой прямой можно не находить, если заметить, что она параллельна ранее найденной прямой Q_1*. Доводим прямую Q_2 до пересечения с F в точке V_2 и через последнюю — прямую R_2'', параллельную R_1'', дающую в пересечении с прямой R_2' точку r_2. После этого строится, исходя из точки r_2, изображение ломаной RQP, чем определятся точки p_2 и q_2 на прямых P_2 и Q_2. Через точки p_1 и p_2 проходит прямая P, через точки q_1 и q_2 — прямая Q, через точки r_1 и r_2 — прямая R.

Прямые P и $\mathfrak{H}$ пересекаются в точке VI, через которую должна проходить прямая J', по которой перемещается изображение точки J звена J, когда изображение точки H перемещается по прямой $\mathfrak{H}$. Вторую точку прямой J' определяем, построив изображение $h_2p_2i_2$ треугольника I, причем точки h_2 и p_2 найдены раньше; точки VI и i_2 определят прямую J'. Прямые R и N пересекаются в точке VII; через нее же должна

* Доказательство аналогично приведенному раньше для четырех прямых Q_{11}, Q_{1q}, Q_{k1}, Q_{kq} и основано на применении леммы II.

проходить прямая M. Задавшись на прямой N точкой n'', строим изображение $n''r''m''$ звена II, точка m'' которого тоже должна лежать на прямой M. Последняя пересекает прямую C в точке $VIII$, лежащей на искомой прямой L; вторая точка той же прямой найдется, построив изображение $m'c'l'$ звена C. В пересечении прямых L и B лежит точка IX, через которую проходит прямая K, вторая точка этой прямой определится построением изображения $l'b'k'$ треугольника B. Прямая K в пересечении с A дает точку X, через которую проходит прямая J'', по которой перемещается изображение точки J звена A. Вторую точку этой прямой определяем построением ложного изображения $k'a'i'$ того же звена.

Прямые J' и J'' пересекаются в точке i, которая есть теперь уже истинное изображение точки J, так как при истинном положении изображения точки H оба изображения точки J, независимо от того, к какому из звеньев I или A ее относить, сливаются в одно; это может иметь место только в точке пересечения прямых J' и J''. Так как, кроме того, известно для каждой точки по прямой, на которой должно лежать истинное ее изображение, то все изображения остальных точек находятся уже легко, если построить изображение соответствующих ломаных. Все истинные изображения обозначены на нашем чертеже двойными кружками.

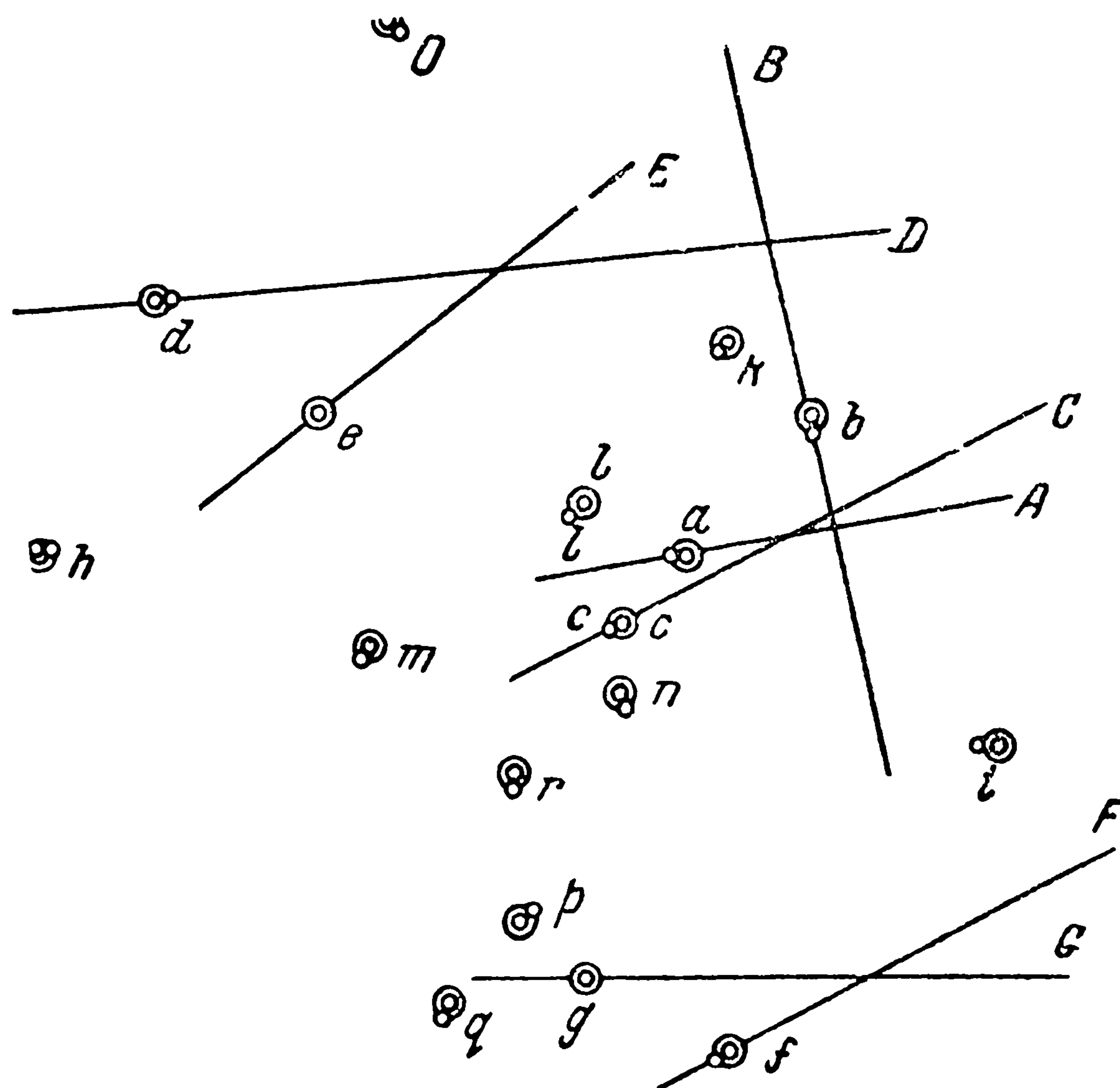
От точки i к точке h можно притти тремя путями, именно, построив непосредственно изображение неизменяемого отрезка JH, либо изображения двух ломаных $JPQRNOEH$ и $JKLMRQPH$. Неточности чертежа скажутся в невязке, т. е. в том, что все изображения точки H, полученные этими тремя путями, не сольются в одно. Величина невязки является поэтому критерием, определяющим как правильность, так и точность чертежа. В нашем случае первые два изображения точки H слились в одно, третье же отклонилось от первых двух на оригинале чертежа на 1,25 мм. Такая невязка поражает своей малостью, если принять во внимание, что результат получился лишь после весьма большого числа графических манипуляций, каждая из

которых вносит некоторую ошибку. Ведь при гораздо менее сложных построениях, как, например, в диаграммах напряжений стержней ферм невязка в 2—3 мм считается вполне допустимой. Тем не менее столь малая невязка в точке h сама по себе не должна располагать к особому оптимизму при оценке пригодности построения.

Если на прямой $\mathfrak{H}$ берется ряд точек, то сопряженные с ними точки прямой N, например, образуют ряд, подобный ряду точек на прямой $\mathfrak{H}$. Если рассмотрим расстояния между точками h_1 и h_2 и точками n_1 и n_2, то увидим, что расстояние между последними примерно в шесть раз больше, чем расстояние между первыми. Поэтому можно подумать, что если бы мы вели построение так, чтобы установить связь не в точке H, а в точке N, то при той же точности построений получилась бы невязка в 7,5 мм, так как на таком расстоянии должны находиться изображения точки N, сопряженные с нашими двумя изображениями точки H, находящимися на расстоянии 1,25 мм.

Чтобы вполне выяснить, насколько может считаться точным результат, полученный после столь длительного ряда операций, искомая картина скоростей была наперед задана. Это сделать очень просто. Попрежнему дается чертеж цепи (см. фиг. 110); чертится цепь такой же структуры, как данная, составленная из треугольников, подобных треугольникам, входящим в состав данной цепи, и с параллельностью соответственных отрезков, что сделать тоже совершенно просто. Это и будет картина скоростей точек данной цепи, за исключением точек, принадлежащих поводкам. После этого прямые A, B, C, D, E, F, G, параллельные направлению соответствующих поводков, наносятся на чертеж уже не произвольно, а так, чтобы на них лежали раньше нанесенные на чертеж изображения одноименных с ними точек. Тогда, пользуясь этими прямыми, как данными, строим картину скоростей указанным выше приемом. Само собой разумеется, что в результате не получится картины, вполне тождественной с данной истиной. Но сопоставление обоих картин даст нам более точное представление о надежности

результатов построения, так как невязка обнаружится не в одной точке, а в каждой точке в отдельности. Сопоставление обеих картин, наперед заданной и полученной в результате построений, сделано на фиг. 115, где простыми кружками намечены истинные положения изображающих точек, двойными— полученные в результате построений. Наибольшая невязка полу-

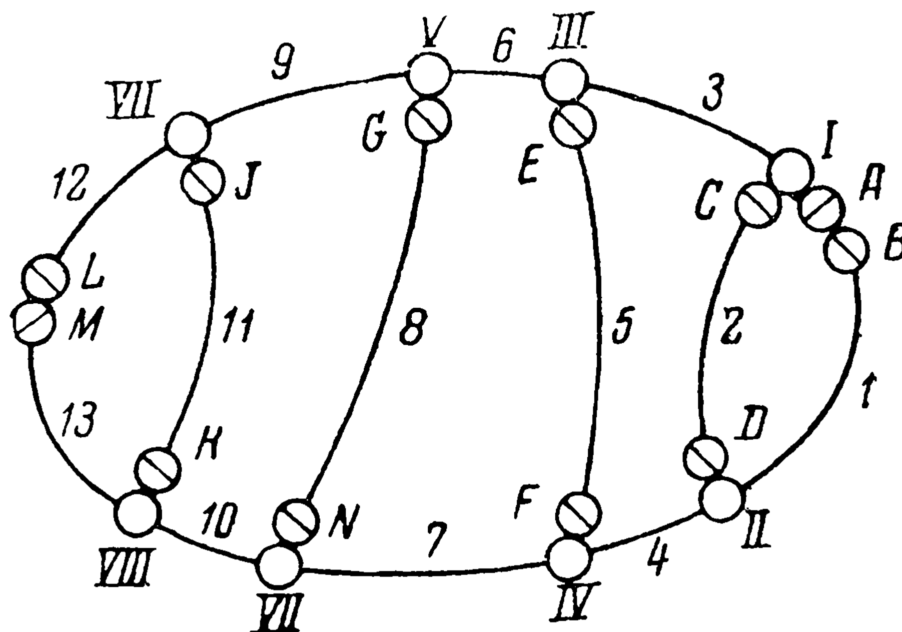


Фиг. 115.

чена в точках l, c, b, i, где в оригинале чертежа она равнялась примерно трем миллиметрам. Это показывает, что, несмотря на сложность, указанное построение дает удовлетворительные результаты.

Указанное здесь построение, на первый взгляд, применимо только тогда, когда в цепи имеется хоть одна цепь одноповодковых звеньев, не содержащая менее двух звеньев, потому что мы, при выполнении ложных построений, задавались изображениями точек A и B двух смежных одноповодковых звеньев.

Но, очевидно, что вместо изображения точки B на прямой B можно задаваться изображением J, на прямой J_1, определяемой, когда дано изображение точки a_1. При доказательстве правильности построения нужно будет только рассматривать случай, когда четыре точки i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22} образуют параллелограм; при этом вторая пара упомянутых точек будет лежать на отличной от J_1 прямой J_2, проходящей через точку a_2. При выполнении построения нужно, оставив изображение точки A неподвижным, для получения прямых H_1 и Y_1 перемещать изображение точки J по прямой J_1, для получения прямых H_2 и Y_2 — по прямой J_2.



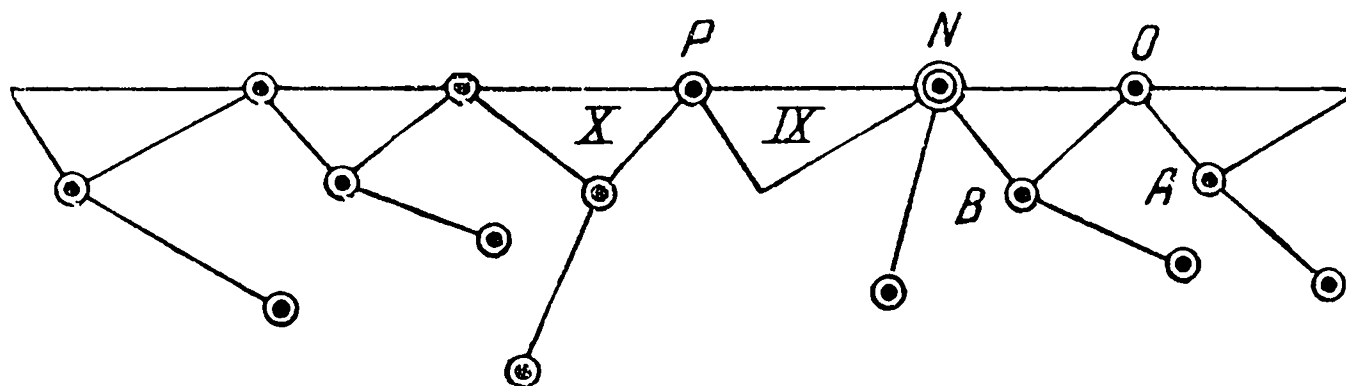
Фиг. 116.

Указанный для простой замкнутой цепи (см. построение фиг. 100) и для цепи четвертого класса с одной диагональной цепью метод прямой $\mathfrak{H}$ непосредственно переносится на цепи четвертого класса с параллельными диагоналями при расположении последних, как на фиг. 116. Бесповодковые звенья отмечены кружками; одноповодковые звенья, на которых приходится более чем на других таких же звеньях останавливать внимание, — такими же кружками, но перечеркнутыми по диаметру; цепи одноповодковых звеньев — криволинейными отрезками; бесповодковые звенья занумерованы римскими цифрами; одноповодковые звенья обозначены латинскими буквами, причем предполагается, что точка прикрепления к каждому из них поводка обозначена той же буквой.

Итак, предполагаются заданными на картине скоростей столько прямых, сколько у нас имеется одноповодковых звеньев (по одной прямой для изображения точки прикрепления каждого поводка). Покажем, что ложная картина скоростей может

быть построена, если задаться изображениями a_1 и b_1 точек A и B на одноименных с ними прямых.

Если изображения этих точек даны, то скорости всех точек звеньев A и B построятся, как в случае обоих звеньев двухповодковой группы. К этим звеньям примыкает ряд одноповодковых звеньев цепи *1*.



Фиг. 117.

В силу следствия V определятся скорости всех точек звеньев цепи *1*, заключенных между звеньями B и II, если только поводок примыкающего к звену B одноповодкового звена не прикреплен в шарнире, соединяющем это звено со звеном B.

Если же осуществится последний случай, то придется только несколько изменить порядок построения. Случай этот изображен на фиг. 117, где поводок звена IX прикреплен в точке N, шарнирно соединяющей это звено со звеном B. Сначала достаточно будет задаться изображением точки A на своей прямой В самом деле, если скорость точки A дана, то определится по прямой для изображения каждой точки этого звена, в том числе и точки O. Для каждой точки O, B и N звена B будет известна одна прямая, на которой должно лежать изображение каждой из них, так что мы приходим к случаю трехповодкового звена, и скорость N определится. После этого для изображения точки P определяется прямая и приходится на этой прямой задаться изображением точки P, вместо того, чтобы, как раньше, задаваться изображением точки B на прямой B.

Дальше идет цепь одноповодковых, к которой применимо следствие V. Возможно себе представить, что и здесь поводок следующего за IX звена прикрепляется в точке P. Тогда

этот поводок вместе со звеном *IX* образует двухповодковую группу, и скорость точки *P* определится. При этом, в смысле дальнейших манипуляций, звено *X* займет место звена *IX*. Возможно, однако, что такой ряд случаев прикрепления поводка будет продолжаться до последнего звена цепи *I*, которое примыкает к звену *II*. Тогда место точки *P* займет точка прикрепления этого звена к последнему звену цепи *I*.

Более подробно на этом особом, только в смысле порядка построений, случае останавливаться не будем. Сущность все та же; кроме произвольного задания изображения точки *A* на своей прямой, нужно еще задаться произвольно на определяемой этим заданием прямой изображением точки звена *II*, которой последнее шарнирно соединяется со звеном цепи *I*. Будет ли сначала определена прямая, на которой лежит изображение упомянутой точки, и потом это изображение явно задано, или же оно будет задано неявно, через посредство задания изображений точек *B* или *P*, в конце концов, — безразлично.

Итак, считаются известными скорость точки, которой звено *I* примыкает к конечному звену *A* цепи *I* одноповодковых звеньев и скорость точки звена *II*, которой оно примыкает к другому конечному звену той же цепи.

Теперь можно рассматривать звенья *I* и *II* как поводки звеньев *C* и *D* диагональной цепи *2*, и потому последняя в совокупности с бесповодковыми звеньями *I* и *II* является нормальной цепью второго класса, скорости концов поводков которой известны. Так, мы найдем скорости всех точек звеньев замкнутого контура, составленного из бесповодковых звеньев *I* и *II* и цепей одноповодковых звеньев *1* и *2*.

Возможно, что в цепи *1* не найдется двух одноповодковых звеньев; тогда задаемся изображением точки *A* и точки, звено *A* которой примыкает к одному из бесповодковых *I* или *II*, заменяя, таким образом, изображение точки *B*. Возможно, что звенья *I* и *II* окажутся смежными, так что и звено *A* отсутствует; но тогда на место цепи *1* можно взять цепь *2*, в которой уже непременно будет одно одноповодковое, так как

иначе звенья *I* и *II* оказались бы соединенными между собой двумя шарнирами.

К звеньям *I* и *II* примыкают цепи одноповодковых *3* и *4*, скорости точек которых, согласно предыдущему, будут определены *. Далее пойдет цепь, состоящая из звеньев *III* и *IV* и диагональной цепи *5*, которая может рассматриваться как нормальная второго класса с известными скоростями концов поводков, затем цепи *6* и *7*, цепь *8* со звеньями *V* и *VI*, цепи *9* и *10*, цепь *11* со звеньями *VII* и *VIII*, наконец, цепь одноповодковых *12* с конечным звеном *L* и такая же цепь *13* с конечным звеном *M*.

Скорости точек звеньев *M* и *L* были найдены совершенно независимо друг от друга, подходом к первому со стороны звена *VIII*, ко второму — со стороны звена *VII*. Если бы изображения точек *A* и *B*, которыми мы задались произвольно на соответствующих прямых, совпали с истинными изображениями этих точек, то оба изображения точек звеньев *M* и *L*, в которых

* И здесь возможно, что условия, при которых справедливо следствие V, не окажутся соблюденными, если, например, поводок звена, которым цепь *3* примыкает к звену *I*, прикреплен в шарнире, соединяющем между собой эти звенья. От рассмотрения этого случая в общем виде нам, однако, приходится отказаться, так как он будет повторяться все в более и более сложных комбинациях, а между тем рассмотреть его удобно, относя поводок, закрепленный в общем шарнире между двумя звеньями, к тому из них, которое в схеме изображено бесповодковым. Между тем, в первой части труда не были в общем виде разобраны для цепей четвертого класса случаи переноса поводков и образование узловых звеньев, снабженных поводками. Исключая поэтому впредь из рассмотрения случаи, где для цепи одноповодковых звеньев условия следствия V не удовлетворяются, не будем уже оговаривать этого упущения.

По существу же легко сообразить в каждом отдельном случае, как поступать. Произвольно можно задать изображение только одной точки в части цепи, с которой приходится манипулировать раньше, чем подойти к звену с таким слиянием двух различных шарниров, и определить не ложное изображение точки прикрепления поводка в таком шарнире, а только (ложную) прямую, на которой оно лежит, потому что вторая (истинная) прямая уже известна, раз дано изображение другого конца поводка.

последние соединены шарниром, сольются. Помимо такой случайности, слияния этих изображений ожидать нельзя. Назовем шарнирную точку между звеньями M и L через H, изображение ее в звене M — через h, в звене L — через χ.

Оставляя изображение точки A на месте, перемещаем изображение точки B. Окажется, что изображения h и χ перемещаются по прямым, которые сопряжены с изображением a_1 и могут быть названы H_1 и Y_1; затем берем второе изображение a_2 точки A, а изображение точки B двигаем по прямой B; геометрическим местом изображений h и χ будут служить две другие прямые H_2 и Y_2, соответственно параллельные прямым H_1 и Y_1. Пересечение прямых H_1 и Y_1 определяет точку X_1, прямых H_2 и Y_2 — точку X_2. Точки X_1 и X_2 определяют прямую $\mathfrak{H}$, на которой лежит истинное избражение точки H.

Чтобы доказать применимость для цепи типа фиг. 116 метода прямой $\mathfrak{H}$, выскажем в общем виде те положения, которые лежали в основе применения этого метода в цепях третьего класса и цепи фиг. 110, и заметим, что этот метод может быть применен теоретически к любой системе, для которой имеют место следующие три положения. Практически необходимо уметь построить ложную картину скоростей.

Положение I. Когда одно из ложных изображений двух точек на заданных прямых неподвижно, а другое движется, то оба изображения разъединенного шарнира H описывают каждое прямолинейный ряд точек, подобный ряду, описываемому независимо движущимся изображением. Такие же ряды описывают и изображения остальных точек цепи.

При этом за независимо движущиеся изображения берутся изображения точек прикрепления поводков двух соседних одноповодковых; за неимением таких могут быть взяты изображения двух точек одного и того же звена, именно точки закрепления поводка и шарнирной точки, соединяющей его данное звено с соседним. В последнем случае разным положениям изображения первой точки сопряжены разные прямые, по которым должно двигаться изображение второй.

Положение II. Четырем возможным парным комбинациям из двух независимо намечаемых изображений одной точки и двух таких же другой соответствуют четыре изображения каждой из двух точек, получаемых разъединением шарнира, расположенные в вершинах параллелограма. Так же располагаются изображения остальных точек цепи.

В случае, когда второго, соседнего с первым одноповодкового звена, не существует, то на место двух изображений второй точки становятся четыре, расположенные в вершинах параллелограма.

Из этих двух положений следует третье, которое нам и позволяло находить прямую $\mathfrak{H}$.

Положение III. Различным положениям одного из произвольно намечаемых изображений сопряжен пучок параллельных лучей, описываемых изображениями некоторой точки цепи. Для каждой изображаемой точки получается свой пучок, и все пучки, сопряженные произвольно намечаемым изображениям одной из точек подобны между собой.

Нас интересовало только подобие пучков, соответствующих двум различным (вследствие разъединения шарнира) точкам H, так как из их подобия следовало, что они имеют общую перспективную ось $\mathfrak{H}$, на которой и должно лежать истинное изображение точки H.

Большое удобство представит обобщение лемм I и II. В то время как последние трактуют об изображениях неизменяемого треугольника и геометрически распространены нами на простую цепь из таких треугольников, следующие, весьма общего характера леммы говорят об изображениях точек любой системы, положение которой определяется положением определенного числа ее точек

Лемма IV. Если в какой бы то ни было системе точек положение любой точки системы определяется независимо данными положениями n точек, то геометрической сумме перемещений в картине скоростей изображения одной из указанных n точек сопряжено перемещение изображения

любой другой точки системы, равное геометрической сумме перемещений ее изображения, сопряженных составляющим перемещениям изображения первой.

Лемма эта просто доказывается аналитически. С этой целью отнесем систему к каким-либо осям координат, картину скоростей — к осям, им параллельным и имеющим начало в полюсе картины скоростей *. Координаты точек, положение которых может быть задано независимо, будут $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ Координаты некоторой другой точки системы обозначим x и y. Предположим, что зависимость их от координат n точек выразится соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \\ y &= f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Координаты изображающих точек, при помещении начала координат в полюсе картины скоростей, будут: x', y'; x'_1, x'_2, $x'_3, \ldots, x_n$; y'_1, y'_2, $y'_3, \ldots, y'_n$; штрихом обозначен знак производной по времени.

Зависимости между координатами изображающих точек будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} y'_i\right), \\ y' &= \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_2}{\partial y_i} y'_i\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Следует отметить, что, по предположению, в соотношения (1) входят в правой части все $2n$ координат точек; в общем случае все $2n$ производных от этих координат будут представлены в соотношениях (2). Если бы обратился в нуль коэффициент при производной от одной только координаты некоторой точки, то это означало бы, что перемещение одной этой точки по направлению, параллельному соответствующей оси, не вызывает

* Проще всего совместить первую систему осей со второй.

перемещения точки (x, y) системы. Так, например, вращение поводка около его точки закрепления в звене нормальной цепи не вызовет перемещения остальных точек этой цепи, но любое перемещение конца его по любому иному направлению тотчас же отзовется на положении остальных точек.

Возможно, однако, что при определенном положении системы обратятся в нули оба коэффициента при производных от координат одной и той же точки; это показывает, что перемещение этой точки по любому направлению не вызовет перемещения точки (x, y) системы, хотя в общем случае в силу соотношений (1) положение последней точки зависит и от положения первой точки. Это будет особый случай, зависящий от особого положения системы, потому что координаты точек, положения которых даются независимо, должны удовлетворять некоторым условиям, чтобы обратились в нули коэффициенты при частных производных по обеим координатам одной точки. Разбором особых положений нормальных цепей в настоящей статье мы не занимаемся, почему этот случай и остается без рассмотрения. Что же касается обращения в нуль частной производной по одной только координате данной точки, то это есть только простой частный случай, зависящий от определенного направления координатных осей, но не от положения самой системы. Особым должен считаться случай обращения в бесконечность одной частной производной; на нем тоже останавливаться не будем.

Допустим же, что мы сообщили изображению точки (x_k, y_k) три различных перемещения $(\Delta v)_I$, $(\Delta v)_{II}$, $(\Delta v)_{III}$ и определили сопряженные им перемещения $(\Delta w)_I$, $(\Delta w)_{II}$, $(\Delta w)_{III}$ некоторой точки системы, причем предполагается, что (Δv_{III}) представляет собой геометрическую сумму первых двух перемещений изображения той же точки. Доказать требуется, что перемещение (Δw_{III}) является геометрической суммой перемещений $(\Delta w)_I$ и $(\Delta w)_{II}$; для этого достаточно доказать, что проекция этого перемещения на любую ось является суммой проекций двух других на ту же ось. Проекции перемещений

изображений на оси координат будем обозначать через ξ и η с соответствующими индексами.

После указанных перемещений координаты наших изображающих точек будут:

$$x'_k + \xi^I_k,\ y'_k + \eta^I_k,\ x' + \xi^I,\ y' + \eta^I \text{ — после первого,}$$

$$x'_k + \xi^{II}_k,\ y'_k + \eta^{II}_k,\ x' + \xi^{II},\ y' + \eta^{II} \text{ — после второго,}$$

$$x'_k + \xi^{III}_k,\ y'_k + \eta^{III}_k,\ x' + \xi^{III},\ y' + \eta^{III} \text{ — после третьего.}$$

После первого перемещения соотношение (2) напишется в виде:

$$x' + \xi^I = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i} y'_i\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \xi^I_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \eta^I_k,$$

что в соединении с первым из соотношений (2) дает:

$$\xi^I = \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \xi^I_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \eta^I_k.$$

Вполне аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \xi^{II} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \xi^{II}_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \eta^{II}_k, \\ \xi^{III} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \xi^{III}_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \eta^{III}_k. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Так как перемещение $(\Delta v)_{III}$, по условию, есть геометрическая сумма $(\Delta v)_I$ и $(\Delta v)_{II}$, то для проекции его* на ось

* Значения частных производных во всех трех случаях одно и то же; меняются положения изображающих точек, положение же системы не меняется.

абсцисс имеем:

$$\xi_k^{III} = \xi_k^{II} + \xi_k^{I} .$$

Подставляя это в третье из соотношений (3), замечаем, что

$$\xi^{III} = \xi^{II} + \xi^{I}$$

и по аналогии:

$$\eta^{III} = \eta^{II} + \eta^{I}.$$

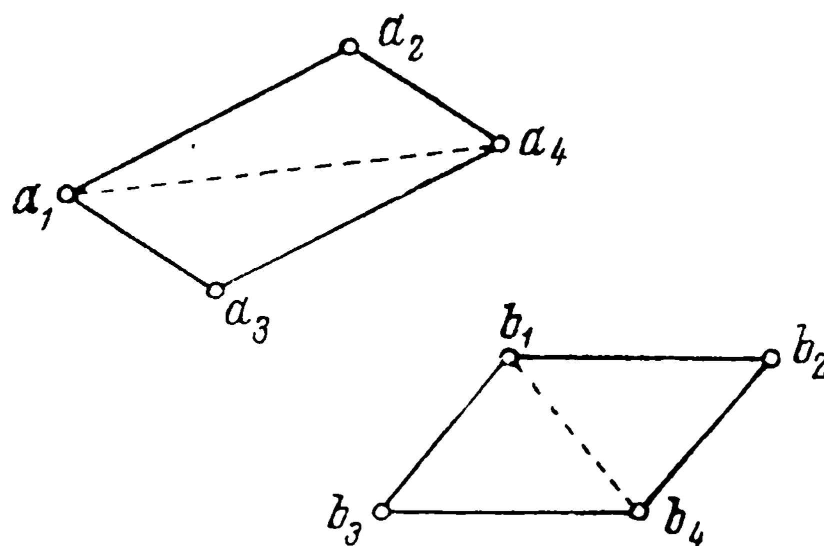
Из совокупности этих двух соотношений, дающих зависимость между проекциями перемещений Δw, заключаем, что $(\Delta w)_{III}$ действительно представляет собой геометрическую сумму $(\Delta w)_I$ и $(\Delta w)_{II}$.

Лемма V. Если система удовлетворяет требованиям предыдущей леммы, если при неподвижности изображений остальных точек, определяющих положение системы, изображения одной из них размещаются в вершинах параллелограма, то сопряженные им изображения любой другой точки системы располагаются тоже в вершинах параллелограма.

Допустим же, что даны три положения изображения точки A некоторой системы, в которой точка A есть одна из тех, положения которой даются независимо. Допустим, что при неподвижности изображений остальных таких точек трем изображениям a_1, a_2, a_3 сопряжены изображения b_1, b_2 и b_3 некоторой точки B системы (фиг. 118). Задаемся изображением a_4 так, чтобы оно поместилось в вершине параллелограма, определяемого тремя первыми изображениями этой точки. Спрашивается, где поместится сопряженное ему изображение b_4?. Отрезки a_1a_2 и a_1a_3 можно рассматривать как перемещения изображения точки A из положения a_1. Тогда перемещение a_1a_4 представляет их геометрическую сумму, и ему должно быть сопряжено перемещение изображения точки B, являющееся геометрической суммой перемещений b_1b_2 и b_1b_3, соответствен-

но сопряженных перемещениям a_1a_2 и a_1a_3. Таким образом, на основании леммы IV мы заключаем, что точка b_4 лежит в четвертой вершине параллелограма, определяемого остальными тремя изображениями точки B.

Л е м м а VI. Если система удовлетворяет условиям леммы IV, если при этом изображение одной из ее точек, положения которой могут задаваться независимо, описывает прямолинейный ряд, между тем как изображения остальных таких точек неподвижны, то подобный ему ряд описывает изображение любой другой точки системы.



Фиг. 118.

Для того, чтобы доказать подобие двух рядов, достаточно рассмотреть положение любых трех пар сопряженных точек. Допустим же, что изображения a_1, a_2 и a_3 расположены на одной прямой, изображения b_1, b_2 — на другой, причем изображения точки A даются независимо, изображения же точки B являются зависимыми. Будет ли лежать изображение b_3 на одной прямой с изображениями b_1 и b_2, мы не знаем. Назовем отрезки a_1a_2, a_1a_3, b_1b_2, b_1b_3 соответственно $(\Delta v)_I$, $(\Delta v)_{II}$, $(\Delta w)_I$ и $(\Delta w)_{II}$, проекции их на координатные оси ξ_k^I, ξ_k^{II}, ξ', ξ^{II}; η_k^I, η_k^{II}, η^I, η^{II}.

Допускаем, что $(\Delta v)_{II} = c \ (\Delta v)_I$; тогда $\xi_k^{II} = c\xi_k^I$ и $\eta_k^{II} = c\,\eta_k^I$. Подставив эти значения в правую часть второго из соотношений (3) и сопоставив его с первым, находим, что $\xi^{II} = c\xi^I$ и, вполне аналогично, окажется $\eta^{II} = c\eta^I$. Так как проекции четырех отрезков на любую из осей пропорциональны, то пропорциональны и сами отрезки, попарно направленные по одной прямой. Лемма может считаться доказанной.

Л е м м а VII. Если система удовлетворяет условиям леммы IV, то перемещение изображения любой ее точки, сопряжен-

ное совокупности перемещений изображений некоторых из точек, положения которых могут задаваться независимо, равно геометрической сумме перемещений, сопряженных порознь перемещениям тех же точек, каждой в отдельности.

Назовем перемещения изображений точек, координаты которых снабжены индексами k, $k+1$, $k+2$, ..., $k+l$ соответственно Δv_k, Δv_{k+1}, Δv_{k+2}, ..., Δv_{k+l}, проекции их на оси координат обозначим буквами ξ и η с теми же индексами; перемещения некоторой точки системы, сопряженные порознь этим перемещениям, обозначим Δw_0, Δw_1, Δw_2, ..., Δw_l, проекции их на оси координат — буквами ξ и η с теми же индексами. Проекции результирующего перемещения Δw на оси будут обозначены буквами ξ и η без всяких индексов.

Исходя из соотношений (2), легко показать, что

$$\xi = \sum_{i=0}^{i=l}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{k+i}}\xi_{k+i}\frac{\partial f_1}{\partial y_{k+i}}\eta_{k+i}\right),$$

$$\xi_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+i}}\xi_{k+i} + \frac{df_1}{\partial y_{k+i}}\eta_{k+i},$$

откуда уже следует:

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_l$$

и по аналогии:

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_l.$$

Переходя от проекций к самим перемещениям, можно считать лемму доказанной.

Лемма VIII. Если система удовлетворяет условиям леммы IV, если при этом изображения нескольких ее точек, положения которых могут задаваться независимо, описывают прямолинейные ряды, между собой подобные, в то время как изображения остальных таких точек — неподвижны, то ряд, подобный им, описывает изображение любой другой точки системы.

Лемма эта есть следствие совокупности лемм VI и VII. Допустим, что точки, изображения которых описывают ряды между собой подобные, будут A, B, C, ..., L.

Перемещение их изображений, предположим, будут a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, ..., l_1l_2. Сопряженные им порознь перемещения некоторой другой точки системы обозначим соответственно s_a, s_b, s_c, ..., s_l. Тогда совокупности их сопряжено некоторое перемещение S той же точки, равное геометрической сумме предыдущих ее перемещений. Вместо указанных перемещений изображений точек A, B, C, ..., L возьмем теперь пропорциональные им, но так же направленные, так что

$$\frac{\overline{a_1 a_3}}{\overline{a_1 a_2}} = \frac{\overline{b_1 b_3}}{\overline{b_1 b_2}} = \frac{\overline{c_1 c_3}}{\overline{c_1 c_2}} = \cdots = \frac{\overline{l_1 l_3}}{\overline{l_1 l_2}} .$$

Совокупность из трех изображений каждой точки, в таком случае, представляет ряд, подобный совокупности трех изображений другой. В силу леммы VI все составляющие s_a, s_b, s_c, ..., s_l геометрической суммы S, характеризующей перемещение изображения некоторой точки, изменяется в одном и том же отношении при вторых перемещениях, сохранив свое направление. Поэтому последняя тоже сохранит свое направление, изменившись в том же отношении, и три изображения любой точки системы образуют прямолинейный ряд, подобный рядам из трех изображений каждой из точек A, B, C, ..., L.

Л е м м а IX. Если система удовлетворяет требованиям леммы IV, если при этом изображения нескольких точек, положения которых могут задаваться независимо, размещаются в сходственных вершинах параллелограмов, в то время как изображения остальных таких точек системы неподвижны, то четыре сопряженных изображения любой точки системы тоже размещаются в вершинах параллелограма.

Лемма эта вытекает из совокупности лемм V и VII. Допускаем, что независимо могут быть заданы положения точек A.

B, C, ..., L. Допустим, что изображения их будут сначала a_1, l_1, c_1, ..., l_1; затем этим изображениям сообщены перемещения:

$$\overline{a_1a_2},\ \overline{b_1b_2},\ \overline{c_1c_2},\ \ldots,\ \overline{l_1l_2},$$

каждое из которых порознь вызвало перемещение изображения m_1 некоторой точки M системы. Сопряженные этим перемещения последнего изображения назовем соответственно α_{12}, β_{12}, $\gamma_{12}, \ldots$, λ_{12}.

Тогда в силу леммы VII совокупность всех независимых перемещений вызовет перемещение изображения точки M, равное геометрической сумме указанных ее перемещений, так что:

$$\overline{m_1m_2} = \overline{\alpha}_{12} + \overline{\beta}_{12} + \overline{\gamma}_{12} + \cdots + \overline{\lambda}_{12}.$$

Сообщим теперь изображениям тех же точек другие перемещения $\overline{a_1a_3}$, $\overline{b_1b_3}$, $\overline{c_1c_3}, \ldots, \overline{l_1l_3}$, каждое из которых порознь вызовет перемещения изображения точки M, соответственно равные $\overline{\alpha}_{13}$, $\overline{\beta}_{13}$, $\overline{\gamma}_{13}, \ldots, \overline{\lambda}_{13}$. В результате влияния совокупности этих независимых перемещений перемещение изображения точки M окажется:

$$\overline{m_1m_3} = \overline{\alpha}_{13} + \overline{\beta}_{13} + \overline{\gamma}_{13} + \cdots + \overline{\lambda}_{13}.$$

Теперь сообщаем изображениям точек $A, B, C, \ldots, L$ перемещения, равные геометрической сумме предыдущих перемещений, так что:

$$\overline{a_1a_4} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_1a_3};\quad \overline{b_1b_4} = \overline{b_1b_2} + \overline{b_1b_3}\ \text{и т. д.}$$

Применяя лемму V, найдем, что каждое из этих новых перемещений вызовет порознь перемещения изображения точки M:

$$\overline{\alpha}_{14} = \overline{\alpha}_{12} + \overline{\alpha}_{13};\ \overline{\beta}_{14} = \overline{\beta}_{12} + \overline{\beta}_{13};\ \overline{\gamma}_{14} = \overline{\gamma}_{12} + \overline{\gamma}_{13};\ \cdots \overline{\lambda}_{14} = \overline{\lambda}_{12} + \overline{\lambda}_{13}.$$

Отсюда с очевидностью следует, что

$$\overline{m_1m_4} = \overline{\alpha}_{14} + \overline{\beta}_{14} + \overline{\gamma}_{14} + \cdots + \overline{\lambda}_{14} = \overline{m_1m_2} + \overline{m_1m_3}.$$

Если так, то подобно тому, как четвертые изображения точек A, B, C, ..., L лежат в вершинах параллелограмов, определяемых первыми тремя их изображениями, так и сопряженное этим четвертым изображениям изображение m_4 образует вершину параллелограма, построенного на точках m_1, m_2 и m_3.

Все выводы указанных лемм будем применять к случаю нормальных многоповодковых цепей, потому что определенные точки этих цепей, именно свободные концы поводков и шарнирно укрепляемые точки обладают свойством, что положение их, в общем случае, определяет положение остальных точек цепи. Но не только к случаю нормальных цепей будем применять указанные свойства; мы можем применять их и к любому образованию, распадающемуся на нормальные цепи; такие образования состоят из нормальной цепи, к которой пристегнут целый ряд нормальных цепей, так что часть их поводков остается свободной, и образование образует жесткое, статически определимое соединение с неизменяемой основой, если все свободные концы его поводков, в частности шарнирно закрепляемые точки, пристегнуть к последней.

Обращаемся теперь к образованию фиг. 116. Покажем, что к нему можно применить выводы положений I и II. Когда мы строили ложную картину скоростей. мы намечали положения изображений точек A и B, причем шарнир H между звеньями L и M мыслился разъединенным. Тогда ложная картина скоростей есть некоторая возможная для образования, в котором точки A и B являются шарнирно закрепляемыми. Звенья A и B образуют в таком случае двухповодковую группу; к ней примыкает ряд двухповодковых групп, образующих остальную часть цепи *1*, потом нормальная цепь, состоящая из звеньев *I* и *II*, играющих в ней роль поводков и всей цепи *2*, дальше состоящая из ряда двухповодковых групп цепь *3* и такая же цепь *4* и т. д., как мы видели при построении ложной картины скоростей.

Итак, все заключения лемм применимы к такой системе. Хотя мы имеем только по два изображения точек A и B, именно

a_1, a_2 и b_1, b_2, но при построении ложных картин скоростей мы их комбинируем таким образом, что два изображения заменяют собой четыре вершины параллелограма. Ведь мы, оставляя изображение a_1 на месте, строим ложную картину скоростей для двух положений изображения точки B, и то же делаем, оставляя на месте изображение a_2, и, наоборот, комбинируем два различных положения изображения точки A с одними и теми же положениями изображения точки B.

В каждом из параллелограмов длина пары сторон обратилась в нуль; но таким сторонам одного из параллелограмов сопряжены стороны конечной длины другого. Поэтому четырем возможным комбинациям из двух пар изображений соответствует расположение изображения каждой из двух точек H в вершинах параллелограма согласно лемме IX, т. е. к этой системе применимо положение II. Согласно же лемме VI к системе применимо положение I. Но тогда применимо и положение III и метод прямой $\mathfrak{H}$.

Мы говорили уже о случае, когда цепь *1* состоит из одного звена A; тогда приходится намечать произвольно изображения двух точек этого звена, именно прежней точки A и шарнира, соединяющего это звено со звеном I. В этом случае непосредственно ко всей совокупности системы фиг. 116 заключения лемм приложены быть не могут. Ведь положение второй точки, как находящейся на постоянном расстоянии от A, не может быть задано произвольно. Назовем эту точку P, шарнирную же точку, соединяющую звенья A и II, назовем Q. Рассмотрим сначала изображения вершин треугольника APQ. Четыре изображения точки A дают только две раздельных точки, располагаясь в вершинах параллелограма, длина двух сторон которого равна нулю. Эти два изображения определяют две прямые, на которых располагаются изображения точки P, их намечаем так, что они образуют параллелограм с четырьмя раздельными вершинами; в силу леммы II тогда сопряженные им изображения точки Q тоже расположатся в вершинах параллелограма.

Теперь, выбросив звено A, рассмотрим оставшуюся систему

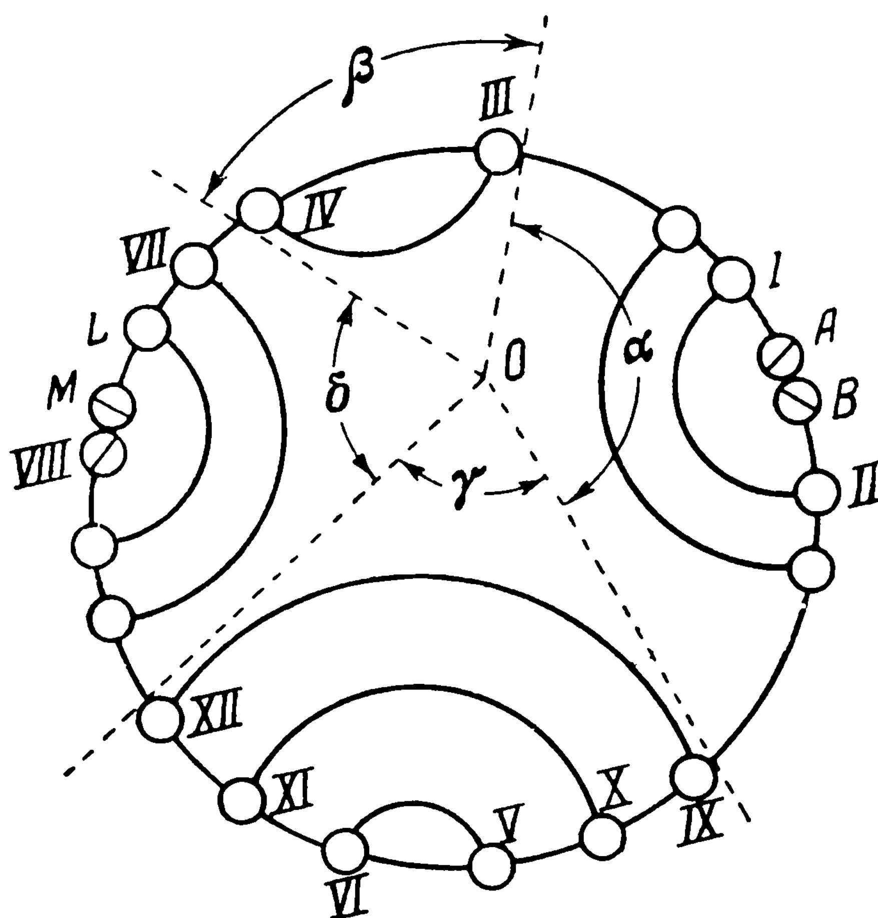
в которой, кроме концов поводков, произвольно могут быть заданы изображения точек *P* и *Q*, причем изображения их будут задаваться совмещающимися с указанными в предыдущем. При этом точки *P* и *Q* принадлежат звеньям *I* и *II*, кторые становятся, таким образом, шарнирно-закрепляемыми, в соединении оставшегося образования с основой. Если так, то звенья *I* и *II* можно считать поводками звеньев *C* и *D* и тогда совместно с ними цепь *2* обратится в нормальную первого класса. Дальше к ней примыкают цепи *3* и *4*, трактуемые, как и раньше, как ряд двухповодковых групп, нормальная цепь из совокупности звеньев *III* и *IV* и цепи *5* и т. д., как в предыдущем случае.

Положение *II* окажется, таким образом, применимо в силу леммы IX, в которой надо говорить об изображениях двух точек *P* и *Q*. Равным образом, говоря об изображениях этих точек, рассматривая отдельно сначала треугольник *APQ*, потом остаток по отделении звена *A*, в силу леммы VIII придем к приложимости заключений положения I. Если так, то все условия для возможности применения метода прямой $\mathfrak{H}$ вы полнены.

После того как прямая $\mathfrak{H}$ найдена, окончание построения совершается просто. Задавшись ложным положением изображения точки *H* на этой прямой, построим (следствие V) скорости всех точек цепей *12* и *13*, потом нормальной цепи из совокупности звеньев *VII* и *VIII* и цепи *11*, дальше рядов двухповодковых групп, образующих цепи *9* и *10* и т. д., пока не дойдем до изображения точки *T*, в которой шарнирно соединены звенья *A* и *B*. Для этой точки получится два различных изображения, так как мы подойдем к ней с двух сторон независимо: со стороны звена *I* и со стороны звена *II*. То обстоятельство, что эти два изображения не совместятся, показывает, что изображение точки *H* на прямой $\mathfrak{H}$ намечено ложно.

Если перемещать изображение точки *H* по этой прямой, то оба изображения точки *T* будут перемещаться по двум прямым, точка пересечения которых определяет истинное положение изображения точки *T*. Им будем пользоваться для определения

истинных скоростей остальных точек цепи, как раньше пользовались ложным изображением точки H. Что изображения точки T будут перемещаться по двум прямым, следует из леммы VI, причем в образовании с разъединенным шарниром H, кроме концов поводков, задаются независимо положения точки H. Что по положениям указанных точек определятся положения остальных, следует из того, что по изображениям их определяются изображения остальных, но легко это усмотреть и независимо от этого.



Фиг. 119.

Однако тип цепи с параллельным замыканием, изображенным на фиг. 116, не есть единственный; это есть частный тип, характеризуемый тем, что в нем имеется *только две пары бесповодковых звеньев, между которыми проходит по паре цепей одноповодковых звеньев*. В нашем случае такие пары бесповодковых будут пара *I*, *II*, соединяемая цепями *1* и *2*, и пара *VII*, *VIII*, соединяемая цепями *11* и совокупностью цепями *12* и *13*. Но можно себе представить цепи тоже с параллельными диагональными цепями, согласно данному в первой части нашего труда определению параллельности, в которых таких пар звеньев будет сколько угодно. На фиг. 119 показана цепь, в которой имеется четыре пары таких звеньев: *I*, *II*; *III*, *IV*; *V*, *VI*; *VII*, *VIII*; все диагональные цепи должны считаться между собой параллельными, так как при замене их хордами окружности, последние между собой не пересекаются, а также не окажется хорд, пересекающих некоторые из них и не пересекающих других.

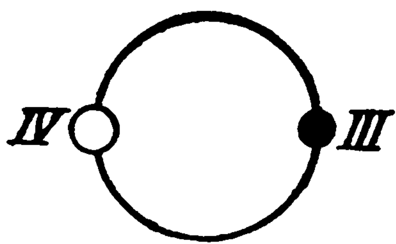
Разобьем нашу цепь на четыре части, расположенные в четырех частях плоскости, на которые последняя разбилась проведением прямых из точки O, образующих углы α, β, γ, δ. Тогда сравнительно легко будет доказать, что, задавшись здесь, как и в случае цепи (см. фиг. 116), изображением точек A и B, одноименных с последними звеньями, на соответствующих прямых мы сумеем построить ложную картину скоростей, соответствующую разъединению в шарнире между звеньями L и M. Все построение будет исполняться так же, как и для всех звеньев цепи (см. фиг. 116), лежащих в пределах угла α, и, таким образом, окажутся приведенными в известность скорости тех точек звеньев III и IX, которыми они примыкают шарнирно к части α цепи. Если вся данная цепь присоединена к звеньям механизма, скорости точек которого уже приведены в известность, то ложные изображения точек части α, согласно сказанному, могут быть построены. Но легко убедиться, что части β и γ представляют собой нормальные цепи, одним звеном присоединенные шарнирно к части α, поводками же — к звеньям того механизма, к звеньям или устою которого мы представляем себе пристегнутой всю цепь и, в частности, часть α.

Исследуем, относятся ли части β и γ к нормальным цепям известных нам типов.

Что касается части β, то она относится к типу, изображенному в наших условных обозначениях на фиг. 120, где черный кружок есть условное обозначение звена, шарнирно закрепленного, которое нередко становится на место двухповодкового. Итак, часть β представляет собой нормальную цепь третьего класса с простыми поводками, с одним бесповодковым и одним двухповодковым (шарнирно закрепленным) звеном. Так как скорости концов поводков предполагаются известными, скорость шарнирной точки прикрепления звена III тоже известна, то скорости точек части β мы сумеем построить, применяя прием, указанный на фиг. 109.

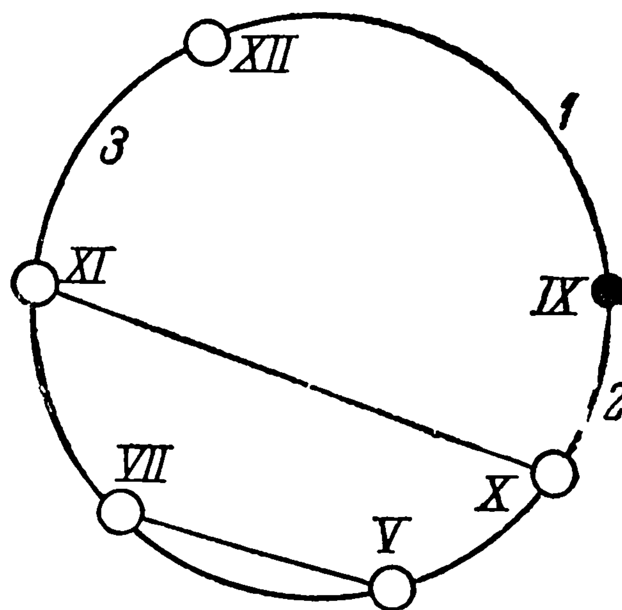
Сложнее будет дело обстоять с частью γ. Схема ее дана на фиг. 121. Мы имели бы перед собой цепь типа фиг. 116, если бы

звенья *XII* и *IX* были оба одноповодковые; вместо этого поводок со звена *XII* перенесен на звено *IX*, где образовалось звено, шарнирно закрепленное, представляющее частный случай двухповодкового. Типы цепей четвертого класса, получаемые переносом поводков, нами в первой части были только намечены, но не изучены. Во всяком случае, перед нами простой случай переноса только одного поводка, и нам необходимо рассмотреть, как построить скорости точек цепи типа фиг. 121 по данным скоростям концов ее поводков и шарнирно закрепленной точки. Остановимся, однако, раньше на точных структурных признаках типа цепи фиг. 121, независимо от того, сколько в ней будет бесповодковых, в связи со структурными признаками группы γ данной цепи, чтобы наши указания можно было распространить и на другие случаи.



Фиг. 120.

Представим себе на фиг. 119 выкинутыми все диагональные цепи, за исключением примыкающих к звеньям *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII*, *VIII*; все остальные бесповодковые при этом представим себе замененными одноповодковыми. Тогда у нас образуется несколько групп звеньев, состоящих каждая из двух бесповодковых с двумя соединяющими их цепями одноповодковых звеньев. Кроме того, каждая такая группа звеньев соединяется с соседней цепью одноповодковых звеньев, так что к каждой такой замкнутой в самой себе группе примыкает с каждой стороны по цепи одноповодковых звеньев. Таких замкнутых в себе групп, каждая с двумя бесповодковыми, у нас четыре, вообще же может быть любое количество.



Фиг. 121.

Для простоты речи условимся такую группу, строение которой достаточно уяснено, называть простым коль-

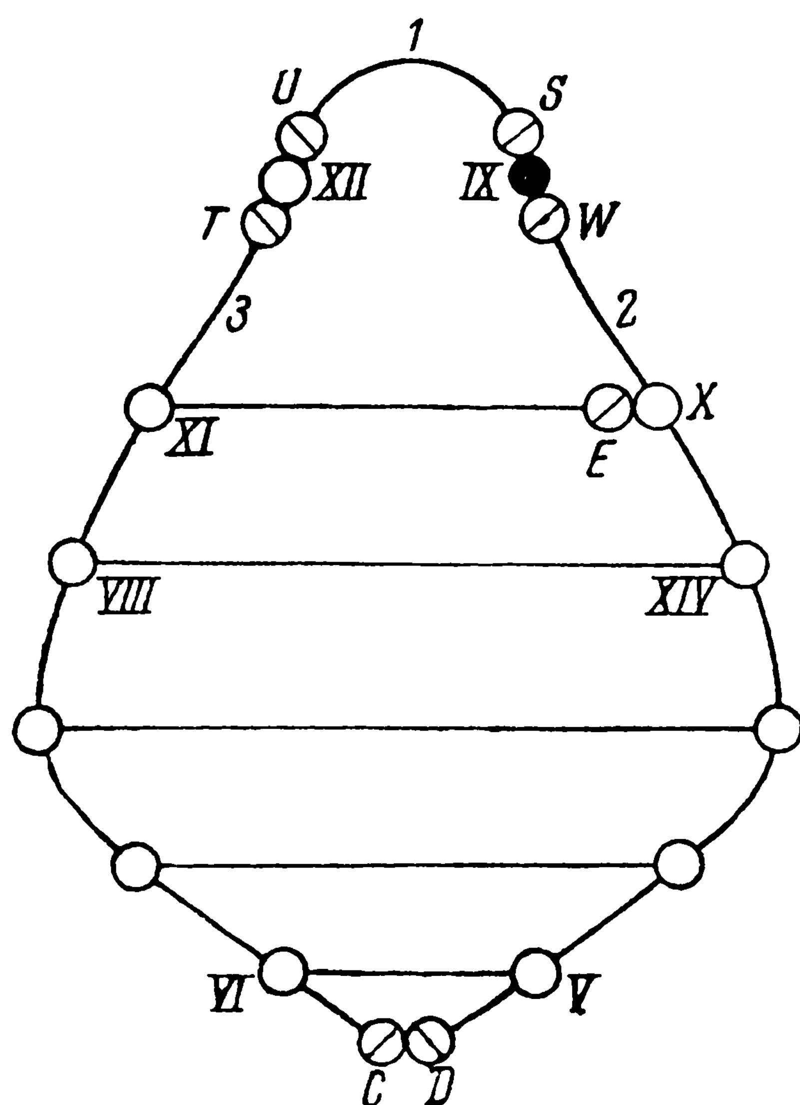
цом, цепи одноповодковых, соединяющих два таких кольца, — междукольцевыми отрезками. В цепи, которая изображена на фиг. 119, дальнейшие диагональные цепи, которые мы представили себе временно устраненными, вводятся не произвольно, при соблюдении только параллельности, но определенным образом, именно так, чтобы ими связывались два звена междукольцевых отрезков, примыкающих к одному и тому же кольцу. Такую группу звеньев, как группа γ, можно условиться называть сложным кольцом; тогда правило введения остальных диагоналей, независимо от количества их, будет формулироваться все теми же словами.

Указанный способ не является единственным возможным; можно, не нарушая параллельности диагоналей, ввести еще новые диагонали, соединяющие один из междукольцевых отрезков с различными другими. Но пока переходим к рассмотрению цепи фиг. 121, образованой из сложного кольца γ тем, что звено IX считается шарнирно присоединяемым.

Ранее было определено образование сложного кольца из простого; если сюда присоединить еще преобразование сложного кольца (см. фиг. 119) в нормальную цепь (см. фиг. 121), то очевидно будет, что среди диагональных цепей последней не окажется перекрестных и что диагонали этой цепи принадлежат одному сложному кольцу, в основе которого лежит простое кольцо из тех же звеньев, как и в группе γ. Таким образом, как бы сложно ни было кольцо γ, нормальная цепь фиг. 121 будет состоять из бесповодкового звена, двухповодкового звена с промежуточной между ними цепью одноповодковых *1* и сложного кольца, присоединяемого к каждому из указанных звеньев цепями одноповодковых *2* и *3*.

Следует еще отметить, что цепь типа фиг. 116, который может быть охарактеризован как тип цепи с параллельными диагоналями, содержащей только два кольца, отличается от образования, названного нами сложным кольцом, тем, что в нем нехватает двух бесповодковых. Если отбросим по одному

поводку в одном звене каждой из цепей *12* и *13*, то получится именно сложное кольцо; эти недостающие бесповодковые в кольце окажутся смежными, т. е. разделенными только цепью одноповодковых. Превращение двухкольцевой цепи типа фиг. 116 в сложное кольцо может быть достигнуто также уничтожением одной из цепей одноповодковых звеньев, входящих в состав простого кольца, например, одной из таких цепей, соединяющих звенья *VII* и *VIII* (см. фиг. 116). Обратно: сложное кольцо превратится в двухкольцевую цепь с параллельным замыканием, если ввести в него лишнюю цепь одноповодковых, соединяющую два бесповодковых, к которым примыкают только по две таких цепи, каковы, например, звенья *IX* и *XII* кольца γ (см. фиг. 119).



Фиг. 122.

Та же цель будет достигнута, если эти же два звена снабдить каждое поводком.

Построение скоростей точек цепи фиг. 121 оказалось наиболее удобным вести, начав с двух звеньев простого кольца, в состав которого входят у нас звенья *VI* и *V*. Чтобы сделать рассуждения общими, на фиг. 122 изображено образование, которое заменит цепь фиг 121 при большей сложности кольца γ, причем выделены характерные одноповодковые; цепь эта образована из кольца более сложного, чем кольцо γ, и потому, кроме диагоналей *X* — *XI* и *V* — *VI*, имеются промежуточные. Построение начнем, задаваясь сначала произвольно изображениями точек *C* и *D*, одноименных с последними звеньев простого кольца на соответствующих им прямых. Если не имеется

двух таких звеньев, а только одно, то задаемся изображениями двух точек одного звена, как и в предшествующих случаях, причем выбор первого изображения определяет прямую, на которой лежит второе.

После этого совершенно в такой же последовательности, как для цепи с парой колец (см. фиг. 116), удастся построить скорости точек звеньев вплоть до принадлежащих цепям одноповодковых *2* и *3* включительно, в частности и для звеньев T и W. Поэтому окажутся известными скорости точек, которыми звенья IX и XII шарнирно примыкают к звеньям T и W. Однако шарнир между IX и W необходимо представить себе разъединенным, потому что скорость одной точки звена IX, именно шарнирно закрепленной, уже дана с самого начала, поэтому для каждой точки этого звена известно по прямой, на которой должно лежать ее изображение.

Благодаря произвольному выбору изображений точек C и D изображение точки H, как мы назовем шарнирную точку между звеньями IX и W, вообще говоря, на эту прямую не ляжет. Поэтому, относя изображение h к точке звена W, для той же точки звена IX будем искать изображение $\mathfrak{x}$. Мы определили скорость одной точки звена XII, именно той, которой оно шарнирно связано со звеном T. Если это так, то звено T можно рассматривать как поводок звена U цепи *1*. Так как последнее звено снабжено, кроме того, еще одним настоящим поводком, то можно звено U рассматривать как двухповодковое; равным образом можно звено IX рассматривать как второй поводок звена S. Тогда цепь *1* вместе со звеньями XII и IX оказывается цепью первого класса, скорости концов поводков которой известны, и потому определяются скорости всех ее точек, в том числе и изображение $\mathfrak{x}$ точки H. Несовпадение изображений точек h и $\mathfrak{x}$ обнаружит ложность нашего построения, основанного на произвольном выборе изображений точек C и D. Истинные их изображения найдутся тем же приемом, как и в случае других замкнутых цепей, т. е. методом прямой $\mathfrak{S}$.

Применимость к цепи фиг. 122 метода прямой $\mathfrak{S}$ легко

докажется, если заметим, что подобно тому, как изображения точек C и D концов поводков и шарнирно закрепляемой точки звена IX определяют изображения остальных точек образования, в котором звенья C и D шарнирно закрепляемые, а шарнир между IX и W мыслится разъединенным, так и положение перечисленных точек того же образования определяет положение остальных. Все это образование разобьется на совокупность нормальных цепей, и заключения лемм, равным образом, как и положения I, II, III, окажутся к нему применимыми. Если бы между звеньями V и VI помещалось бы только одно одноповодковое, то рассуждения слегка изменились бы, по аналогии с таким же случаем в цепи фиг. 116.

Нетрудно изложить и соображения, с помощью которых будут найдены скорости остальных точек, когда прямая $\mathfrak{H}$ нанесена на чертеж. Присутствие шарнирно закрепляемого звена IX, обладающего как бы двумя поводками, облегчит нашу задачу в том отношении, что не придется задаваться ложным положением изображения точки H. Изображение шарнирно закрепляемой точки определяет уже одну прямую, на которой должно лежать изображение точки H, второй такой прямой будет прямая $\mathfrak{H}$. В пересечении их лежит истинное изображение точки H. Скорости точек звена IX окажутся, таким образом, определенными.

Согласно следствию V (стр. 304), определятся скорости точек цепей одноповодковых *1* и *2*. Рассматривая затем звено XII, как поводок звена T, скажем, что, совместно с цепью одноповодковых *3*, это звено образует концевую цепь, поэтому определится прямая, на которой должно лежать изображение той точки звена XI, к которой эта цепь примыкает.

Дальнейшее построение будет вестись так, как будто в оставшемся образовании звено XI было одноповодковым, ибо поводок также определил бы прямую, на которой должно лежать изображение одной точки этого звена, как и концевая цепь; кроме того, звено X должно считаться шарнирно закрепленным, так как скорость одной его точки известна. Если это

так, то для двух точек звена E, именно шарнирной точки, прикрепляющей его к звену X, и точки прикрепления его поводка известно по прямой; для остальных звеньев простой цепи, начинающейся звеном E, примыкающей к звену $XIII$ и заключающей в себе звено XI, известно по одной прямой; поэтому (см. на стр. 263 следствие III) определится прямая для изображения одной точки звена $XIII$. Точно так же определится прямая для изображения одной точки звена XIV; именно той, в которой примыкает к нему простая цепь, ведущая от звена X.

Для построения скоростей точек оставшегося образования, однако, требуется вторичное применение метода прямой $\mathfrak{H}$. Так как для изображения одной точки каждого из звеньев $XIII$ и XIV известно по прямой, то данные для построения такие же, как будто эти два звена были одноповодковые. Если мы отделим эту часть всего образования и представим себе звенья $XIII$ и XIV одноповодковыми, то остаток будет не что иное, как двухкольцевая цепь с параллельным замыканием (тип фиг. 116). Скорости точек ее могут быть построены, но с помощью применения метода прямой $\mathfrak{H}$. Таким образом, применение этого метода повторяется два раза для цепи типа фиг. 122.

Но, в свою очередь, скорости точек этой цепи требуется определить, чтобы выполнить построение ложной картины скоростей, необходимой для определения прямой $\mathfrak{H}$ при построении скоростей всей цепи фиг. 119. Таких ложных картин скоростей для нахождения прямой $\mathfrak{H}$ необходимо построить, по меньшей мере, три, а для каждой из них дважды применить метод прямой $\mathfrak{H}$ для сложного кольца. Все это обнаруживает, что чисто графический прием построения скоростей в случае механизмов четвертого класса до крайности сложен. Ниже будет приведен, однако, способ, несколько упрощающий построение картин скоростей в тех случаях, где мы до сих пор применяли метод прямой $\mathfrak{H}$, позволяющий, по крайней мере теоретически, после трех ложных построений, между собой независимых, вместо прямой $\mathfrak{H}$ найти истинное изображение точки H. После этого остается только построить четвертое, истин-

ное изображение точек системы. С другой стороны, необходимо посмотреть, нельзя ли громоздящиеся затруднения обойти применением смешанных графо-аналитических приемов.

Предполагалось и эти приемы изложить в настоящей главе, но, ввиду большого объема ее, мы отложим изложение их до другой главы, где будут изложены чисто графические приемы нахождения ускорений точек механизма и где одновременно графо-аналитические приемы будут трактоваться в применении как для определения скоростей, так и ускорений точек плоских механизмов. Здесь же мы продолжим наши исследования все в том же направлении, чем и подготовим материал для этой новой главы.

Итак, возвращаясь к цепи фиг. 119, мы по заданным изображениям точек A и B сумеем найти изображения (ложные) не только части α этой цепи, но и частей β и γ. Остается еще построить изображения точек части δ, состоящей тоже из сложного кольца, примыкающего к совокупности предыдущих частей двумя цепями одноповодковых звеньев. Решение этой задачи уже предусмотрено в двухкольцевой цепи, где после нахождения скоростей точек простого кольца (звенья *I* и *II* с цепями *1* и *2*) определяются скорости точек примыкающего к нему посредством цепей *3* и *4* сложного, в котором шарнир между звеньями L и M мыслится разъединенным.

Из того обстоятельства, что по данным изображениям точек A и B определяются изображения остальных точек, можно заключить, что, задав положения точек A и B и концов поводков образования, в котором поводки звеньев A и B отброшены, а шарнир H между звеньями L и M мыслится разъединенным, определим положения всех остальных точек. Нетрудно и помимо того убедиться, что такое образование распадается на ряд нормальных цепей. В таком случае в нему применимы выводы всех наших общих лемм и положения I и II, из которых следует, что метода прямой $\mathfrak{H}$ здесь вполне уместна.

Определив прямую $\mathfrak{H}$, задаемся на ней ложным изображением точки H, после чего определятся ложные изображения

точек L и M. Построение продолжится так же, как в случае, когда были известны изображения точек A и B и соединяющего их между собой шарнира Q; разница ведь лишь в том, что построение начинается с другого кольца. Ложность выбора изображения точки H скажется в том, что два изображения точки Q, которые получатся, если подойти к ней с двух сторон независимо, именно от звена I и со стороны звена II, не совпадут. Перемещая точку H по прямой $\mathfrak{H}$, в силу леммы VI, найдем, что каждое из изображений точки Q описывает прямую. В пересечении этих прямых лежит истинное изображение точки Q. Им будем пользоваться для нахождения истинных скоростей точек цепи, как раньше пользовались ложным положением точки H. Заметим, что после того, как прямая $\mathfrak{H}$ для цепи фиг. 119 найдена, нам метод прямой $\mathfrak{H}$ придется применить еще четыре раза, дважды при каждом переходе через сложное кольцо γ.

Нетрудно использовать изложенные здесь соображения для того, чтобы от четырехкольцевой цепи перейти к цепи с каким угодно количеством сложных колец, в которой между собой связаны только соседние кольца, и притом цепью одноповодковых.

Мы убедились, насколько сложно оказалось выполнение построения для сравнительного простого случая цепи фиг. 110; можно себе представить, как сложно было бы трактовать с помощью чертежа, осуществляющего построение скоростей, эту задачу для цепи многокольцевой. Мы могли себе уяснить все необходимые операции, не выполняя их. В этом и состоит одно из больших преимуществ нового начала, вводимого нашей работой в теорию стержневых механизмов. Мы получили возможность трактовать вопросы общей теории механизмов в весьма общем виде. Мы имеем ряд общих положений, ряд общих приемов, позволяющих вести общие рассуждения, не прибегая к выполнению построений в каждом отдельном случае.

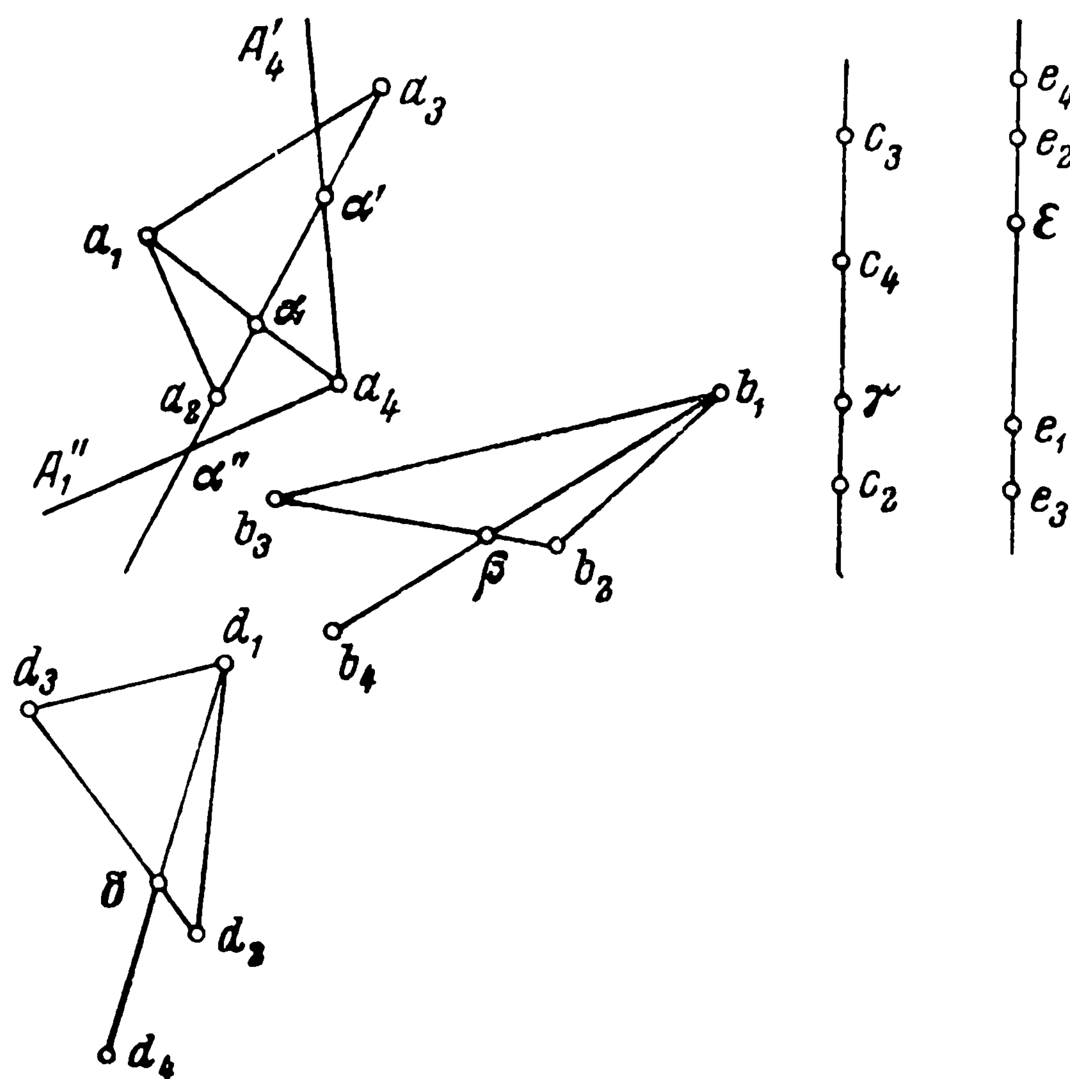
Правда, что мы в своих рассуждениях должны итти от более простого к более сложному, что мы должны поэтому индивидуализировать наши рассуждения в зависимости от класса и типа цепей, из которых составлен механизм, — это как бы ступени лестницы, по которой мы взбираемся. Ведь ясно, что построение скоростей для цепи многокольцевой объемлет в себе и построение их для цепи двухкольцевой и для цепи третьего класса; но чтобы притти к последней ступени, необходимо пройти первые две. Важно, однако, то, что эта лестница существует, что ступени ее известны, что систематический путь открыт, приемы, с помощью которых можно двигаться по этому пути, в основной своей части намечены. Как и всякая другая цепь научных истин, и эта лестница уходит в бесконечность, но важно знать, где она находится, важно пройти хоть ближайшие к нам первые ступени ее. Каждая новая глава покажет нам, что на этом пути легко переходить от простейшего к более сложному, что путь этот в трактуемой области — кратчайший.

Теперь переходим к уяснению упомянутого выше приема определения скоростей точек сложных нормальных цепей, который может быть с успехом применен вместо метода прямой $\mathfrak{H}$ и который может быть назван методом полюса аффинности. Для этого докажем еще одну общую лемму.

Лемма X. Если в какой бы то ни было системе точек положение любой точки системы определяется независимо данными положениями n точек, если притом изображения части этих последних, состоящей из l точек ($l \leqq n$), в картине скоростей, при неподвижности изображений остальных, помещаются в сопряженных (гомологичных) точках l аффинных между собой систем, то сопряженные им изображения любой точки системы образуют систему, аффинную l предыдущим.

Лемма эта справедлива и при l, равном единице, нужно только помнить, что группа изображений одной из n точек может быть задана совершенно произвольно. Что же касается любой из остальных групп, если только соответствующие изображения

не остаются неподвижными, то после того, как заданы положения точек первой группы, можно задать произвольно положения только трех точек каждой группы, так как система, аффинная данной, определяется, если известны три точки ее, сопряженные трем определенным точкам данной.



Фиг. 123.

Итак, допускаем, что изображения точки A (фиг. 123) задаются вполне независимо с точки зрения условий доказываемой леммы. Что касается изображений точек B и C, в общем же случае остальных $(l-1)$-й точки, которые должны быть заданы, чтобы определились изображения остальных точек системы, то независимо можно дать только три изображения каждой из них, сопрягая их соответственно с определенными тремя изображениями точки A. Сопряженные изображения отмечены одними и теми же индексами, так что точкам a_1, a_2, a_3 соответственно сопряжены точки b_1, b_2, b_3 и точки c_1, c_2, c_3. Нахождение изображений, сопряженных любому четвертому

изображению точки A, например a_4, известно, из теории аффинных систем*. Соединяем точку a_4 с одной из вершин треугольника, образованного тремя остальными изображениями точки A, и отмечаем точку α, в которой эта прямая пересекает противолежащую этой вершине сторону треугольника. Прямолинейному ряду точек в одной из аффинных систем соответствует подобный ему ряд в другой. Поэтому сопряженные с точкой α точки β и γ определятся, если разделить отрезки b_2b_3 и c_2c_3 в том же отношении, в котором точка α делит отрезок a_2a_3. Точка b_4 лежит на прямой $b_1\beta$, точка c_4 — на прямой $c_1\gamma$, причем ряды точек $a_1\alpha a_4$, $b_1\beta b_4$, $c_1\gamma c_4$ должны быть подобны.

На нашем чертеже точки c_1, c_2, c_3 расположены на одной прямой. Очевидно, что тогда вся система изображений точки C, аффинная системе изображений точки A, всеми своими точками расположится на этой прямой. Это не мешает находить сопряженные точки системы изображений точки C по данным изображениям точки A, но обратная задача была бы неопределенной.

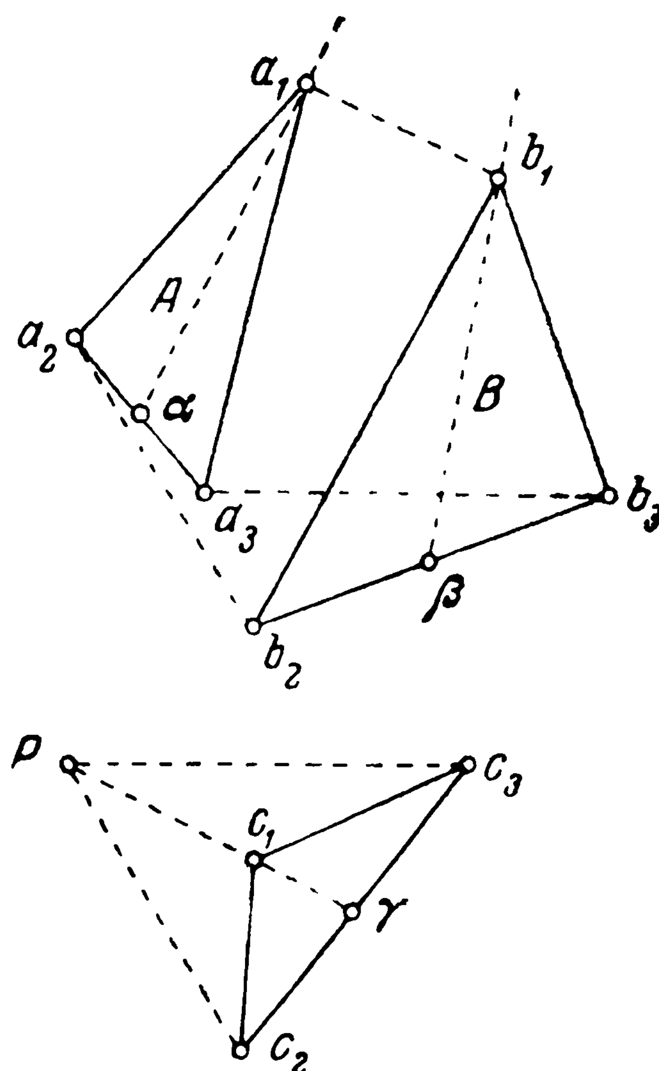
В самом деле, отметив точку α', делящую отрезок a_2a_3 в таком же отношении, как точка c_4 делит отрезок c_2c_3, найдем, что точка c_4, кроме точки a_4, сопряжена точке α', но в таком случае она сопряжена любой точке прямой $a_4\alpha'$. Таким образом, если система, аффинная данной плоской, образуется точками одной только прямой, то каждая точка последней соответствует точкам некоторой прямой в первой.

Теперь, пользуясь леммами VI или VIII и допуская, что изображения d_1, d_2, d_3 некоторой точки D системы соответстственно сопряжены трем раньше указанным изображениям каждой из точек A, B, C, задаваемым независимо, будем искать изображение точки D, сопряженное совокупности изображений a_4, b_4, c_4. С этой целью определяем сначала изображение δ, сопряженное изображению α (вместе с тем, конечно, изображе-

---

* Burmester. Lehrbuch der Kinematik, B. I, изд. 1888 г., § 342, Fig. 842.

ниям β и γ). В силу указанных лем, точка δ должна разделить отрезок d_2d_3 в том отношении, в каком изображение α делит отрезок a_2a_3; кроме того, точка d_4 должна будет лежать на прямой d_1 δ, и группа точек d_1 δ d_4 должна быть подобной группе точек a_1 α a_4. Раз так, то по трем точкам d_1, d_2, d_3 каждая новая строится как точка системы аффинной системе изображений точки A, а следовательно, и остальных точек, изображения которых могут задаваться независимо, например, точек B и C. Лемма доказана.



Фиг. 124.

Для построения скоростей точек по методу полюса аффинности требуется, кроме того, умение определить полюс аффинности двух аффинных систем. Наиболее общий прием построения этого полюса состоит в следующем. Допускаем, что системы A и B (фиг. 124) находятся в аффинном соответствии, что это соответствие задано тремя парами сопряженных точек, именно точками a_1, a_2, a_3 системы A и точками b_1, b_2, b_3 системы B, причем сопряженными считаются точки с тождественными индексами. Будем рассматривать обе системы, находящиеся в аффинном соответствии, как две фазы некоторой аффинноизменяемой системы, причем можно отрезки a_1b_1, a_2b_2 и a_3b_3 рассматривать, как векторы конечных перемещений трех точек этой изменяемой системы. Отложим эти векторы от некоторой точки P, и концы их отметим соответственно c_1, c_2, c_3. То же самое мы можем сделать с перемещениями любой другой точки аффинноизменяемой системы. Оказывается, что система C, образованная концами отложенных от точки P векторов, аффинна каждой из фаз A и B, а полюс аффинности Q определяется

построением в одной из системы A или B точки, сопряженной точке P системы C *.

Доказывается это положение, по нашему мнению, проще всего аналитически. Вообразим себе в точке P помещенным начало декартовых координат. Будем обозначать координаты точек системы A буквами x и y, системы B — буквами X и Y, системы C — буквами ξ и η, с теми же индексами, которыми снабжены обозначения точек этих систем. Аффинное соответствие для любой точки систем A и B напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= px_i + qy_i + m\,, \\ Y_i &= rx_i + sy_i + n\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В этих соотношениях p, q, m, r, s, n обозначают величины, постоянные для всех точек, находящихся в аффинном соответствии двух систем, и для определения их, очевидно, достаточно знать координаты трех пар сопряженных точек, в нашем случае—точек a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Тогда эти шесть неизвестных определятся из шести линейных уравнений, а затем уже для любой точки системы A, на основании соотношений (4), можно найти сопряженную в системе B. Из построения точек системы C очевидно, что $X_j = x_j + \xi_j$, $Y_j = y_j + \eta_j$. Подставив эти значения в (4) и определив ξ_j и η_j, легко получаем:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= (p-1)\,x_i + qy_i + m\,, \\ \eta_i &= rx_i + (s-1)\,y_i + n\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Таким образом, между координатами точек систем C и A существует аналогичное линейное соответствие, как и между координатами точек систем B и A; только коэффициенты отчасти другие. Этим и доказано аффинное соответствие системы C системам B и A.

Если мы теперь в системе C возьмем какую-нибудь точку, то расстояние ее от P, по самому построению системы C, равно

* Burmester. Lehrbuch der Kinematik, § 343, Fig. 843.

расстоянию между двумя сопряженными этой точке и между собой точками систем A и B. Если две сопряженные точки последних совмещаются в конечной части плоскости чертежа, то здесь и будет помещаться полюс аффинности Q. Но для этого необходимо, чтобы сопряженная с ними точка системы C находилась от точки P на расстоянии ноль, другими словами, точка Q будет точкой любой из систем A или B, сопряженной точке P в системе C. Это построение ведет к цели и в том частном случае, если точки одной из систем A и B все размещаются на одной прямой.

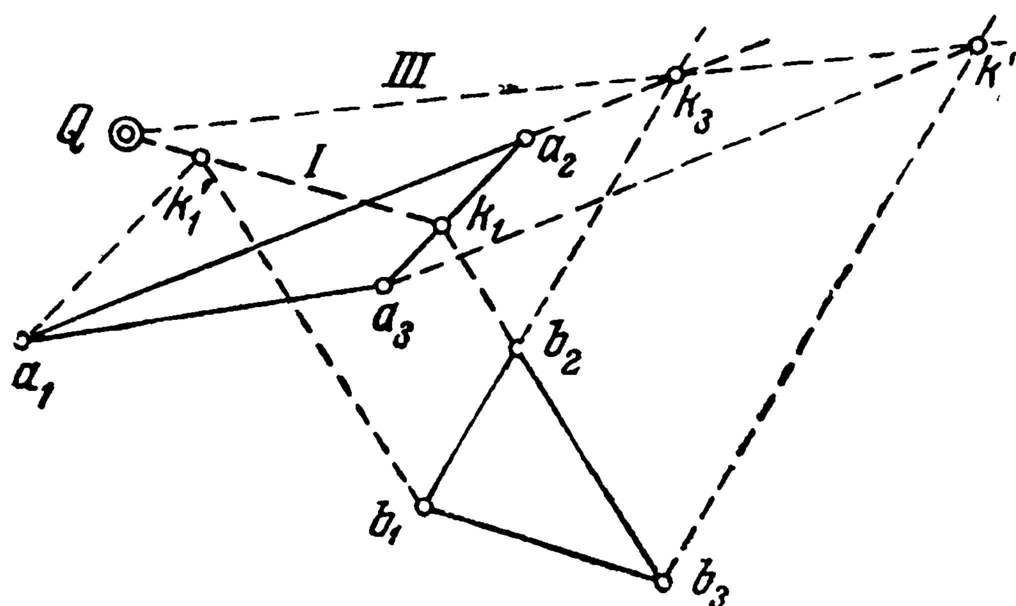
Точке γ системы C, лежащей на прямых Pc_1 и c_2c_3, сопряжены точки α и β систем A и B, расположенные на соответствующих прямых. Очевидно, что полюс аффинности тогда будет лежать в пересечении прямых αa_1 и βb_1, соответствующих прямой $P\gamma$.

Другой способ построения полюса аффиности основан на том, что пучку параллельных лучей в одной из двух систем, находящихся в аффинном соответствии, сопряжен подобный ему пучок в другой. Способ этот неприменим, однако, если точки одной из систем располагаются все на одной прямой. Построение полюса совершается следующим образом *.

Если a_1, a_2, a_3 будут точки системы A (фиг. 125), а b_1, b_2, b_3 — сопряженные им точки системы B, то доводим до пересечения пару сопряженных сторон треугольников, например, противолежащих вершинам a_3 и b_3. Точку пересечения обозначим k_3; затем через вершины a_3 и b_3 проводим прямые, параллельные противолежащим этим вершинам сторонам, которые пересекутся в точке k'_3. Точки k_3 и k'_3 определяют прямую III, проходящую через полюс аффинности. Вторая такая прямая определится, если проделать тот же ряд операций, заменив вершины a_3 и b_3 другой парой вершин, например a_1 и b_1. Тогда точки k_1 и k'_1 определят вторую прямую I, пересекающую первую прямую III в полюсе аффинности Q.

* Burmester. Lehrbuch der Kinematik, § 343, Fig. 844.

Мы позволим себе еще раз вернуться к чертежу фиг. 123, чтобы доказать одно важное в дальнейшем для нас положение, причем доказательство будем вести аналитически, пользуясь при этом зависимостями (4) между координатами точек двух аффинных систем. Мы видели, что если все точки системы, аффинной данной, располагаются на одной прямой (система точек c), то каждой точке во второй из этих систем сопряжена прямая в данной; так, точке c_4 была сопряжена прямая $a_4\ \alpha$. Каждой точке второй системы, в общем случае, сопряжена другая прямая. Для нас важно будет знать, что все эти прямые параллельны между собою.



Фиг. 125.

Допустим, что координаты данной системы будут попрежнему обозначаться буквами x, y, координаты аффинной ей — буквами X, Y. Установим сначала соотношения между коэффициентами соотношений (4), необходимые для того, чтобы точки второй системы лежали на одной прямой. Допустим, что уравнение этой прямой будет

$$Y = kX + b. \tag{6}$$

Вставим сюда выражения (4) для координат X_i, Y_i некоторой точки второй системы. Получим

$$rx_i + sy_i + n = kpx_i + kqy_i + km + b.$$

Полученное соотношение должно быть справедливо при всех возможных значениях индекса i или координат x_i, y_i, поэтому соотношение между коэффициентами определится сравнением их, причем

$$r = kp, \quad s = kq, \quad n = km + b. \tag{7}$$

Эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы прямая (6) совмещала в себе все точки системы, аффинной данной. В этом легко убедиться, подставив в (4) соотношения (7), так как получится возможность исключить из обоих соотношений (4) одновременно обе координаты x_i и y_i, причем получится соотношение между координатами X_i и Y_i, тождественное с (6). Если прямая не задается, т. е. значения величины k и b могут быть какие угодно, то для того, чтобы геометрическим местом точек системы аффинной данной была какая-нибудь прямая, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при координатах в соотношениях (4) были пропорциональны.

Допустим теперь, что заданы координаты X_i и Y_i, требуется обратно найти координаты x_i и y_i. Для этого только надо решить соотношения (4) относительно последних. Но если координаты X_i и Y_i удовлетворяют зависимости (6), а коэффициенты — зависимостям (7), то оба соотношения (4) становятся тождественными, в чем нетрудно убедиться путем непосредственно подстановки значений Y_i, r, s и n во второе из соотношений (4). Таким образом, координатам X_i и Y_i некоторой определенной точки первой системы, связанным соотношением (6), соответствуют координаты второй, определяемые единственным соотношением:

$$px_i + qy_i = m - X_i.$$

Считая здесь X_e данным, можем сказать, что любая точка прямой

$$px + qy = m - X_i \tag{8}$$

предыдущему соотношению удовлетворяет.

Если во второй системе будем брать различные точки, то в соотношении (8) будет меняться только X_i, т. е. известный член, и потому доказано, что прямые данной системы, сопряженные разным точкам второй системы, будут между собой параллельны.

Допустим теперь, что, кроме системы точек c, расположенной на одной прямой и аффинной системе точек a (см. фиг. 123), мы построили еще систему, аффинную все той же системе изображений точек a. С этою целью мы задались тремя точками e_1, e_2, e_3, которые определят, совместно с сопряженными им точками a_1, a_2, a_3, коэффициенты аффинной зависимости (4), причем коэффициенты эти, так как точки e_1, e_2, e_3 расположены на одной прямой, будут удовлетворять зависимостям (7), в которых k и b будут иметь другие значения. Коэффициенты аффинной зависимости, конечно, будут иметь другие значения, чем в предыдущем случае, так как в противном случае система точек e сливалась бы с системой точек c, чего не предполагается.

Так как значение коэффициентов p и q зависит исключительно от выбора положений трех первых точек e, то значения их в уравнении прямых (8) будут, вообще говоря, отличными от предыдущего случая и можно поэтому ожидать, что прямые в системе точек A, сопряженные различным точкам системы точек e, параллельные между собой, не будут параллельны прямым в той же системе точек a, сопряженным различным точкам системы точек c. Так оно в действительности и есть, и тогда нахождение точки в системе a, одновременно сопряженной двум точкам двух различных аффинных между собой систем, расположенных каждая на прямой, будет задачей определенной.

В самом деле, задав в системе точек c некоторую точку произвольно, находим сопряженную ей прямую в системе точек a; можем затем задаться тоже совершенно произвольно некоторой точкой системы точек e. Если ей сопряжена другая прямая, не параллельная первой, то в пересечении этих прямых определится точка, одновременно сопряженная выбранным точкам обеих систем, и мы получаем однозначное решение обратной задачи.

Обращает на себя внимание, что точка в системе точек e, когда намечена точка в системе точек c, может быть избрана произвольно. Это значит, что в двух системах, расположенных на прямой и аффинных порознь некоторой третьей системе,

расположенной по всей плоскости, любая пара точек должна считаться сопряженной. Но так оно и должно быть. В системе точек a, к которой может быть отнесена любая точка плоскости, число точек будет бесконечность второго порядка. Чтобы получить такое же число точек, попарно сопряженных между собой в двух системах, точки которых располагаются на прямых, необходимо, чтобы точке одной прямой была сопряжена любая точка другой.

В том, что точкам систем c и e могут быть сопряжены прямые различных направлений в системе a, проще всего убедит нас чертеж (см. фиг. 123). С этой целью построим точку ε , сопряженную точке α, и затем точку e_4, сопряженную точке a_4. В то время как точка c_4 делила отрезок c_2c_3 внутренним образом, так что ей сопряжена была, кроме точки a_4, точка α', лежавшая между точками a_2 и a_3, точка e_4 делит отрезок e_2 e_3 внешним образом, и ей, кроме точки a_4, сопряжена точка α'', лежащая вне точек a_2 и a_3. В то время как точке c_4 сопряжена прямая A'_4 в системе a, точке e_4 сопряжена прямая A''_4. Обе эти прямые пересекаются по построению в точке a_4. Если бы точка a_4 не была заранее известна, то она определилась бы в пересечении этих прямых; самые же прямые могли бы быть построены каждая по двум точкам, в которых она пересекает две из сторон треугольника $a_1a_2a_3$.

Посмотрим теперь, как будет обстоять дело, если мы будем иметь дело с более, чем двумя системами точек, расположенных каждая на одной прямой и порознь, аффинных некоторой системе, точки которой располагаются во всей плоскости. Если, исходя из положения точки a_4, мы сначала решим прямую задачу, т. е. определим в каждой из этих систем точки, сопряженные точке a_4, то, очевидно, обратная задача окажется однозначной. Скомбинировав именно эти изображения четвертых точек, для каждой из них в системе точек a определим прямую через нее же и проходящую. Если бы поэтому, после установления аффинного соответствия между четвертыми точками этих систем, точка a_4 стерлась, то ее можно найти.

Но нельзя установить произвольно соотношения точек между более, чем двумя из таких расположенных каждая на прямой систем, порознь аффинных системе, точки которой располагаются по всей плоскости. Точке, произвольно избранной в каждой из таких вытянутых в прямую систем, соответствует в системе a прямая. Но раз точки выбраны совершенно произвольно, то эти прямые не будут пересекаться в одной точке. Таким образом, произвольно можно задаться соответствием точек только двух таких систем; каждая пара сопряженных точек определит тогда пару сопряженных им прямых в системе точек a. В пересечении последних тогда определятся точки последней, а по ним уже методом решения прямой задачи — точки остальных, расположенных каждая на прямой систем.

Итак, определение точек системы аффинной данным, точки которых располагаются на одной прямой, будет лишь в том случае однозначным, если таких систем будет дано не менее двух. Если их более двух, то оно возможно лишь, если дается соответствие между точками двух данных, соответствие же точек остальных определяется лишь после этого.

Мы показали на примере, что прямые A_4'' и A_4' в общем случае различны. Но это не значит, что в частных случаях они не могут сливаться в одну. Очевидно, что точки α' и α'' сольются в одну, если ряд точек e_2, e_3, e_4 подобен ряду точек c_2, c_3, c_4 (см. фиг. 123). Но тогда сопряженными точками двух подобных рядов окажутся, очевидно, точки γ и ε, а затем и точка c_1 с точкой e_1. Итак, лишь в том случае решение обратной задачи будет однозначным, если две системы, аффинные данной плоской и расположенные всеми точками каждая на одной прямой, не образуют два подобных прямолинейных ряда.

Следует еще отметить случай, когда в одной из прямолинейных систем, аффинно сопряженных данной плоской, одна точка одной сопрягается с разными точками другой. Вследствие того, что любая пара точек таких прямых может считаться сопряженными, такой случай, конечно, не исключен. Если мы возьмем теперь третью прямую и на ней первые три точки, опре-

деляющие аффинное соотношение совпадающими, то все точки такой третьей системы, сопряженные названным выше парам точек, сольются в одну. Этой одной точкой не будут исчерпаны все точки системы, а только бесконечность первого порядка сопряженных точек, ибо лишь такое число пар сопряженных точек отмечено на первых двух прямых.

Переходим теперь к применению самого метода полюса аффинности к построению скоростей точек таких нормальных цепей, для которых до сих пор мы пользовались методом прямой $\mathfrak{H}$. При этом предполагается, что ложные картины скоростей могут быть построены для цепи, отличающйся от нормальной тем, что разъединяется в ней некоторый шарнир H, а вместо изображений концов двух из ее поводков задаются изображения точек A и B их прикрепления. Хотя ложную картину скоростей можно будет построить, задавшись совершенно произвольно изображениями точек A и B, но для нас важны те картины, которые получатся, если выбрать разные комбинации из изображений a и b на тех прямых A и B, на которых должны лежать их действительные изображения для случая данной нормальной цепи.

Намечаем совершенно произвольно по три изображения каждой из точек A и B на одноименных с ними прямых и строим три ложные картины скоростей, задаваясь один раз изображениями a_1 и b_1, второй раз — изображениями a_2 и b_2, третий раз — изображениями a_3 и b_3. При этом, однако, нужно задаться этими тремя парами изображений так, чтобы ряд a_1, a_2, a_3 не оказался подобным ряду b_1, b_2, b_3.

По трем парам изображений точек A и B, выбранным только что указанным способом, строим три пары изображений разъединенного шарнира H, которые будут h_1, h_2 и h_3 для изображения точки H, считая принадлежащей ее к одному из звеньев раздела, и будут χ_1, χ_2, χ_3, считая ее принадлежащей другому. Спросим себя теперь, как задаться изображениями точек A и B, чтобы, построив картину скоростей, получить изображение h_4 точки H, намечаемое произвольно, и изображение χ_4, сопря-

женное с ним аффинной зависимостью, задаваемой указанными выше тремя парами изображений точки H. Построим точку a_4 как сопряженную в силу аффинной зависимости, задаваемой тремя парами изображений a_1, a_2, a_3 и h_1, h_2, h_3 (или χ_1, χ_2, χ_3). Точку a_4 легко найти приемом, указанным нами, когда речь шла о нахождении точки c_4 на фиг. 123. Вполне аналогично должно быть найдено и изображение точки b_4.

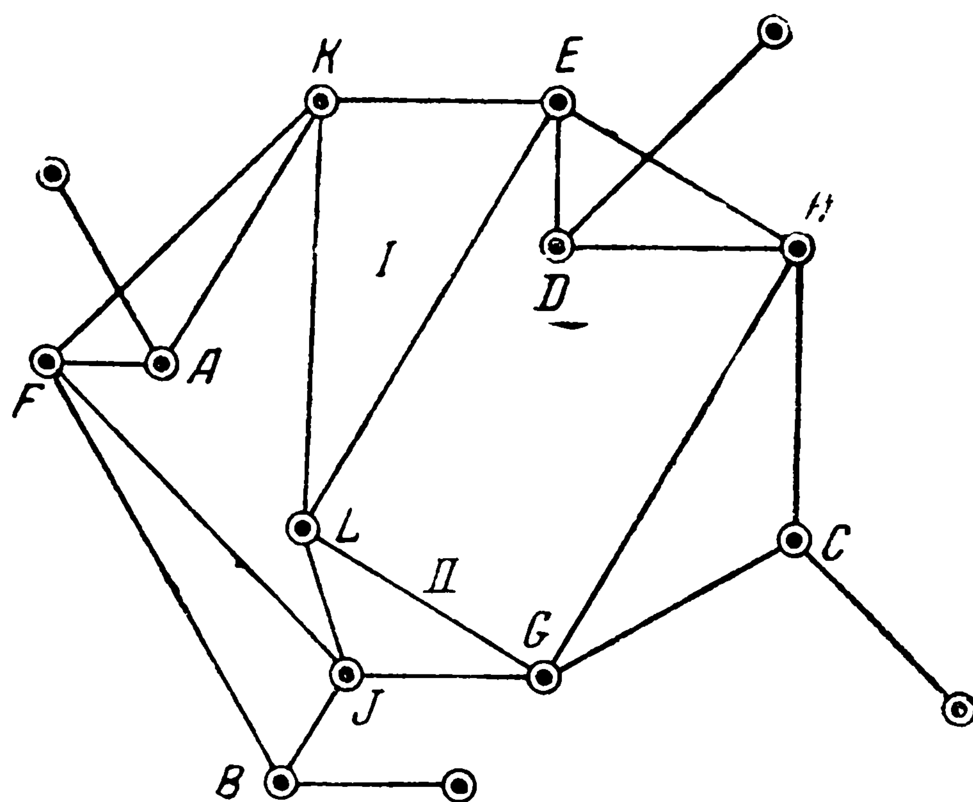
Итак, задаваясь двумя сопряженными точками аффинных систем изображающих точек h и χ, определим сопряженные точки аффинных им систем изображений точек A и B. Спрашивается теперь, если зададимся изображающими точками a_4 и b_4 и построим картину скоростей, исходя из этих изображений, получим ли мы в результате изображающие точки h_4 и χ_4, или, быть может, некоторые другие. В силу леммы X мы должны получить изображающие точки любой из систем изображений h или χ, являющиеся одновременно сопряженными не только одной точке a_4, но и точке b_4. Точке a_4 сопряжена в системе точек h некоторая прямая H'_4, точке b_4 — другая прямая H''_4, обоим точкам одновременно может быть сопряжена только точка пересечения этих прямых; таким образом, зависимость однозначна. В то же время точки a_4 и b_4 построены именно, как точки, аффинно сопряженные h_4. Поэтому, строя картину скоростей, исходя из изображений a_4 и b_4, мы должны притти именно к изображениям h_4 и χ_4, а не к каким-либо другим.

Если изображения h_4 и χ_4 были раздельными точками двух аффинных систем изображений точки H, то нельзя рассматривать изображения a_4 и b_4 как истинные изображения точек A и B. Одно, по крайней мере, из них ложно, так как в случае истинных изображений точки χ_4 и h_4 совместилось бы в одну.

Но мы можем найти изображения точек A и B, сопряженные полюсу аффинности обеих систем изображений точки H. Тогда эти изображения несомненно будут истинными, так как, обратно, по ним, при построении картины скоростей, мы можем только найти два совмещающихся в полюсе изображения h и χ.

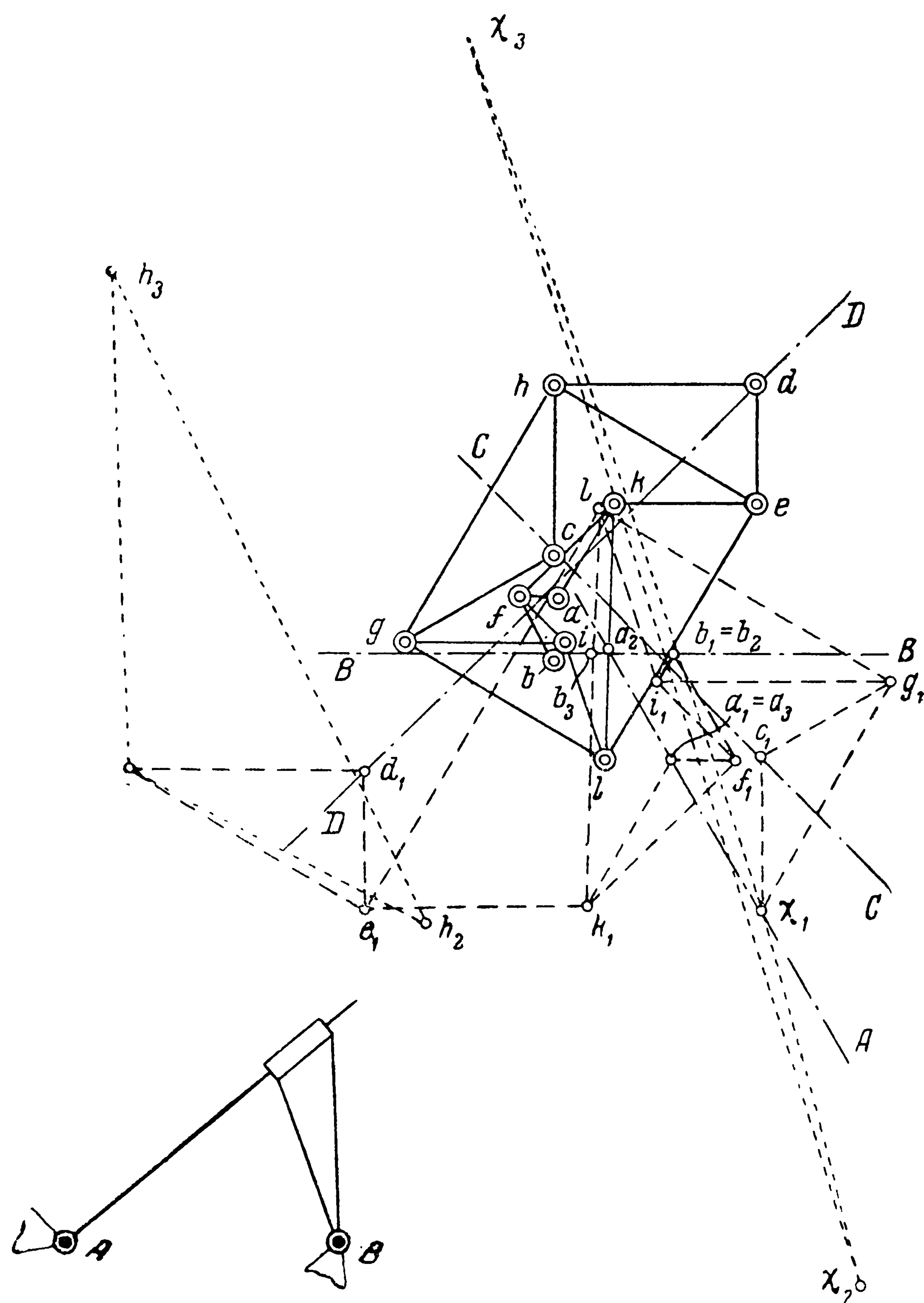
Когда истинные изображения точек *A* и *B* окажутся найденными, если пользоваться полюсом аффинности, истинные изображения остальных точек могут быть найдены двумя путями. Или мы строим четвертую картину скоростей, исходя из найденных истинных положений изображений точек *A* и *B*, или строим их как четвертые точки систем, аффинно сопряженных системам изображений точки *H*, по трем данным точкам, определившимся из трех ложных картин скоростей, т. е. тем же приемом, как были найдены и самые изображения точек *A* и *B*.

Применения метода полюса аффинности покажем на примере цепи четвертого класса с одним замком (фиг. 126).



Фиг. 126.

Скорости концов четырех поводков этой цепи определят нам четыре прямые *A*, *B*, *C* и *D* (фиг. 127), на которых должны лежать изображения одноименных с последними точек. Намечаем на первой из этих прямых произвольно изображение a_1, на второй — изображение b_1. Этого достаточно, чтобы построить первую ложную картину скоростей всех точек. Первым определится изображение f_1, если провести из указанных двух точек параллели изображаемым прямым *AF* и *BF* до пересечения их между собой. Затем, по подобию изображаемого и изображающего треугольников, определятся изображения k_1 и i_1, из последних проводим прямые, соответственно параллельные *KL* и *LJ* до пересечения на точке l_1; точки e_1 и g_1 определяются, как третьи вершины треугольников, подобных *I* и *II*; из точки



Фиг. 127.

e_1 проводим прямую, параллельную ED, до пересечения с прямой D в точке d_1 и определяем точку h_1, как третью вершину треугольника, подобного EDH. Равным образом из g_1 проводим прямую, параллельную отрезку GC, до пересечения с прямой C в точке c_1, определяем точку χ_1, как третью вершину треуголь-

ника, подобного GCH. Совершенно так же строятся две другие картины скоростей, соответствующие заданным изображениям a_2b_2 и a_3b_3. Эти картины на чертеже, в интересах его большей ясности, не показаны; нанесен только важный для нас результат их построения, именно изображения h_2, χ_2 и h_3, χ_3.

Изображения a_1 и b_2 приняты совмещенными, равным образом изображения a_2 и a_3. Очевидно, что ряды a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 между собой не подобны.

Построение полюса аффинности h треугольников h_1, h_2, h_3 и χ_1, χ_2, χ_3 произведено по методу, указанному на фиг. 124, и на чертеже тоже не показано. Полюс аффинности h является истинным изображением точки H. Истинные изображения остальных точек были найдены построением четвертой картины скоростей, если исходить из известного нам изображения точки H. Порядок, в котором определяются эти истинные изображения, отмеченные двойными кружками,— следующий. Первыми определятся точки d и c на прямых D и C, если провести до пересечения с последними из h параллели к отрезку HD и HC; по подобию изображающих и изображаемых треугольников определятся точки e и g. Из последних проводим прямые, параллельные EL и GL до пересечения в точке l и по подобию треугольников определяем точки k и i; из последних проводим прямые, параллельные KF и IF до пересечения в точке f, и по подобию треугольников определяем точки b и a, которые должны, кроме того, лежать на прямых A и B. Уклонение их от последних служит мерой точности нашего построения. Мы замечаем, что точка b лежит немного ниже прямой B, точка же a на оригинальном чертеже уклонилась от прямой A на сравнительно большую величину в 4 мм, так что результат получен с меньшей точностью, чем все предыдущие.

Совершенно так же применится метод полюса аффинности к двухкольцевой цепи с параллельным замыканием (см. фиг. 116). Ведь мы уже убедились раньше, что, представив себе шарнир между звеньями L и M разъединенным и задавшись изображениями точек A и B на своих прямых, можно построить ложную

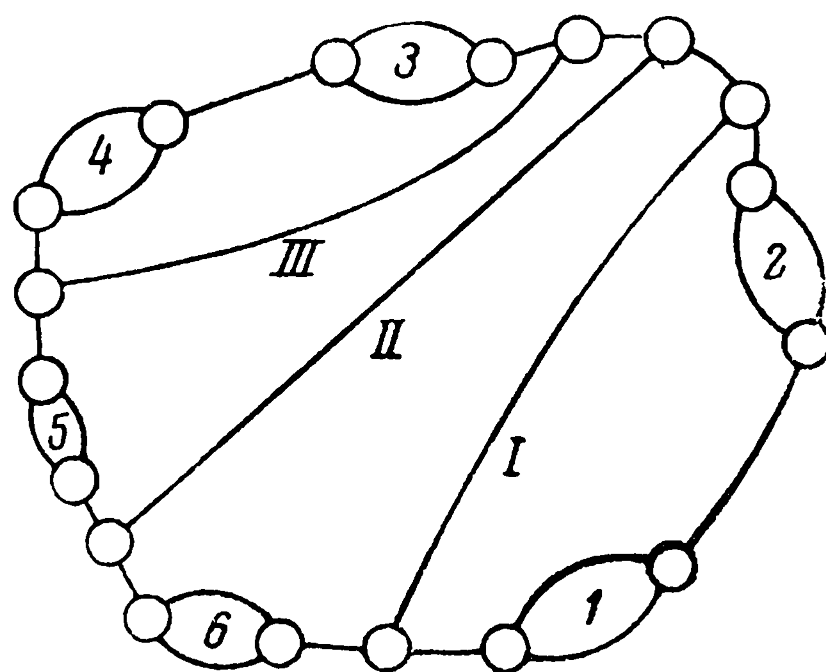
картину скоростей. Тремя такими ложными картинами пользуемся, как в предыдущем случае.

Несколько сложнее будет обстоять дело в случае цепи многокольцевой (см. фиг. 119). Как и раньше, воображаем себе разъединенным шарнир между звеньями L и M. Задавшись изображениями точек A и B, как и в случае применения метода прямой $\mathfrak{H}$, без труда построим ложную картину скоростей части α, а затем и части β. К совокупности этих частей часть γ присоединяется, как нормальная цепь вида фиг. 121, или в более общем виде (см. фиг. 122). Чтобы построить скорости точек такой цепи по скоростям концов поводков и шарнирно закрепляемой точки, нужно будет вторично применить метод полюса аффинности, т. е. каждое из трех ложных построений картины скоростей данной цепи требует в свою очередь применения приема полюса аффинности при определении скоростей (ложных) части γ.

Что касается самого порядка построения ложной картины скоростей этой части, то он описан при изложении метода прямой $\mathfrak{H}$. Окончание построения, т. е. построение скоростей части δ, совершится уже просто. Когда истинное положение точки h найдено, то не представится выгодным строить картину скоростей исходя из этого истинного изображения, так как при переходе через часть γ придется опять пользоваться методом полюса аффинности. Поэтому будет проще находить истинные положения остальных точек на основании закона аффинных соотношений.

Пропорциональное деление отрезков, однако, тоже требует довольно много труда, и можно ускорить построение, пользуясь смешанным приемом, т. е. найти с помощью аффинного соотношения изображения т о л ь к о н е к о т о р ы х т о ч е к, с таким расчетом, чтобы можно было осуществить построение истинной картины скоростей, не прибегая уже к методу полюса аффинности. В какой мере пользоваться одним приемом, в какой — другим, будет, конечно, зависеть уже от личного усмотрения исполняющего построение.

Совершенно в том же виде прилагается метод полюса аффинности к последнему типу цепи с параллельным замыканием, отличающемуся от многокольцевой цепи тем, что введены диагональные цепи, соединяющие междукольцевые отрезки, не прилегающие к одному и тому же кольцу. Такие диагональные цепи можно назвать междукольцевыми диагоналями.



Фиг. 128.

На фиг. 128 изображен пример такой цепи, состоящей из шести колец и трех междукольцевых диагоналей. Кольца изображены простые, но можно под ними подразумевать и сложные. Очевидно, что при построении ложных картин скоростей не возникнет никаких новых случаев. Точки A и B выбираем принадлежащими одному из колец, например, кольцу *1*. Построение ведем, как для случая многокольцевой цепи, не содержащей междукольцевых диагоналей, пока не дойдем до бесповодковых звеньев, к которым примыкает диагональная цепь *I*. Так как для одной точки каждого из этих бесповодковых изображение будет найдено, то можно последние трактовать как поводки крайних звеньев диагонали *I*, и потому скорости точек последней определятся как для цепи первого класса.

Дальше, через посредство цепей одноповодковых и кольца *6* перейдем к бесповодковым звеньям, к которым примыкает диагональ *II*. Переход через кольцо, будет ли оно простое или сложное,—нам известен из предыдущего (кольца β и γ на фиг. 119). Относительно диагонали *II* придется повторить сказанное относительно диагонали *I*. Вполне аналогично перейдем к диагонали *III* и выберем точку H в одном из оставшихся колец, например, в кольце *4*; переход к ней будет совершаться тоже только

через простые цепи одноповодковых или через кольца, в данном случае через кольцо *3*.

Гораздо сложнее построение картин скоростей цепей четвертого класса, в которых имеются перекрестные диагонали. Мы видели, что задача наша в предыдущем случае облегчилась благодаря тому, что мы сумели цепи с параллельными диагоналями разбить на три (вернее, на два) типа и совершить переход от более простого к более сложному. В цепях с перекрестным замыканием возможно, однако, такое разнообразие в распределении диагональных цепей, что уложить его в какую бы то ни было систему исчерпывающим образом, нам пока не удалось. Несомненно, что для некоторых более простых случаев возможно указать частные приемы, ведущие к цели удобнее и быстрее, чем приводимый ниже общий прием, пригодный и для цепей с параллельным замыканием, где он только усложнит, однако, дело. Но на частных случаях мы не будем уже останавливаться, считая, что более простую последовательность построений в простых случаях всегда легко усмотреть.

Общую идею приема, который возможно применить к столь сложным цепям, довольно легко уяснить. До сих пор мы предполагали в сложной цепи разъединенным только один шарнир. Три ложных построения позволяли нам либо определить истинное изображение этой шарнирной точки (метод полюса аффинности) для случая, когда этот шарнир не разъединен, либо прямую, на которой должно лежать это истинное изображение (метод прямой $\mathfrak{H}$). Для более сложных цепей, чем те, которые мы трактовали до сих пор, приходится представлять себе разъединенными не один шарнир, а несколько. В связи с этим будет и большее число ложных данных; до сих пор произвольно задавались только положения изображений двух точек на данных прямых; в общем случае число таких точек должно быть вдвое больше числа разъединяемых шарниров. Другими словами, нельзя разъединить шарниров больше половины числа поводков цепи.

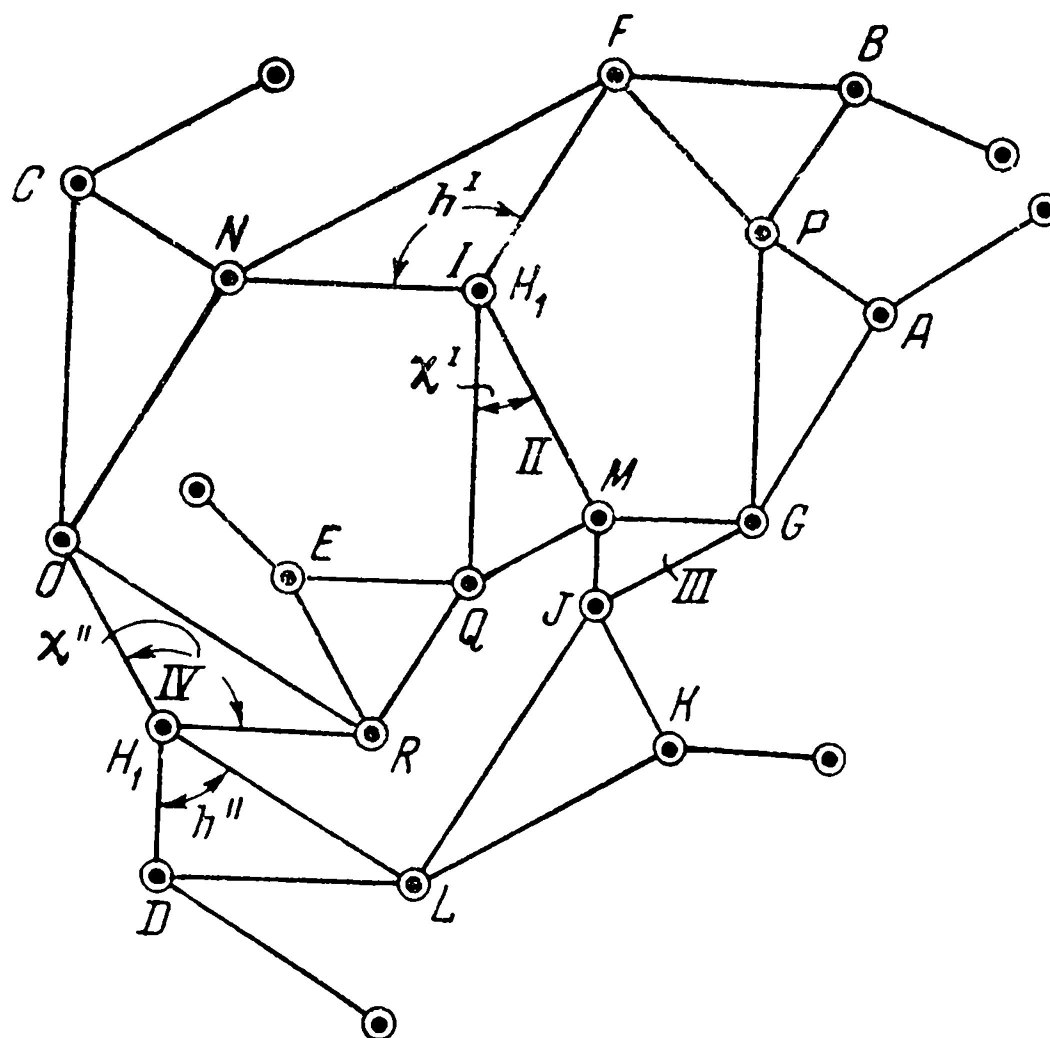
Предыдущие методы позволяют нам привести в совпадение один из разъединенных шарниров. Построив три картины скоростей, в которых изображения одного из шарниров будут приведены в совпадение, т. е., применив трижды метод полюса аффинности или метод прямой $\mathfrak{H}$, мы будем иметь три картины скоростей, с помощью которых можно будет привести в совпадение изображения второго шарнира, применив один из указанных методов четвертый раз. Построив три картины скоростей, в которых приведено в совпадение два шарнира, можно ими воспользоваться для построения картины скоростей, в которой приведены в совпадение изображения трех шарниров и т. д. Легко подсчитать, что при разъединении n шарниров результат найдется, если применить метод прямой $\mathfrak{H}$ или полюса аффинности число раз, равное сумме:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Мы видим, таким образом, что количество необходимых для получения результата графических действий возрастает весьма быстро. При этом результаты следующих построений получаются на основе предыдущих. Поэтому неточность построений, сказавшаяся при совмещении изображений первого шарнира, присоединится к таким же неточностям, неизбежным при совмещении второго. Одним словом, в конце концов, число графических действий должно стать так велико, что результирующая ошибка, сопровождающая каждое из них, сделает полученный результат совершенно ненадежным. И этот предел недалек. Уже при разъединении двух шарниров требуется некоторое искусство, чтобы получить сколько-нибудь приближающийся к истинному результат. На построение картины скоростей цепи (фиг. 129) методом прямой $\mathfrak{H}$ было употреблено около 40 часов и первоначально результат получился с невязкой в 15 мм.

Лишь с помощью некоторых дополнительных соображений, о которых речь будет ниже, удалось получить невязку, для

совокупности всех действий поразительно малую, в 2,5 мм. Что же касается метода полюса аффинности, то с помощью его так и не удалось получить результата, хотя на различные попытки и ухищрения в общей сложности было употреблено около 150 часов.



Фиг. 129.

Дело в том, что само определение полюса аффинности, не только при случайном, особенно неудачном расположении треугольников, но, как оказалось, сплошь и рядом сопровождается огромнейшей невязкой и тогда положение его оказывается в полном смысле слова гадательным. При определении полюса аффинности чисто графическим путем троекратно оказалось, что невязка в самом его определении составляет 30—40 мм. Поэтому пришлось прибегнуть к вычислению.

Коэффициенты аффинных соотношений (4) определяются весьма простыми вычислениями, если начало координат поместить в вершине одного из треугольников, а за оси принять сходящиеся в этой вершине стороны. Измерение координат то-

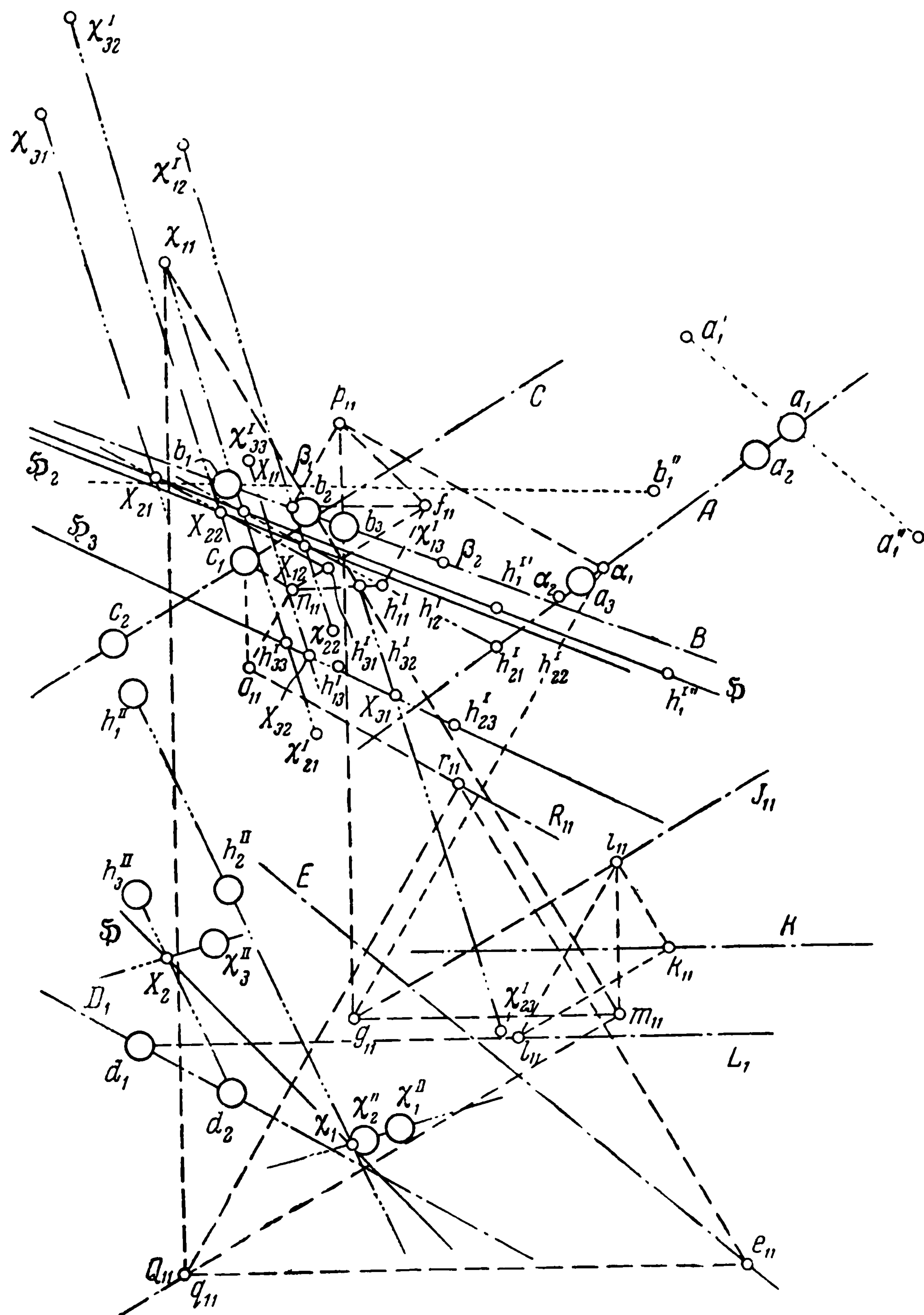
чек производилось циркулем, с отсчетом на глаз до 0,1 мм. При измерении в разное время по одному и тому же чертежу координатных отрезков обнаружилось, что результаты измерений отличаются между собою на 0,3, иногда даже на 0,4 мм, что показывает, что отклонения от истинной длины составляют 0,15—0,20 мм. При вычислении же координат полюса аффинности эти малые разницы давали результаты, отличающиеся друг от друга на 10—15 мм. Это должно считаться достаточным, чтобы считать положение полюса аффинности гадательным.

Понятно, что результат, построенный с помощью нахождения полюса аффинности треугольников, вершины которых, в свою очередь, помещаются в столь неточно определяемых полюсах аффинности, могло только дать результат, ничего общего с истинным не имеющий. Следует отметить, что при этом треугольники с неудачным расположением сторон или вершин заменялись другими, более удачно расположенными, одним словом, были приняты все возможные меры, способствующие более точному нахождению результата.

Эта весьма кропотливая борьба с невязками при пользовании методом полюса аффинности заставляет вообще автора предпочесть ей метод прямой $\mathfrak{S}$, несмотря на большую ее сложность, если только подсчитать число действий; практически она давала всегда, т. е. и при построениях, здесь не приведенных, более точный результат. Ниже взаимоотношение этих двух методов будет разобрано подробнее и будет указана возможность как бы смешанного пользования тем и другим.

Для уяснения идеи построений картин скоростей цепей четвертого класса с перекрестными диагоналями мы воспроизводим построение картины скоростей цепи фиг. 129 по заданным скоростям концов ее поводков, причем опишем применение метода прямой $\mathfrak{S}$.

Скорости концов поводков определят шесть прямых A, B, C, D, E, K (фиг. 130), на которых лежат изображения точек того же наименования. Разъединенными представим себе по одному шарниру каждой диагональной цепи. Один из них



Фиг. 130.

H^I — замковый, второй H^{II} принадлежит двухзвенной диагонали, если звено D считать присоединенным к бесповодковому IV *. Чтобы скомпенсировать избыточное число степеней свободы, явившееся в результате разъединения двух шарниров, будем считать точки A, B, C и D шарнирно закрепляемыми, но изображениями их (ложными) будем задаваться не вполне произвольно, а располагать их на истинных прямых. Преобразованная нами, таким образом, цепь распадается на ряд цепей первого класса и притом только на двух- и трехповодковые группы. Звенья A и B образуют двухповодковую группу, к которой присоединяется вторая из звеньев I и C. Звенья III и D образуют два поводка звена K; третий его поводок прикреплен к последнему в точке K. В точке M этой трехповодковой группы присоединен поводок II следующей: звено последней будет E и к нему прикрепляются два остальных поводка в точках E и R.

Приводим сначала один раз в совпадение изображения шарнира H^I, для чего строим три картины скоростей с обоими разъединенными шарнирами. Это будет первая группа трех картин скоростей. Номер группы будем обозначать вторым индексом при изображениях точек, получаемых построением, первым же индексом будем нумеровать три ложных построения, составляющих каждую из групп. Задаваемые изображения точек A, B, C и D будем обозначать только одним индексом, опуская номер группы; последнее необязательно и соответствует только некоторым упрощениям, которыми будем пользоваться. Таким образом, значение индексов иное, чем то, которым мы пользовались раньше при применении метода прямой $\mathfrak{H}$; присоединив к прежним обозначениям еще нумерацию групп, к которым принадлежат ложные картины, мы пришли бы к тройным индексам.

Первая группа трех картин скоростей, определяющих прямую $\mathfrak{H}_1$, строится на неизменно заданных изображениях c_1 и d_1 точек C и D; при этом первая картина скоростей этой группы

* На чертеже разъединяемые шарниры обозначены H_1 и H_2.

строится на основании заданных изображений α_1 и β_1 точек A и B, вторая — на основании изображений α_1 и β_1, третья — на основании изображений α_2 и β_2. Полностью изображена первая картина скоростей первой группы. Последовательность построений следующая: задаемся точками α_1 и β_1; строим P_{11}, f_{11}, g_{11}; выбираем положение c_1, сообразуясь с удобствами чертежа; строим изображения n_{11}, o_{11}, $n^I{}_{11}$; чтобы лучше различать эти два изображения, будем обозначать одно буквой h, другое — буквой χ, последними буквами отмечены углы в соответствующих звеньях.

Задаемся, опять-таки соображаясь удобствами чертежа, изображением d_1 и проводим прямую L_1, на которой должна лежать точка l_{11}. Равным образом из точки g_{11} проводим прямую J_{11}, на которой должно лежать изображение i_{11}; изображение K_{11} третьей вершины треугольника JLK должно лежать на прямой K. Определив известным приемом положения изображений этих трех вершин, находим точку m_{11}; из точки O_{11} проводим прямую R_{11}, на которой должно лежать изображение r_{11}, из точки m_{11} — прямую Q_{11}, на которой лежит точка q_{11}; изображение e_{11} третьей вершины треугольника E лежит на прямой E. Определив положение изображений этих трех вершин, находим точки $\chi^I{}_{11}$ и $\chi^{II}{}_{11}$; последняя на чертеже не показана, равно как и точка $h^{II}{}_{11}$.

Меняем изображение β_1 на β_2 и строим вторую картину первой группы; на чертеже отмечены точки $h^I{}_{21}$, $\chi^I{}_{21}$. Третья картина скоростей первой группы будет строиться, если заменить в первой картине α_1 на α_2. Вообще удобно называть совокупность з а д а в а е м ы х при ложных построениях изображений точек о с н о в а н и е м, на котором строится картина скоростей. Мы скажем, что к первой группе картин скоростей относятся картины, построенные на основаниях:

$$c_1,\ d_1,\ \alpha_1,\ \beta_1;\quad c_1,\ d_1,\ \alpha_1,\ \beta_2;\quad c_1,\ d_1,\ \alpha_2,\ \beta_1.$$

Теперь известны прямые $h^I{}_{11}$, $h^I{}_{21}$ и $\chi^I{}_{11}$; $\chi^I{}_{21}$, по которым перемещаются оба изображения разъединенного шарнира H^I,

когда α_1 остается на месте, а изображение точки B перемещается из β_1 и β_2; пересечение их дает точку X_{11}. Пересечение двух других прямых, соответственно параллельных первым и проложенных через точки h_{31} и χ_{31}, определит точку X_{21}. Точки X_{21} и X_{11} определяют прямую $\mathfrak{H}_1$. На этой прямой лежит совмещенное изображение шарнира H^I, если, сохранив в основании все те же изображения c_1, d_1, выбрать надлежащим образом положения изображений точек A и B.

Теперь эти надлежащие изображения a_1 и b_1 найдутся с помощью двух ложных картин скоростей, построенных на основаниях $h^{I'}{}_1$, c_1, d_1 и $h^{I''}{}_1$, c_1, d_1, где точки $h^{I'}{}_1$ и $h^{I''}{}_1$ — соединенные изображения шарнира H^I, произвольно задаваемые на прямой $\mathfrak{H}_1$. В результате двух этих ложных построений определятся изображения a'_1, b'_1 (последняя за пределами клише) и a''_1, b''_1, причем прямая $a'_1a''_1$ пересечет прямую A в искомой точке a_1, а прямая $b'_1b''_1$ — в точке b_1. Картина скоростей, построенная на основании точек a_1, b_1, c_1, d_1, будет обладать совмещенным изображением шарнира H^I; построение будет производиться в том же порядке, как и в случае трех первых оснований.

Что же касается построения картины скоростей на основании $h^{I'}$, c_1, d_1, то, конечно, порядок будет здесь иной, потому что основание содержит изображения других точек; мыслится разъединенным только шарнир H^{II}. Построение должно совершаться, как для цепи, в которой шарнирно закрепляемыми точками являются H^I, C и D. В этом случае цепь распадается на совокупность следующих простейших.

Звенья I и C образуют двухповодковую группу; к ней присоединяется трехповодковая, состоящая из звена E с поводками II, IV и E; потом идет еще трехповодковая группа со звеном K и поводками D, III и K; наконец, двухповодковая из звеньев A и B. Картина скоростей, дающая точки a'_1 и b'_1, не показана на чертеже, но отмечены точки $h^{I'}{}_1$, a'_1, a''_1 и b''_1 первой и $h^{I''}$, a''_1, b''_1 второй картины, построенной на основании $h^{I''}$, c_1, d_1.

Получив с помощью трех картин скоростей первой группы и прямой $\mathfrak{H}_1$ первую результирующую картину скоростей *, в которой изображения $h^I{}_1$ и $\chi^I{}_1$ сливаются в одно, переходим к построениям второй группы. Три картины скоростей этой группы, определяющие прямую $\mathfrak{H}_2$, строятся на основаниях:

$$c_1,\ d_2,\ \alpha_1,\ \beta_1;\quad c_1,\ d_2,\ \alpha_1,\ \beta_2;\quad c_1,\ d_2,\ \alpha_2,\ \beta_1.$$

Существенно в этих основаниях, чтобы осталось прежнее изображение c_1, а изображение d_1 было заменено другим, названным нами d_2. Затем мы сохранили прежние изображения α_1, α_2, β_1, β_2, что вовсе несущественно. Можно было бы избрать по паре совершенно новых изображений точек A и B, снабдив их тогда, конечно, вторыми индексами, характеризующими номер группы. Останавливаясь на старых, мы сокращаем количество построений, так как часть точек первой картины второй группы окажется тождественной с точками первой картины первой группы. Прежними останутся изображения точек A, B, P, F, G, C, N, O и изображение h^I точки H^I. Это относится ответственным образом ко всем трем картинам скоростей второй группы, почему для краткости в тексте опущены отличительные индексы в наименовании изображения h^I. Заново придется строить изображения (тоже опускаем индексы) d, i, l, k, h^{II}, m, e, r, q, χ^I, χ^{II}. С помощью трех картин второй группы находим прямую $\mathfrak{H}_2$, которой пользуемся для нахождения точек a_2 и b_2, причем картина скоростей, построенная на основании точек a_2, b_2, c_1, d_2, должна получиться с совмещенными изображениями $h^I{}_2 = \chi^I{}_2$. Невязка будет характеризоваться неполным совпадением этих изображений.

---

* В этой картине скоростей, как и в двух следующих результирующих картинах, показано только основание, т. е. точки a_1, b_1, c_1, d_1 и важные для дальнейших построений изображения точки H^{II}, именно $h^{II}{}_1$ и $\chi^{II}{}_1$. В трех же картинах каждой из групп, кроме оснований, показаны изображения точки H^I и точки X, определяющие прямую $\mathfrak{H}$.

Далее переходим к третьей группе трех картин скоростей, которые построены на основаниях:

$$c_2, d_1, \alpha_1, \beta_1; \quad c_2, d_1, \alpha_1, \beta_2; \quad c_2, d_1, \alpha_2, \beta_1.$$

В них существенно сохранение изображения d_1 первой группы и замена изображения c_1 другим, названным c_2. Изображения α и β оставлены прежние только из расчета экономии в количестве построений; при этом сольются соответственным образом с изображениями первой группы изображения α, β, p, f, g, d, i, l, k, h^{II}, m во всех трех картинах этой группы. Новыми окажутся только изображения c, n, h^I, o, e, r, q, χ^I, χ^{II}. С помощью трех картин третьей группы находим прямую $\mathfrak{H}_3$, которой пользуемся для нахождения точек a_3, b_3, причем картина скоростей, построенная на основании точек a_3, b_3, c_2, d_1, должна получиться с совмещенными изображениями $h^I{}_3 = \chi^I{}_3$.

Итак, каждая из трех групп привела нас к некоторой картине скоростей, в которой уже совмещены изображения шарнира H^I. Выполняя построения этих трех результирующих картин, мы при этом исходили из следующих трех оснований:

$$a_1, b_1, c_1, d_1; \quad a_2, b_2, c_1, d_2; \quad a_3, b_3, c_2, d_1.$$

Но эти основания не могут теоретически считаться таковыми; в них есть избыток данных. Ведь, если не мыслить шарнира H^I разъединенным, то независимо могут быть задаваемы только изображения двух точек, но не четырех. Наши построения это в достаточной мере запечатлели, так как точки a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 вовсе не были нанесены на чертеж независимо, а найдены только с помощью довольно сложных построений. Таким образом, теоретически основаниями трех результирующих картин скоростей должны считаться:

$$c_1, d_1; \quad c_1, d_2; \quad c_2, d_1.$$

Если так, то эти основания подобраны как раз так, как это требуется, чтобы методом прямой $\mathfrak{H}$ совместить изображения

второго шарнира H^{II}. Характерные точки результирующих картин скоростей показаны большими кружками и отмечены простыми индексами, характеризующими номер группы. Прямые $h^{II}{}_1$ $h^{II}{}_2$ и $\chi^{II}{}_1$ $\chi^{II}{}_2$ в пересечении дают точку X_1; соответственно параллельные им прямые, проложенные через точки $h^{II}{}_3$ и $\chi^{II}{}_3$, дают точку X_2. Через точки X_1X_2 проложена прямая $\mathfrak{H}$, на которой должно лежать изображение шарнира H^{II} в картине скоростей, где совмещены изображения уже обоих шарниров *.

Наметив на прямой $\mathfrak{H}$ произвольно изображения h'_{II} и h''_{II}, считая при этом, что шарнир H^I остается замкнутым, производим два ложных построения, определяющих (фиг. 131) точки a', b', a'', b'' **. При этом за основание построения считаются изображение шарнира H^{II} и прямые C и D. Прямые $a'a''$ и $b'b''$ пересекают соответственно прямые A и B в истинных изображениях a и b одноименных с ними точек. Истинные изображения точек C и D получатся, если разделить отрезки $c'c''$ и $d'd''$ в том же отношении, в каком точки a и b соответственно делят отрезки $a'a''$ и $b'b''$. После этого истинная картина скоростей строится на основании a, b, c, d.

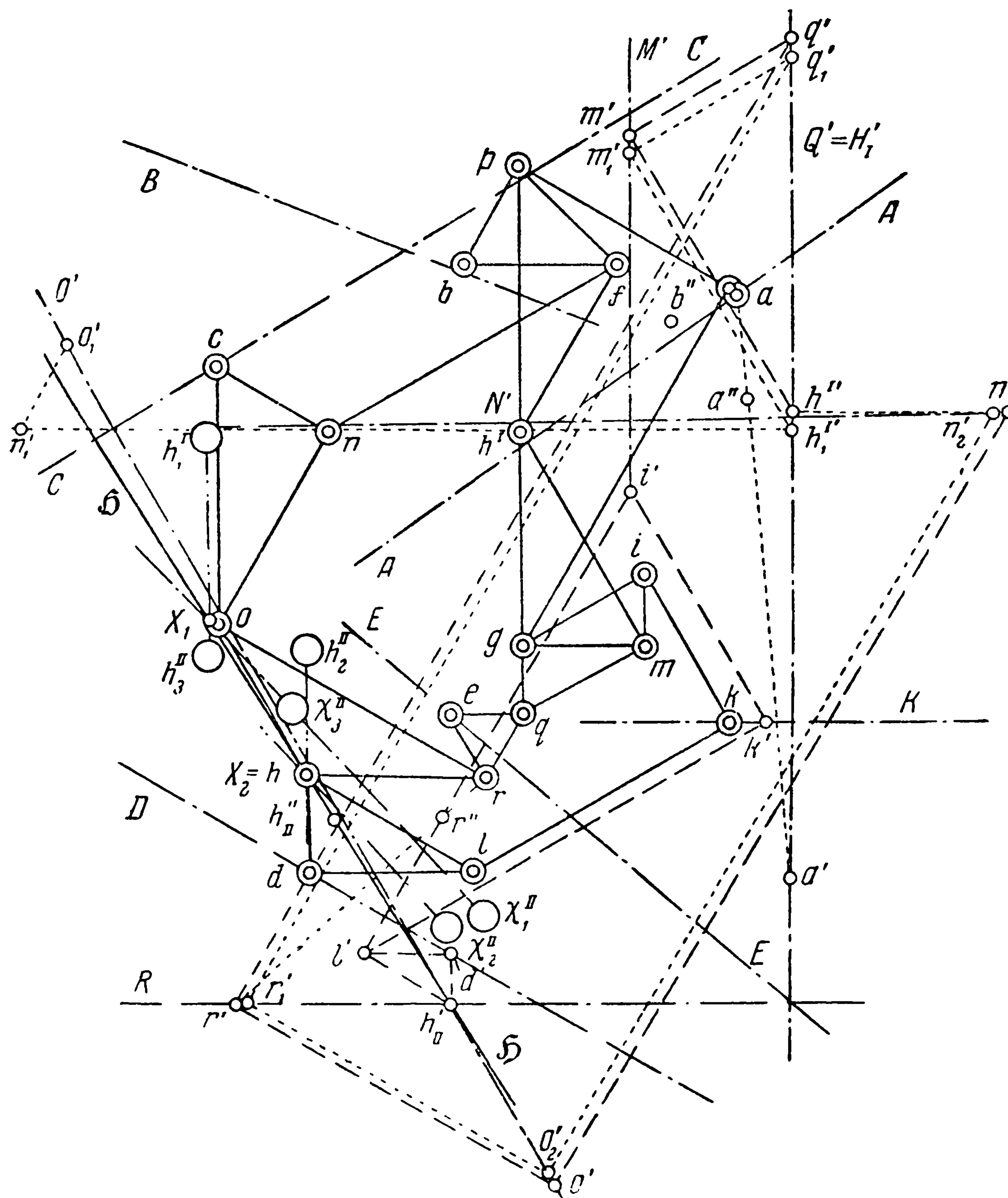
По поводу последних двух ложных построений, связанных с прямой $\mathfrak{H}$, нам остается сделать серьезное замечание, умаляющее значение метода прямой $\mathfrak{H}$. Ведь эти две последние картины должны строиться из предположения, что оба шарнира соединены, т. е. в общем случае мы пришли к первоначальной задаче построения картины скоростей сложной цепи с двумя диагональными цепями. В нашем случае, т. е. при основании, состоящем из изображения h^{II} и прямых C и D, как будет видно, цепь распадается на простейшие, чего не было с первоначально данной, и потому решение задачи доводится до конца. Если бы этого не было, то для исполнения двух последних ложных построений пришлось бы опять четырехкратно прибегать к

* На фиг. 131 вместо прямой $\mathfrak{H}$ стоит другая прямая $\mathfrak{H}'$, о чем речь будет ниже.

** Точка b'' не поместилась на чертеже.

методу прямой $\mathfrak{H}$ и, быть может, дойдя до последних построений, снова наткнуться на ту же задачу, и так без конца.

Это обстоятельство должно было бы лишить метод прямой $\mathfrak{H}$ универсальности, свойственной теоретически методу полюса



Фиг. 131.

аффинности. Там все построения могут быть исполнены все время на основании изображений одних и тех же букв. В нашем случае, например, при пользовании методом полюса аффинно-

сти, все картины скоростей, оказавшиеся необходимыми, могли быть построены при основаниях, состоящих из изображений точек A, B, C, D, так как с помощью аффинных соотношений изображения этих точек могут быть определены, как только определился полюс аффинности.

Но, несмотря на упрощающие обстоятельства, построение двух ложных картин скоростей, связанных с прямой $\mathfrak{H}$, и в данном случае окажется более сложным, чем построение всех предыдущих. Построение будет совершаться, как для цепи, в которой сохранены поводки C и D, но отброшены поводки A и B и заменены шарнирным закреплением точки H^{II}. Тогда звено D со своим поводком образует двухповодковую группу, звено K со своим поводком — вторую, такую же. Звенья I, II, E, IV и C образуют цепь третьего класса, в которой роль поводка звена II играет звено III, имеется еще два одноповодковых звена E и C, бесповодковое I и шарнирное, закрепляемое в точке H^{II} звено IV. Будь все звенья одноповодковые, понадобилось бы однократное применение метода прямой $\mathfrak{H}$ для каждой из двух ложных картин скоростей, о которых идет речь. Наличие шарнирно-закрепляемого звена облегчает построение, приводя его к случаю, характеризуемому фиг. 109. За этой цепью третьего класса следует двухповодковая группа из звеньев A и B. Построения выполнены на фиг. 131, в той своей части, которая представляет интерес новизны. Однако прежде, чем изложить содержание последней, нам нужно остановиться еще на некоторых соображениях, ведущих к указанию некоторой связи между методом прямой $\mathfrak{H}$ и методом полюса аффинности.

Когда обнаружилась невязка в 15 мм в окончательном результате построения картины скоростей цепи фиг. 129 было приступлено к проверке точности каждого из графических построений в отдельности. Так как при построениях мы имеем дело только с прямыми и точками, то, кроме обычных мелких неточностей, вытекающих из конечной толщины прямых, недостатков инструментов и пр., могут получиться неточности по-

рядка, несколько большего в следующих двух случаях. Если точка определяется пересечением двух прямых, образующих между собой малый угол, то малые неточности как в положении одной или обеих из этих прямых, так и их направлений, могут вызвать сравнительно значительное перемещение искомой точки. Если прямая определяется двумя точками, то малые неточности в определении положения одной из последних или обеих вместе могут вызвать значительное изменение в направлении искомой прямой. Этих двух случаев необходимо избегать, варьируя так или иначе построение.

При построениях, относящихся к фиг. 130, не удалось обнаружить грубых нарушений точности чертежа в указанном смысле при построении всех картин скоростей, относящихся к троекратному совмещению изображений первого из разъединенных шарниров H^I. Но легко заметить, что подобного рода неточность входит в построение прямой $\mathfrak{H}$, на которой должно лежать истинное изображение шарнира H^{II}, и именно в определении ее основных точек X_1 и X_2. Точки $\chi^{II}{}_1$ и $\chi^{II}{}_2$ оказались весьма близкими друг к другу, причем заведомо положение их до известной степени ошибочно, так как это — не заданные точки, а определяемые в результате довольно сложных построений. Поэтому направление проложенной через них прямой, равно как и параллельной последней, проходящей через точку $\chi^{II}{}_3$, может оказаться весьма неточным.

Как же избежать неточности этого построения? Дело в том, что вполне зависит от нас, которую из трех результирующих картин, служащих для определения прямой $\mathfrak{H}$, считать первой, второй или третьей. Поэтому, вместо прямых $\chi^{II}{}_1\chi^{II}{}_2$ и $h^{II}{}_1h^{II}{}_2$, пересекающихся в точке X_1, и соответственно параллельных им через $\chi^{II}{}_3$ и $h^{II}{}_3$, дающих точку X_2, можно провести прямые $\chi^{II}{}_1\chi^{II}{}_3$, $h^{II}{}_1h^{II}{}_3$ и соответственно параллельные им через $\chi^{II}{}_2$ $h^{II}{}_2$, как это сделано на фиг. 131. Получится другая прямая, обозначенная $\mathfrak{H}'$, на которой должно лежать истинное изображение точки H^{II}, причем направление ее может считаться определенным значительно точнее, чем направление прямой $\mathfrak{H}$.

Одна только эта замена позволила невязку в 15 мм свести до 2,5 мм.

Итак, три картины скоростей позволяют найти не одну прямую $\mathfrak{H}$, а целых три. Если из них две определяются точно, если при этом между собой они не пересекаются под очень острым углом, то в пересечении их найдется истинное положение изображения h^{II} без каких-либо дальнейших ложных построений. И легко заметить, что это истинное положение будет именно полюсом аффинности треугольников $h^{II}{}_1h^{II}{}_2h^{II}{}_3$, $\chi^{II}{}_1\chi^{II}{}_2\chi^{II}{}_3$. Ведь по способу построения точки X_1 и X_2 (см. фиг. 130) вполне тождественны точкам k_3 и k'_3 (см. фиг. 125), а прямая $\mathfrak{H}$ — прямой III, проходящей через полюс аффинности. Таких прямых можно построить три, и все три должны пересекаться в одной точке.

Итак, метод прямой $\mathfrak{H}$ и метод полюса аффинности, по существу своему, тождественны; первая из них представляет только недоведенную до конца вторую: вместо двух прямых, определяющих полюс аффинности, строится только одна прямая, через него проходящая. Кроме того, при пользовании методом прямой $\mathfrak{H}$ основа трех ложных картин является частным случаем основы, возможной при общем пользовании методом полюса аффинности.

Почему же в таком случае один из методов дает легче надежный результат, чем другой? И это очевидно на основании сказанного. Конечно, легче найти одну прямую, точно определенную, проходящую через полюс аффинности, чем найти две таких прямых, да еще при условии, чтобы они не пересекались под острым углом. Так, в нашем случае одна из трех прямых, именно прямая $\mathfrak{H}$ (см. фиг. 130), отпадает по изложенным выше причинам, прямая $\mathfrak{H}'$ (см. фиг. 131) может считаться определенной достаточно надежно. Но, как легко убедиться, проделав построение, пересекается с третьей возможной прямой под весьма острым углом, так что положение полюса аффинности точно не определится.

Изложенные выше соображения все же фактически стирают различия между методом прямой $\mathfrak{H}$ и методом полюса аффинно-

сти. Можно всегда построение, начатое по одному методу, закончить по другому, если это представляется удобным. Мы уже видели, как найти полюс аффинности с помощью двух прямых $\mathfrak{S}$, вместо чего можно применить методу, использованную на фиг. 124, которая, однако, тоже обладает крупными недостатками с точки зрения точности получаемого результата. Но и обратно: если первоначально построение предполагалось исполнить по методу полюса аффинности и положение последнего точно не определяется, то достаточно построить одну из прямых, проходящих через этот полюс, и затем пользоваться ею, как прямой $\mathfrak{S}$.

Наконец, еще одно видоизменение методы прямой $\mathfrak{S}$, сообщающее ему ту же универсальность, которая свойственна методу полюса аффинности. Если исполнение двух ложных построений, с помощью которых определяется истинное положение изображения на найденной прямой $\mathfrak{S}$, представляет затруднения, о которых выше говорилось, то эти затруднения можно обойти двумя путями. Можно построить вторую прямую $\mathfrak{S}$, если только есть поводки, точки прикрепления которых к звеньям цепи не входили в состав основ, на которых строились картины скоростей.

В нашем случае можно, например, роль изображений точек C и D, одной или обеих, передать изображениям точек K и E. Если среди трех новых прямых $\mathfrak{S}$, определенных по этому способу, найдется хотя бы одна, точно определяемая и пересекающая нашу прежнюю прямую $\mathfrak{S}'$ не под очень острым углом, то положение изображения или — что-то же — полюса аффинности будет найдено, и построение может быть закончено по методу полюса аффинности.

Можно действовать еще и другим способом. Мы разъединили шарнир H^{II} и нашли прямую, на которой лежит его истинное изображение. Можно сделать то же самое с любым другим шарниром. Если известны прямые, на которых должны лежать изображения вершин замкнутого полигона, то картина скоростей этого полигона может быть построена; следовательно,

таким путем мы всегда придем к искомому результату. Но вовсе не потребуется непременно разъединения шарниров целого полигона из звеньев.

В случае фиг. 129 достаточно было бы найти еще прямую, на которой лежит истинное изображение шарнира M, чтобы при построении истинной картины скоростей не иметь дела с цепями выше второго класса.

Переходим теперь к дальнейшим построениям картин скоростей, как они выполнены на фиг. 131. На прямой $\mathfrak{H}'$ заданы два ложных изображения h'_{II} и h'_{I}, совместно с прямыми C и D, составляющими основы двух картин скоростей, из которых проследним построение одной. Точка h'_{II} дает возможность определить положение d' на прямой D, после чего определяется l'; далее идут точки k' и i', а затем идет упомянутая цепь третьего класса. Из точки h'_{II} исходят две прямые O' и R', на которых должны лежать изображения точек O и R, из точки i' — прямая M', на которой должно лежать изображение точки M. Изображения точек R и E звена E должны лежать на двух известных прямых; тогда известным уже нам приемом определится прямая Q', на которой должно лежать изображение точки Q. Изображения точек Q и M лежат на двух приведенных в известность прямых; определится прямая H'_{I}, на которой должно лежать изображение точки H_{I}; эта прямая слилась с прямой Q'.

Наконец, известны прямые O' и C, на которых соответственным образом располагаются изображения точек C и O; определится прямая N', на которой должно лежать изображение точки N. Итак, для изображений каждой из вершин полигона $ONH^{I}MQRO$ определилось по прямой. Дальнейшее построение положений вершин изображающего полигона исполнено без помощи общего метода (см. фиг. 106а), а по способу последовательных приближений, в данном случае оказавшемуся удобным.

Именно, был построен сначала ложный изображающий полигон $o'_1\, n'_1\, h^{I\prime}_1\, m'_1\, q'_1\, r'_1\, o'_2$, оказавшийся вследствие произ-

вольного выбора точки o'_1, незамкнутым. Затем был построен второй полигон, начало которого в точке o'_2, именно полигон $o'_2\ n'_2\ h^{I'}\ m'\ q'\ r'\ o'$, который, конечно, тоже оказался незамкнутым. При этом замечается, что смещение изображения вершины O весьма значительное, именно из точки o'_1 в точку o'_2 сопровождается сравнительно весьма малым смещением изображения вершины H^I из $h^{I'}_1$ в h'_2.

Отсюда заключаем, что смещение вершины o'_2 в o' не вызовет уловимого на чертеже смещения изображения $h^{I'}$; и действительно, считая изображение $h^{I'}$ за искомое и строя полигон исходя из него, мы заметим, что он замыкается, причем изображающий полигон будет $h^{I'}\ m'\ q'\ r'\ o'\ n'\ h^{I'}$. После этого остается только построить изображения точек F и G, каждое по паре найденных изображений вершин треугольников I и III и точек двухповодковой группы из звеньев A и B.

Эти построения, как не содержащие ничего нового и вышедшие за пределы той части чертежа, которая могла быть воспроизведена на клише, опущены. Показано только важное для нас положение изображения a', которое не должно получиться на прямой A; точка же b' тоже лежит за пределами чертежа.

Точно так же мы построили и картину скоростей, исходя из ложного положения $h^{II''}$; показаны только точки a'', b'' и r''. В пересечении прямой $a'\ a''$ с прямой A лежит истинное изображение a точки A; равным образом в пересечении прямых $b'b''$ и В лежит точка b. Этим последним пересечением, однако, мы не воспользовались вследствие слишком острого угла между прямыми и прибегли к вариации построения: вместо истинного изображения точки B было найдено истинное изображение точки R, руководствуясь тем, что ряд $r'r''r$ должен быть подобен ряду $a'a''a$. Исходя из истинных изображений a и r и прямых A, B, C, D, E, K, $\mathfrak{H}'$, истинную картину скоростей построили в следующем порядке: строились изображения звеньев D, IV, C, K, E, II, III, I, B, A. При построении изображений двух последних звеньев оказалась невязка: точка b

оказалась в расстоянии 2,0 мм от прямой B, вторая точка a — на расстоянии 2,5 мм от первой, из которой исходили при построении, и приблизительно на таком же расстоянии от прямой A.

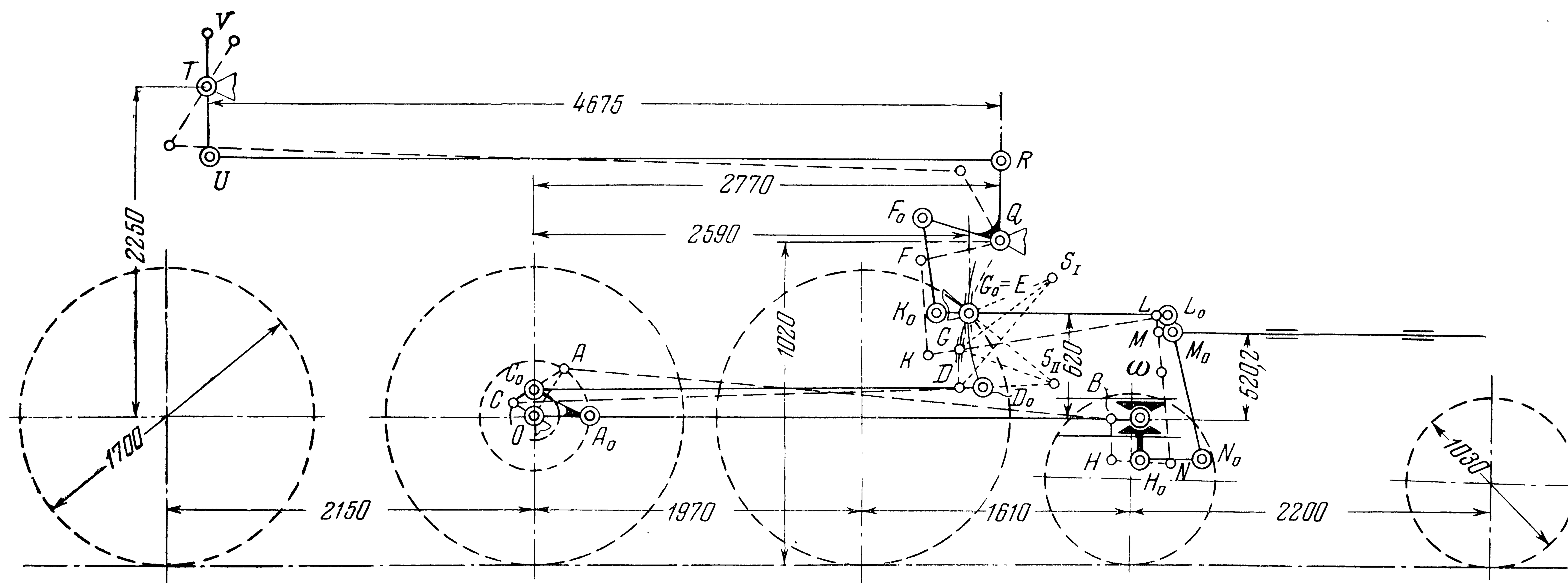
Сопоставляя все сказанное по поводу построения картины скоростей цепи фиг. 129, придем к заключению, что для случая цепи четвертого класса, в которой приходится мыслить разъединенными два шарнира одновременно, построение картины скоростей представляет уже исключительные трудности, но еще выполнимо, если подвергнуть каждое построение строгому контролю и обходить сомнительные построения. Но если требуется разъединить большее число шарниров, то, помимо огромной затраты времени на построение картины скоростей, вряд ли удастся притти к надежному результату. Поэтому мы и ограничиваемся сделанными до сих пор указаниями.

В заключение нашей главы займемся построением скоростей механизмов кулис Гейзингера и Савельева в том их виде, как они осуществляются на практике *.

На табл. I (фиг. а) показана схема кулисы Гейзингера. Сплошной чертой вычерчено основное положение механизма, соответствующее мертвому положению главного кривошипа OA_0 и среднему положению камня, причем шарнирные точки, получающие движение от этого кривошипа, для указанного положения последнего обозначены буквами с индексом о. Картина скоростей построена для положения главного кривошипа OA, причем рычаг VU передвинут в обозначенное пунктиром положение, соответствующее ходу вперед. Предполагая, что этот рычаг установлен машинистом неподвижно, мы должны считать точку F неподвижной. Кроме того, в механизме неподвижными будут точки O и E; с последней совпадает среднее положение G_0 кулисного камня. Кроме того, имеются еще две удалившиеся в бесконечность неподвижные точки, так как пор-

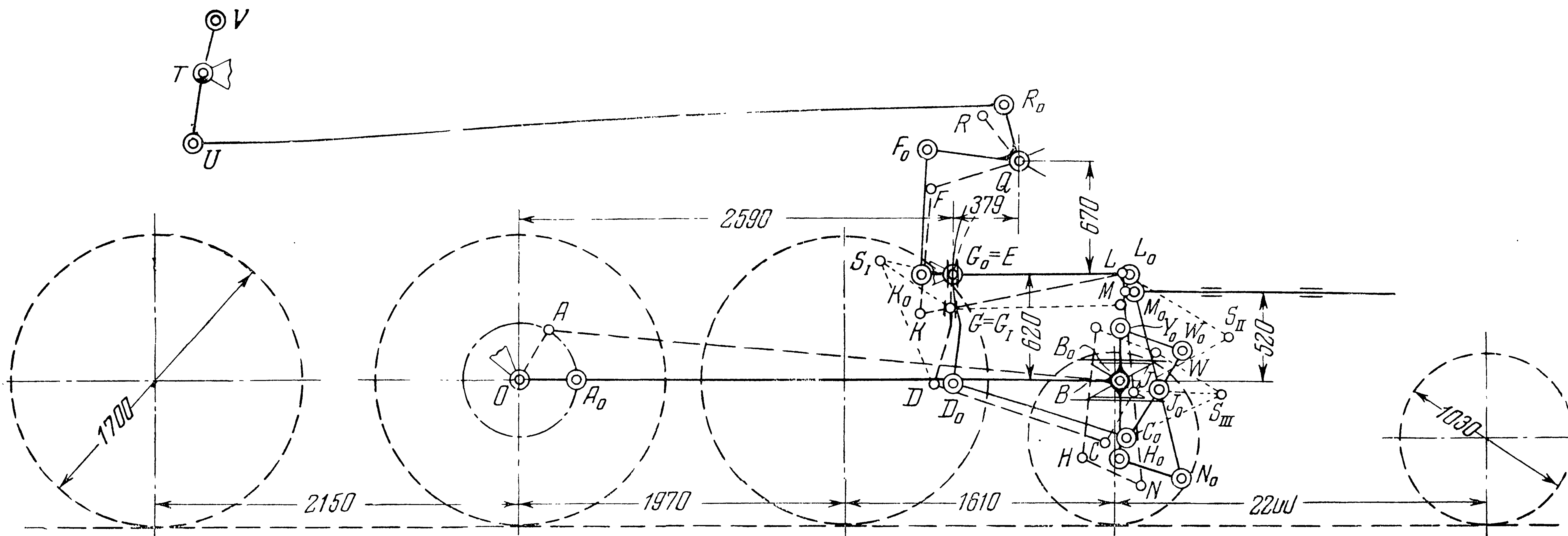
* Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность М. В. Голобову за весьма любезно предоставленные мне в пользование заводские чертежи этих кулис и спецификацию первой из них.

а



V
T
4675
U
R
2770
2250
F₀
Q
2590
F
S_I
1020
G₀=E
K₀
L
L₀
G
M
K
S_II
620
M₀
D
ω
520
C₀
A
D₀
B
C
O
A₀
H
N
N₀
H₀
1700
1030
2150
1970
1610
2200

б



V
T
R₀
R
U
F₀
Q
F
670
2590
379
S_I
G₀=E
L
L₀
K₀
M
M₀
K
G=G_I
620
520
A
S_II
B₀
W
O
A₀
D
D₀
B
S_III
C₀
H
C
H₀
N
N₀
1700
1030
2150
1970
1610

Таблица I.

шень главного механизма B_0H_0 и примыкающая в шарнире M_0 золотниковая скалка движутся поступательно и притом прямолинейно и горизонтально.

В структуре этого механизма, предполагая точку F, перемещаемую по воле машиниста, неподвижной, мы уже разобрались (см. фиг. С, стр. 39, ч. I) и знаем, что механизм состоит, кроме кривошипа, из двух двухповодковых групп и одной четырехповодковой. Первая из этих групп образуется из совокупности главного шатуна (дышла) AB и поршня BH; вторая — из кулисы ED и примыкающей к ней тяги CD от пальца C. Что касается последней группы, то в ней звеньями являются кулисная тяга KL и маятник LN, поводками же — кулисная подвеска FK и камень для одного звена, тяга маятника HN и золотниковая скалка — для второго.

На табл. II (фиг. а) показана картина скоростей в расположении Мора, но повернутая на 90° так, чтобы изображающие отрезки были параллельны изображаемым. Масштаб этой картины нанесен в предположении, что скорость Pa главного пальца A равна 5,3 м/сек, что соответствует приблизительно скорости хода в 50 верст в час. Скорость точки С построена на основании подобия треугольников OAC и Pac. Направление скорости точки B известно и изображение ее поэтому должно лежать на вертикальной (вследствие поворота на 90°) прямой B, проходящей через полюс P; положение изображения на этой прямой определится, если знать, что отрезок ab должен быть параллелен изображаемому AB. Точка h сливается с точкой b, так как скорости точек B и H равны по величине и направлению. Изображение d точки D определится, если мы проведем из точек c и $e \equiv P$ соответственно параллели отрезкам CD и ED до пересечения их между собой. После этого определяется скорость точки G кулисы (не камня), для чего требуется найти изображение q_1 этой точки.

Теоретически это делается построением треугольника edg_1, подобного EDC. Путь этот практически непригоден, так как один из углов этого треугольника близок к 180°, два других —

к 0°, и потому результат построения не может быть точным. Поэтому взяты две вспомогательные точки S_I и S_{II}, которые считаются принадлежащими тоже кулисе, и их изображения построены на основании подобия треугольников $de\,\sigma_I$ и $de\,\sigma_{II}$. После этого изображение g_I определяется в пересечении исходящих из σ_I и σ_{II} прямых, соответственно параллельных S_IG и $S_{II}G$.

Далее приходится перейти уже к четырехповодковой группе. Определяются четыре прямые, на которых должны соответственно лежать изображения точек K, G (камня), M и N. Прямая K исходит из полюса $P = f$ и параллельна стержню FK, прямая N исходит из точки h и параллельна стержню HN, прямая M сливается с прямой B, потому что точка M, так же, как и точка B, обладает скоростью, направленной по горизонтали. Что касается прямой G, то она исходит из точки g_I и имеет направление радиуса кулисы в точке G. Дело в том, что отрезок g_Ig, где g — изображение шарнирной точки камня изображает относительную скорость камня, т. е. скорость его скольжения в кулисе, которая направлена по касательной к дуге кулисы; повернутая на прямой угол, она будет направлена по радиусу последней.

Прием, предложенный на фиг. 94, при данном соотношении размеров частей — неудобен; пришлось бы строить картину ложных скоростей обоих звеньев четырехповодковой группы, воображая себе шарнир L разъединенным. Тогда нужно было бы задаваться на прямых K и G ложными положениями изображений одноименных с этими прямыми точек, а ложное положение изображения точки L определять на основании подобия изображения прямолинейного ряда. Расстояние KG мало сравнительно с расстоянием GL, и потому ошибка в длине изображения первого из этих отрезков будет сильно увеличена при определении ложного изображения точки L второго. Поэтому был применен прием, указанный на фиг. 96, общий для всех цепей первого класса, т. е. мыслился разъединенным шарнир K. На прямой M было задано ложное положение m' точки M,

проведена прямая $n'm'$, параллельная NM, до пересечения с прямой N в точке n', затем построена точка l' на основании подобия рядов NML и его изображения $n'm'l'$.

Второго ложного изображения маятника не нужно строить, потому что прямые M и N пересекаются в точке $b = h$, лежащей в пределах чертежа. Соединяя последнюю прямой с изображением l', определяем прямую L, на которой должно лежать истинное изображение точки L. Ложное изображение l' в дальнейшем не используем, так как это привело бы к весьма большому размеру чертежа, а вместо него задаемся на найденной прямой L другим ложным положением l_1, через которое проводим l_1g_1, параллельную кулисной тяге LG до пересечения в точке g_1 с прямой G и на основании подобия изображаемого ряда LGK своему изображению $l_1g_1k_1$ определяем ложное положение k_1 изображения точки K.

Вполне аналогично найдено изображение k_2, соответствующее ложному изображению l_2 точки L. Когда изображение последней перемещается по прямой L, то изображение точки K перемещается по прямой k_1k_2. Так как на прямой L лежит истинное изображение точки L, то на прямой k_1k_2 должно лежать истинное изображение K. Но, кроме того, последнее должно лежать на ранее бывшей нам известной прямой K; следовательно, в пересечении последней с k_1k_2 найдем истинное изображение k. Через последнее проводим прямую, параллельную кулисной тяге KL, до пересечения с прямыми G и L в точках g и l, являющихся истинными изображениями. Точка g в пределах точности чертежа слилась с точкой k. Через точку l проводим прямую, параллельную оси маятника LN, пересекающую прямую N в точке n, а прямую M — в нижней из двух точек, обозначенных буквою m.

Положение точки n может считаться найденным надежно, но нельзя утверждать того же относительно только что указанной точки m, определившейся в пересечении двух прямых, образующих малый угол. Поэтому следует определить положение точки m, разделив отрезок ln в том же отношении,

в каком точка M делит отрезок LN; тогда получим верхнюю из двух точек m. Расстояние между последними не следует считать за невязку чертежа, потому что верхняя точка определена надежно, нижняя — весьма ненадежна; последняя вообще подлежит уничтожению и не может служить проверочной. Применив аналогичное рассуждение к положению точки g, скажем, что она не вполне сливается с точкой k, а отстоит от последней на расстоянии, в масштабе нашего чертежа равном 0,02 м/сек.

Кроме того, построение скоростей кулисы Гейзингера выполнено нами еще в расположении по Бурместеру, где скорости точек уже непременно строятся повернутыми на угол в 90°, а величина скорости точки измеряется длиной отрезка между самой точкой и ее изображением. С этою целью (см. табл. II, фиг. б) чертеж кулисного механизма нанесен в сокращенном виде, т. е. опущены все стержни, получающие движение только от руки машиниста, и в том же положении, для которого картина скоростей строилась нами на табл. II, фиг. а.

Откладываем повернутую на прямой угол скорость точки A в виде отрезка Aa. Изображение c точки C получается в пересечении прямых OC и проходящей через точку a параллели к отрезку AC, так как изображающие отрезки должны быть параллельны изображаемым. Точка b определяется в пересечении вертикали, проведенной через B с прямой, проходящей через точку a, параллельной отрезку AB, точка h получается, если построить $Hh = Bb$, так как скорости точек B и H равны. Точка d определяется в пересечении прямой, проведенной из точки c, параллельной отрезку CD и прямой из неподвижной точки E, проходящей через D. По тем же причинам, как и в предыдущем построении, введены вспомогательные точки S_I и S_{II}, которые представляем себе принадлежащими кулисе. Изображение σ_I получится в пересечении прямой через d, параллельной DS_I и прямой ES_I, и вполне аналогично построится изображение σ_{II}. Изображение g_I точки G кулисы получится и в пе-

а

б

Таблица II.

ресечении прямых через σ_I и σ_{II}, соответственно параллельных S_IG и $S_{II}G$.

После этого остается перейти к четырехповодковой группе. Изображение точки K должно лежать на прямой FK, точки M — на вертикали через последнюю, точки N — на параллели к HN через h и точки G — на параллели радиусу $G\omega$ кулисы через g_I. Последнее станет очевидным, если, обозначив изображение шарнирной точки камня через G, заметим, что переносная скорость камня будет Gg_I, а абсолютная — Gg. Так как абсолютная и переносная скорости отложены от одной точки G, то и в этом способе изображения отрезок g_Ig будет служить изображением относительной скорости, с которой камень скользит в кулисе. Таким образом, определились прямые K, G, M, N.

Задавшись ложным изображением m', проводим через него прямую, параллельную MN до пересечения с N в точке n', и на основании подобия рядов $n'm'l'$ и NML определяем ложное изображение l'; прямые M и N пересекаются в точке I; через последнюю и l' проходит прямая L, на которой должно лежать истинное изображение точки L.

Пока задаемся на этой прямой ложным изображением l'' и проводим через него прямую, параллельную LG до пересечения с прямой G в точке g''; ложное изображение k'' построится на основании подобия рядов $l''g''k''$ и LGK. Прямые G и L пересекаются в точке II, и изображение точки K будет перемещаться по прямой $k''\,II$, когда изображение точки L будет перемещаться по прямой L. Но на последней помещается истинное изображение точки L, откуда следует, что истинное изображение точки K должно лежать на прямой $k''\,II$. Но, кроме того, известна еще вторая прямая K, на которой оно лежит; в пересечении этих прямых определится положение точки k. Через нее проводим прямую, параллельную KL до пересечения с прямой L в точке l, и находим точку g на основании подобия изображения неизменяемого отрезка последнему. Через l проводим прямую, параллельную LN до пересечения

с прямой N в точке n, точку же M определяем опять на основании указанного подобия.

Построение скоростей точек кулисы Гейзингера, конечно, совершается здесь не впервые; но впервые картина скоростей строится прямо и непосредственно. Употреблявшиеся до сих пор построения сводились к предварительному построению двух других картин скоростей, причем скорость каждой точки определялась, как геометрическая сумма полученных ее скоростей в каждой из картин. С этой целью сначала выбрасывали дышло AB, предварительно определив конфигурацию механизма, и затем поршень считался неподвижным; строили картину скоростей; затем дышло ставили на место, выбрасывали тягу CD от пальца, и кулиса считалась неподвижной. В этих обоих предварительных построениях четырехповодковая группа сохраняла свой вид полностью, но концы трех ее поводков вместо двух, как это имеет место на самом деле, оказывались неподвижными. Если концы двух поводков одного из звеньев четырехповодковой группы закреплены неподвижно, то в пересечении поводков лежит мгновенный центр звена, его неподвижная точка. Отбросив тогда поводки этого звена и рассматривая мгновенный центр как шарнирно закрепленную точку, придем к случаю трехповодковой группы.

Таким образом, построение скоростей четырехповодковой группы в частном случае, когда закреплены неподвижно концы трех из ее поводков, могло быть исполнено имевшимися до сих пор средствами. Сама четырехповодковая группа, как таковая, не изучена.

На табл. же I (фиг. б) изображена кулиса Савельева в применении к тому же паровозу, к которому была проектирована предыдущая. Положение золотниковой скалки, а также кулисная тяга LK остались прежние. Палец C, сидевший на оси O, устранен, ввиду чего весь парораспределительный механизм потерял связь с рамой паровоза; последнее составляет, повидимому, главную цель создания этого механизма, так как должно почти устранить влияния игры рессор паровоза на

распределение и облегчить сборку, делая ее менее зависимой от правильной установки паровозных букс. Маятник NL получает движение уже не от поршня главного механизма, но от крестовины YH, составляющей жесткое целое с главным шатуном (дышлом) AB; от последней идут две тяги, одна HN непосредственно к нижней точке маятника, вторая YW — к крестовине CW маятника, соединенной с последним шарнирно в J; в точке C этой крестовины примыкает тяга CD, заменяющая тягу от пальца к кулисе Гейзингера.

Структурный разбор механизма при несколько ином расположении частей дан нами в первой части (см. фиг. D, стр. 116). При этом в изображенном на таблице заводском выполнении сделано еще маленькое упрощение: отсутствует двухповодковая группа γ (см. фиг. D), а поводок $3\,\beta$ стал бесконечно длинным, превратившись непосредственно в золотниковую скалку. Таким образом, все парораспределение, считая, конечно, точку F, положение которой устанавливается машинистом, неподвижной, состоит только из цепи третьего класса второго основного типа (см. фиг. 131, ч. I). Маятник LN будет звеном двухповодковым, причем роль поводков играют золотниковая скалка и тяга HN; кулиса представляет собой звено, шарнирно закрепленное; кулисная тяга LK — звено одноповодковое, поводок ее FK; крестовина маятника CW — тоже одноповодковое звено, поводок ее YW; тяга CD и камень — бесповодковые звенья.

Сплошной чертой показано положение всего механизма, соответствующее мертвому положению главного кривошипа OA и положению камня, совпадающему с неподвижной точкой кулисы. Для отличного от этого пунктирного положения, в котором рычаг машиниста установлен на передний ход, а главный кривошип выведен из мертвого положения, построены картины скоростей в расположениях Мора (табл. III, фиг. а) и Бурместера (табл. III, фиг. б). Обращаемся к первой из них.

Приложенный масштаб нанесен в предположении, что скорость точки A равна 5,3 м/сек, что соответствует приблизительно

скорости хода в 50 верст в час. Картина скоростей не повернута на прямой угол; поэтому изображающие отрезки перпендикулярны к изображаемым.

Откладываем в нашем масштабе скорость точки A в виде отрезка Pa; изображение точки B лежит на горизонтали, проведенной из точки P, и находится в пересечении с последней прямой через a, перпендикулярной к отрезку AB. Через точку b проводим прямую, перпендикулярную к отрезку HV, которая, пересекаясь с прямыми * через точку a, соответственно перпендикулярными AH и AY, дает точки y и h. После этого идет упомянутая шестизвенная цепь третьего класса. Мы знаем, что для цепи второго основного типа этого класса удается прежде всего найти прямые для изображений шарнирных точек, соединяющих между собой звенья, или даже вообще для любой точки цепи. Особым, однако, является для нас соединение камня G с кулисой при помощи пары скольжения.

Это затруднение легко обойти, считая, что камень шарнирно соединен с кулисой в центре ω последней. Тогда следовало бы прежде всего нанести на чертеж прямые, на которых должны лежать изображения вершин шестиугольника $LG\omega DCJL$. Мы этим приемом не пользовались, чтобы показать, как делается построение без означенной замены пары скольжения парой вращения, которая часто неудобна, иногда и невозможна.

Из сказанного при построении скоростей предыдущей кулисы знаем, что вообще изображения точки G камня и покрываемой ею точки G_I кулисы не совпадают, но что изображающий отрезок gg_I перпендикулярен к $G\omega$, т. е. имеет то же направление, как и изображение последнего. Таким образом, вместо изображающего шестиугольника $lg\omega dcil$ построим другой шестиугольник $lgg_I\,dcil$. В первую очередь надо найти прямые L, G, G_I, D, G, J, на которых лежат вершины последнего многоугольника.

* На чертеж не нанесены.

Начать нужно с двухповодковых звеньев. Рассмотрим сначала маятник. Через точку h проводим прямую N, перпендикулярную к отрезку HN, на которой должно лежать изображение точки N; изображение второй точки M маятника лежит на горизонтали M из полюса P. Наметив на прямой M ложное положение m' изображения точки M, проводим через него прямую, перпендикулярную к отрезку MN до пересечения с прямой N в точке n'; после этого ложные изображения l' и i' наносятся так, чтобы ряд $l'i'n'm'$ был подобен $LJNM$. Вполне аналогично были нанесены ложные изображения l'', i'', n'', m'', в пределах точности чертежа, как оказалось впоследствии, совпавшие с истинными l, i, n, m. Точки l', l'' определяют прямую L, точки i', i'' — прямую J.

Обращаемся далее к кулисе. Прямые D и G_I могут быть легко найдены, как проходящие через полюс и соответственно перпендикулярные к отрезкам ED и EG_I. Так это и было сделано, но рекомендовать этого нельзя, поскольку это касается прямой G_I. Расстояние EG_I и у нас довольно мало, а при других положениях камня может оказаться и совсем ничтожным, а потому направление прямой G_I не может считаться нанесенным достаточно надежно. Следует нанести вспомогательную точку S_I, связанную с кулисой, и соответствующую ей прямую S_I, без которой все равно не удалось обойтись впоследствии, и методом ложных положений найти прямую G_I; так это выполнено на фиг. б той же таблицы.

После этого переходим к одноповодковым звеньям. Поводок FK определяет прямую K, перпендикулярную его к направлению и проходящую через полюс. Кроме того, известна прямая L; этого достаточно, чтобы найти прямую G. Задаемся на прямой L ложным изображением l_1 и проводим прямую, перпендикулярную к l_k до пересечения с прямой K в точке k_1. Отрезок l_1k_1 точкой g_1 делим в том же отношении, в котором точка G делит отрезок LK; вполне аналогично с помощью ложного положения l_2 найдена точка g_2; точки g_1 и g_2 определяют прямую G. Теперь обращаемся к крестовине маятника. Известна

прямая J, на которой должно лежать изображение точки J; направление же поводка YW определяет вторую прямую W, перпендикулярную к направлению последнего и проходящую через точку y, на которой должно лежать изображение точки W. Точка пересечения I прямых J и W определяется точно и лежит в пределах чертежа; поэтому для определения прямой C достаточно задаться одним ложным положением i_1 точки J; через последнее проводим прямую, перпендикулярную к JW, до пересечения с прямой W в точке w_1 и наносим точку c_1 так, чтобы ряд $w_1 i_1 c_1$ был подобен WJC; точки c_1 и I определяют прямую C.

Итак, шесть прямых, на которых должны лежать вершины изображающего шестиугольника, направления сторон которого известны, найдены. Этого теоретически достаточно, чтобы построить изображающий шестиугольник. Но в действительности оказалось, что при выполнении построения по образцу фиг. 109 направления некоторых сторон пересекались с соответствующими прямыми под столь острыми углами, что положения точек пересечения становились мало надежными. Ввиду этого пришлось увеличить число прямых и сторон многоугольника введением вспомогательных точек S_I, S_{II} и S_{III}, из которых первая принадлежит кулисе, вторая — маятнику, третья — его крестовине. О прямой S_I речь была уже выше.

Построив на отрезках $l'i'$ и $l''i''$ ложные изображения треугольника LJS_{II}, определяем точки σ'_{II} и σ''_{II}, как третьи вершины этих изображающих треугольников; последние две точки определяют прямую S_{II}. Точно так же на отрезке $i_1 w_1$ построено изображение треугольника JWS_{III} и определена третья вершина σ_1^{III} изображающего треугольника; последняя совместно с точкой I пересечения прямых W и J определяет прямую S_{III}. После этого только мы можем с пользой приступить к построению по образцу фиг. 109.

Задаемся ложным положением c_3 изображения точки C на найденной прямой того же обозначения; проводим через него прямую, перпендикулярную к отрезку CD, до пересечения с прямой D в точке d_3. Из последней следовало бы теперь

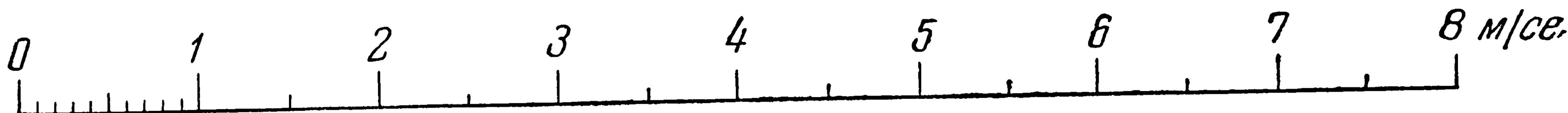
провести прямую, перпендикулярную к отрезку DG_I, до пересечения с прямой G_I в точке $g^I{}_3$. Но эти прямые пересекаются под очень небольшим углом, и потому положение точки $g^I{}_3$ найдено обходным путем, с помощью прямой S_I; через точку d_3 проведена прямая, перпендикулярная к отрезку DS_I, до пересечения с прямой S_I в точке $\sigma^I{}_3$, а из последней — прямая, перпендикулярная к отрезку $S_I G_I$, до пересечения с прямой G_I в точке $g^I{}_3$. Из этой точки проведена прямая, перпендикулярная к отрезку $G_I\omega$, до пересечения с G в точке g_3, из последней — прямая, перпендикулярная к отрезку GL, до пересечения с прямой L в точке l_3; отрезки $g_3g_3{}^I$ и g_3l_3 имеют весьма незначительную длину.

К точке i_3 приходим опять с помощью обходного построения, пользуясь прямой S_{II}: проводим через l_3 прямую, перпендикулярную к LS_{II}, до пересечения с S_{II} в точке $\sigma^{II}{}_3$, а из последней уже — $\sigma^{II}{}_3 i_3$ перпендикулярно к $S_{II}J$, причем i_3 лежит на прямой J. Далее не сразу возвращаемся к изображению исходной точки C, а совершаем обход через точку S_{III}: через i_3 проводим прямую, перпендикулярную к отрезку JS_{III}, до пересечения с S_{III} в точке $\sigma_3{}^{III}$, а из последней прямую, перпендикулярную к отрезку $S_{III}C$, до пересечения с C в γ_3. Несовпадение точек c_3 и γ_3 показывает нам, что c_3 не является истинным изображением точки C. Поэтому выбираем еще второе ложное положение c_4 последней и вполне аналогично проделываем такое же построение, приводящее нас к точке γ_4; все промежуточные точки этого последнего построения на чертеже указаны индексом 4.

После этого остается определить истинное положение точки c, выполнив одно из построений фиг. 106 б. Мы рекомендовали простейшее, без круга. Из точек c_3 и c_4 проводим две параллельные прямые, по какому угодно направлению, из точек γ_3 и γ_4 — две других, по иному направлению. В пересечении двух пар параллелей соответственно определяются точки *II* и *III*. Проложенная через них прямая пересекает прямую C в истинном изображении c точки C.

Этим истинным изображением мы пользуемся, как раньше пользовались ложным, т. е. строим полигон, вершины которого должны лежать на прямых C, D, S_I, G_I, G, L, S_{II}, J, S_{III} и направления сторон которого перпендикулярны к сторонам изображаемого полигона, за исключением стороны $g_I g$, направление которой тоже известно, но длина которой в изображаемом полигоне равна нолю. Так как мы начали строить полигон, исходя из истинного положения точки C, то полигон должен быть замкнутым. На самом деле обнаружилась некоторая невязка в 1,2 мм, так что, начав построение от левой из двух точек c и наметив вершины d, σ_I, g_I, g, l, σ_{II}, i, σ_{III}, затем возвращаемся к правой точке c. Следует отметить, что этой невязкой контролируется только точность определения положения точки c с помощью ранее нанесенных на чертеж прямых, но отнюдь не точность построения последних. Что касается положения вершин истинного полигона, то следует отметить, что вершины l, g_I и g оказались столь близкими, что не могли быть раздельно отмечены на чертеже, и, кроме того, случайно совпали с точкой l''. Второе из этих обстоятельств имеет следствием совпадения между собой точек σ_I и σ''_{II}, i и i'', n и n'', m и m'', первое — слияние изображающей точки k с четырьмя остальными, так как слияние l и g показывает, что кулисная тяга имеет поступательное движение; слияние точек g и g_I указывает, что камень в кулисе не скользит. Так как слияние указанных точек не абсолютное, то нужно сказать, что при данном положении механизма с большим приближением осуществляется поступательное движение кулисной тяги и почти вовсе отсутствует скольжение камня. Остается еще найти изображение точки W, что сделать просто, проведя через i прямую, перпендикулярную к отрезку JW, до пересечения с прямой W в точке W. Какой-либо невязки, характеризующей точность нанесения прямых на чертеж, обнаружить не удалось; это, однако, нисколько не гарантирует точности нанесения этих прямых, а есть следствие слияния, с одной стороны, истинных изображений с некоторыми ложными, служившими

а



б

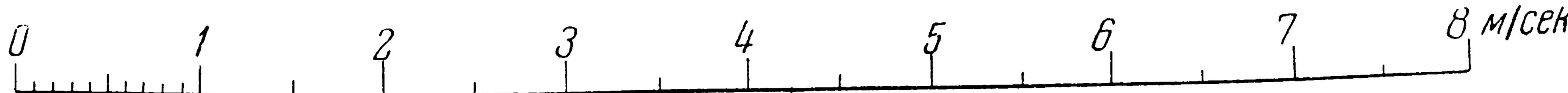


Таблица III.

для нанесения этих прямых, с другой стороны, — точек l, g_I, k между собой. Эти мешающие контролю обстоятельства не имеют места в картине скоростей в расположении Бурместера (табл. III, фиг. б).

Общая последовательность построений этой последней картины скоростей — та же, что и предыдущей, только скорости должны быть непременно повернуты на прямой угол, а изображающие отрезки должны быть параллельны изображаемым Итак, откладываем по радиусу OA отрезок Aa, служащий изображением скорости точки A. Из точки a проводим прямую; параллельную отрезку AB, которая пересекается с вертикалью из B в точке b; через последнюю проводим параллель YH, которая пересекается с параллелями к отрезкам AY и AH, проведенными из точки a, соответственно в точках y и h. После этого нужно уже перейти к цепи третьего класса и прежде всего нанести прямые, на которых должны лежать изображения тех же точек, как и при построении предыдущей картины скоростей.

Начинаем с маятника, как со звена двухповодкового. Прямая M — вертикальна и проходит через одноименную с ней точку, прямая N проходит через точку h и параллельна отрезку HN. Намечаем ложное положение изображения m', проводим через него параллель к отрезку MN до пересечения с прямой N в точке w' и строим точки n', i', m', l' подобными $NJML$; вполне аналогично наносятся на чертеж точки n'', i'', m'', l''. Точки i' и i'' определяют прямую J, точки l' и l'' — прямую L. Последняя в пределах чертежа настолько близко подходят к прямой M, что вычертить их одновременно не представлялось удобным; поэтому в верхней части чертежа нанесена только прямая M, в нижней — только прямая L.

После этого переходим к шарнирно закрепленному звену, кулисе. Отрезки ES_I и ED совпадают, соответственно с прямыми S_I и D_{III}. Прямая G_I определена более точно, чем на фиг. а табл. III, но так, как там рекомендовалось, т. е. методом ложных положений: отмечена точка d' на прямой D, проведена

через нее параллель к отрезку DS_I до пересечения с прямой S_I в точке σ'_I, а затем на отрезке $d'\sigma_I'$ построено изображение треугольника S_IDG_I; третья вершина этого изображения будет g'_I, лежащая на прямой G_I; последняя, кроме того, проходит через неподвижную точку кулисы E.

После этого можно перейти к звеньям одноповодковым. Начинаем с кулисной тяги LK. Отрезок FK совпадает с прямою K и, кроме того, известна прямая L, на которой лежит изображение одноименной с ней точки. Из ранее намеченного ложного изображения l' последней проводим параллель к LK до пересечения с K в точке k' и строим $l'g'k'$ подобным LGK; кроме того, на прямой L взято еще новое ложное изображение l_1 и, аналогично только что сказанному, построены точки k_1 и g_1. Точки g' и g_1 определяют положение прямой G_I. Переходим к крестовине маятника. Поводок YW определяет направление прямой W, проходящей через точку y; изображение точки J должно лежать на прямой J, пересекающей прямую W в точке I. Наметив ложное изображение i_1, проводим через него параллель к IW до пересечения с прямой W в точке w_1 и строим $w_1i_1c_1$ подобным WIC. Точки c_1 и I определяют прямую C.

Кроме того, по тем же соображениям, как и на фиг. а, пришлось определить прямые S_{II} и S_{III}, на которых лежат изображения одноименных с ними вспомогательных точек. На отрезках $i'l'$ и $i''l''$ были построены изображения треугольника LJS_{II}, причем третьи вершины σ'_{II} и σ''_{II} этих изображенных треугольников определят прямую S_{II}. Для определения прямой S_{III} на отрезке i_1c_1 было построено изображение треугольника CJS_{III}; третья вершина σ_1^{III} изображающего треугольника лежит за пределами чертежа, в пересечении соединенных скобкой прямых, исходящих из точек i_1 и c_1; второй точкой, определяющей прямую S_{III}, будет точка пересечения I прямых J и C.

Теперь остается только построить на найденных прямых два ложных полигона, определяющих истинный. Построение их будет отличаться от произведенного на фиг. а только тем, что стороны полигонов будут не перпендикулярны, а параллель-

ны изображаемым ими отрезкам. Оба разомкнутых полигона будут $c_3 d_3 \sigma_3^I g_3^I g_3 l_3 \sigma_3^{II} i_3 \sigma_3^{III} \gamma_3$ и $c_4 d_4 \sigma_4^I g_4^I g_4 l_4 \sigma_4^{II} i_4 \sigma_4^{III} \gamma_4$ *. Остается только найти ту точку двух подобных рядов, определяемых двумя парами точек c_3, c_4 и γ_3, γ_4, которая сама себе сопряжена. С этой целью из первой пары точек проводим пару параллельных прямых по любому направлению, из второй — другую пару по любому другому и отмечаем соответственным образом их точки пересечения II и III. Последние определяют прямую, пересекающую C в истинном изображении c. Исходя из последнего изображения, строим истинный полигон $cd\sigma^I g^I gl\sigma^{II} i\sigma^{III} c$. Последняя из этих точек c не совпала с первой на 1,5 мм, что характеризует невязку в построении, по найденным прямым, трех полигонов. Неточности же при построении самих прямых этой невязкой не учитываются. Следует отметить, что точка d не в точности совпала с точкой подвеса E кулисы, и потому с последней не сливаются и точки σ_I и g_I. Несовпадение выражается несколькими десятыми долями миллиметров и могло быть учтено в карандашном чертеже, но пометить раздельно эти точки совершенно не оказалось возможным, почему все они отмечены одним кружком. Продолжая прямую lg, находим в пересечении ее с K точку k; равным образом прямая li должна пересечь прямые N и M в истинных изображениях n и m. Первое из этих пересечений удается установить, второе — гадательно, и потому точка m построена на основании подобия рядов mln и MLN. В изображении точки J обнаружена невязка, которая может быть следствием совокупности всех неточностей чертежа: верхняя из отмеченных точек i найдена, как вершина полигона, нижняя — на основании подобия рядов lin и LIN. Величина невязки меньше, чем в точке c.

Следует отметить, что если бы мы построение полигона, вместо точки c, начали бы с точки i, то вряд ли удалось бы обнаружить сколько-нибудь заметную невязку в построении полигона: она была бы настолько меньше невязки в c, насколько

* Отрезки $g_3^{\mathrm{I}} g_3$ и $g_4^{\mathrm{I}} g_4$ параллельны $G_{\mathrm{I}}\,\omega$.

расстояние i_3i_4 меньше c_3c_4; это замечание относится и к фиг. а табл. III.

Забегая несколько вперед, скажем, что, выбросив тягу CD, можно построить две картины скоростей механизмов, полученных из кулисы Савельева, одного, —считая неподвижной кулису, другого, — считая неподвижным золотник, и из комбинаций их получить скорости точек кулисы Савельева. Оба указанных механизма будут первого класса, один — содержащий четырехповодковую группу, второй — только двухповодковые.

Глава вторая

СТАТИКА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ

Задача статики механизмов состоит в определении условий равновесия механизма и в определении сил взаимодействия между частями механизма и различных внутренних напряжений. С точки зрения конструкции механизма, имеющей целью осуществить механизм прочный как в смысле вероятности поломок, так и в смысле изнашивания частей, последняя задача является основной. Но определяя внутренние напряжения и силы взаимодействия между частями механизма, мы всегда будем иметь дело с уравновешенной системой внешних сил. Если даже явно приложенные в точках механизма силы не находятся в равновесии и под действием их механизм движется, то все же напряжения и силы взаимодействия определятся на основании принципа Д'Аламбера, причем совокупность явно приложенных сил и сил инерции представляет опять-таки уравновешенную систему сил.

Начнем же с основной задачи статики, состоящей в том, чтобы уравновесить простейшим образом данную систему сил. Эта задача, как известно, решается в общем виде, причем доказывается, что данная система сил, приложенных к механизму, может быть уравновешена одной силой, приложенной в данной точке механизма и имеющей данное направление.

Иначе обстоит дело с вопросом, как практически эту уравновешивающую найти. Здесь возможно несколько путей.

Самый сложный и длинный из них будет состоять в том, что мы разложим стержневой механизм на составляющие его

твердые звенья и будем исходить из условий равновесия каждого такого твердого звена. Путь этот будет длинным, потому что мы должны тогда ввести все силы взаимодействия между отдельными звеньями, которые при этом и определятся. Таким образом, нам придется решать задачу более сложную, чем простое нахождение уравновешивающей, задачу, которая составит наибольший объем настоящей главы и которая приводится к нахождению сил взаимодействия между звеньями нормальных цепей, из которых механизм составлен.

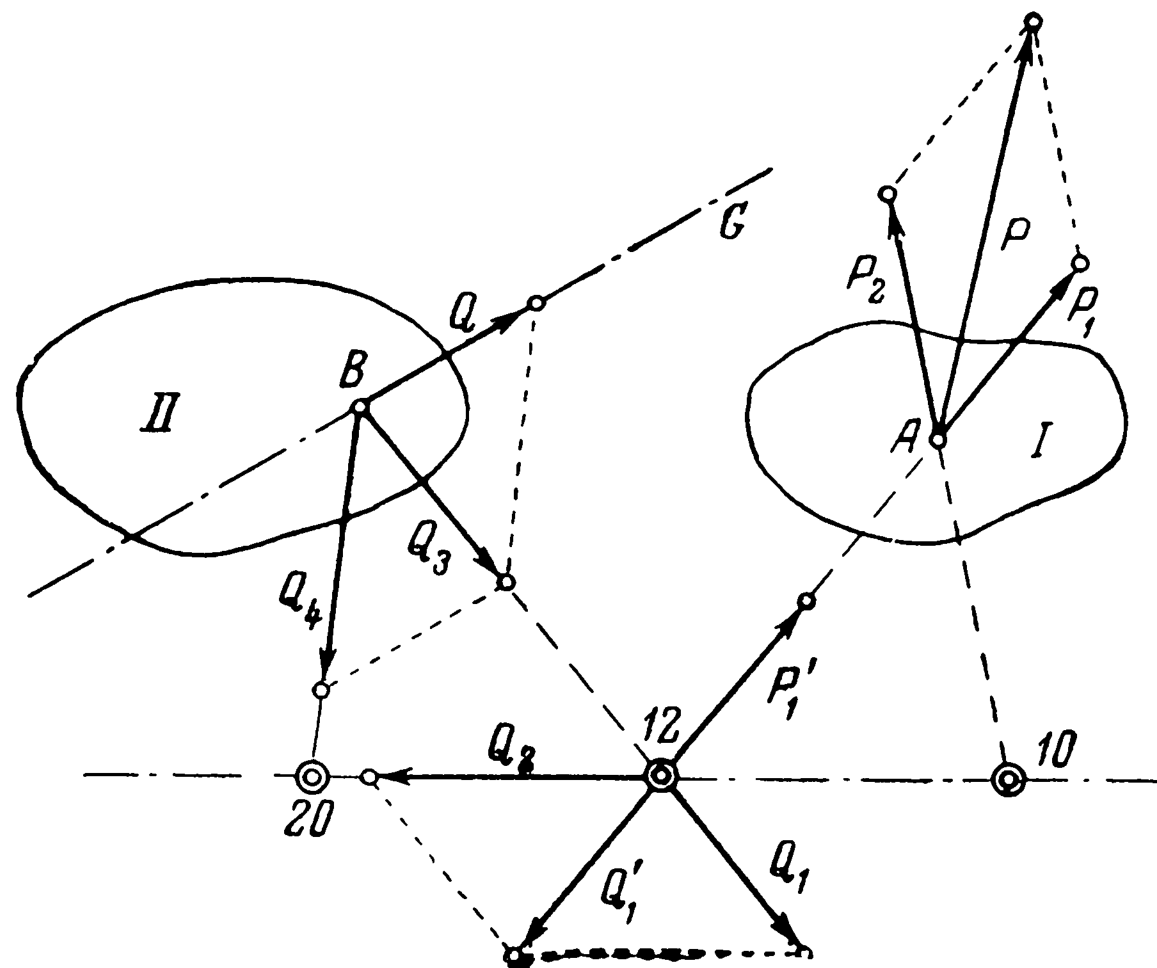
Второй путь, до недавнего времени единственный графический из основанных на законе виртуальных перемещений, требовал определения мгновенных центров как в абсолютном, так и в относительном движении звеньев механизма, положение которых, однако, в силу условий чертежа бывает весьма неопределенным, причем почти никогда невозможно обойти заведомо мало точных построений. Сущность этого приема * состоит в следующем.

Допустим, что I и II (фиг. 132) — два каких-либо звена механизма, причем число и расположение промежуточных между ними звеньев безразличны. При этом предполагается, что в точке A звена I приложена одна из сил P системы, которую требуется уравновесить в точке B звена II силой, направленной по прямой G. Кроме того, приведены в известность мгновенные центры вращения обоих указанных звеньев относительно устоя механизма, занумерованного цифрой 0, которые, согласно принятым по Аронгольду обозначениям, для звена I и устоя обозначены точкой *10*, для звена II и устоя точкой *20*, затем в относительном вращении этих звеньев друг около друга мгновенный центр обозначен точкой *12*. По правилам сложения вращений около параллельных осей эти три мгновенных центра лежат на одной прямой.

Если искомая сила Q уравновешивает данную силу P, то виртуальные работы их, при некотором элементарном переме-

* Проф. Д. С. Зернов в курсе прикладной механики указывает автора этого приема — английского инженера Kennedy.

щении механизма, должны быть равны по величине, но по знаку противоположны. Разлагаем силу P на две составляющих так, чтобы одна из них проходила через точку *10*, вторая — через точку *12*. Сумма виртуальных работ этих составляющих равна виртуальной работе силы P, но работа силы P_2 равна нолю, так как она проходит через неподвижную точку звена *I*,



Фиг. 132.

куда может быть перенесена ее точка приложения. Поэтому виртуальная работа силы P_1 равна такой же работе силы P, т. е. эти силы эквивалентны.

Силу P_1 по прямой ее действия можно перенести в точку *12*, приложив здесь равную ей силу P'_1, виртуальная работа которой, как силы, эквивалентной P_1, все еще будет равна такой же работе силы P. Силу P'_1, приложенную в точке *12* звена *I*, легко уравновесить силой, приложенной в той же точке, но к звену *II*. Как мгновенный центр в относительном движении звеньев, точка *12* обладает свойством, что скорость ее, при любом перемещении механизма из данного положения, будет иметь одно и то же направление и величину в обоих звеньях,

а потому виртуальные перемещения этой точки будут равны, к какому бы из обоих звеньев ее ни отнести. Поэтому сила Q'_1, равная по величине и противоположная по направлению силе P'_1, приложенная в точке *12* звена *II*, совершит виртуальную работу, равную по величине, но противоположную по знаку такой же работе силы P.

В свою очередь, разлагаем силу Q'_1 на две, из которых сила Q_2 проходит через неподвижную точку *20* звена *II* и совершает виртуальную работу, равную нолю, а вторая Q_1, в силу этого, эквивалентна силе Q'_1; направление ее избирается проходящим через точку B. Эту вторую составляющую переносим по линии ее действия в данную точку B, где обозначаем ее через Q_3; последняя является уравновешивающей силы P, так как виртуальная работа ее равна по величине такой же работе последней, но противоположна по знаку, и притом сила приложена в требуемой точке; только направление ее еще не соответствует данному. Поэтому еще раз разлагаем силу Q_3 на две составляющих, из которых одна Q_4 проходит через неподвижную точку *20* звена *II*, так что виртуальная работа ее равна нулю, вторая же Q направлена на прямой G и представляет собой искомую уравновешивающую.

Сила P есть одна из сил данной системы. Но указанные для нее действия можно проделать с любой другой силой, после чего найдется уравновешивающая всех сил системы алгебраическим сложением отдельных уравновешивающих, направленных по данной прямой.

Самый процесс нахождения уравновешивающих отдельных сил достаточно прост и требует построения только трех параллелограмов сил на каждую из сил системы. Нередко расположение этих параллелограмов бывает весьма неудачно, т. е. получаются параллелограмы весьма узкие и длинные, выходящие за пределы чертежа и сильно затрудняющие работу. Эти неудобства обычно легко обойти, перенося разлагаемые силы в своем звене по прямой их действия в другую точку. Так, например, нет вовсе необходимости разлагать силу Q'

на две составляющие, проходящие через точки *20* и *B*, именно в точке приложения *12*; можно ее считать приложенной в любой точке прямой *12 A*. Серьезное затруднение составляет только достаточно точное определение мгновенных центров.

Отметим, что величина силы *Q* при изменении направления прямой *G* (вращении ее около *B*) будет изменяться и увеличиваться по мере приближения этой прямой к прямой *20 B*, достигая бесконечности при совпадении ее с последней. Таким образом, хотя направление уравновешивающей и может быть задано произвольно, но существует одно направление в каждой точке механизма, именно, прямая, соединяющая ее с мгновенным центром в абсолютном движении соответствующего звена, по которому нельзя уравновесить систему сил, не уравновешенную в самой себе, силой конечной величины. Очевидно, что это направление совпадает с нормалью к абсолютной траектории данной точки.

Желая как-нибудь обойти те неточности в задаче об нахождении уравновешивающей данной системы сил, которые вызваны неточным определением положения мгновенных центров, я на объяснительных лекциях, касающихся исполнения студенческих работ по прикладной механике в нашем институте, предлагал определять сомнительные мгновенные центры не с помощью разработанного Бурместером метода Аронгольда, а пользуясь картиной скоростей механизма, в которой полюс является изображающей точкой мгновенного центра каждого из звеньев механизма, или даже пользоваться только картиной скоростей, вовсе не определяя мгновенных центров, но прибегая зато к вычислениям. Последнее естественно, раз уже картину скоростей приходится строить, и если этого достаточно, чтобы найти уравновешивающую.

Применение одной только картины скоростей основано на законе виртуальных скоростей *, выражение которого получается из закона виртуальных перемещений, если разделить

* И этот прием указывается в курсе прикладной механики проф. Д. С. Зернова.

равенство нулю суммы виртуальных работ отдельных сил на произвольно избранный, но бесконечно малый элемент времени, в который мы можем себе представить совершившимися бесконечно малые виртуальные перемещения точек системы. Таким образом, закон виртуальных скоростей для находящейся в равновесии под действием $(n+1)$-й силы системы напишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} P_i v_i \cos(P_i, v_i) = 0, \tag{1}$$

где P — сила, v — скорость, а каждый член суммы представляет собой геометрическое произведение из силы на виртуальную скорость точки ее приложения.

Каждая из сил может считаться уравновешивающей системы всех остальных. Если за такую уравновешивающую примем $(n+1)$-ю силу, обозначив ее Q, а виртуальную скорость точки ее приложения — v, то окажется, что уравновешивающая системы n сил должна удовлетворять условию:

$$Q = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i v_i \cos(P_i, v_i)}{v \cos(Q, v)}. \tag{2}$$

Картина виртуальных скоростей чертится задавшись произвольно величиной скорости одной точки механизма, направление которой известно; такие точки в механизме с низшими парами всегда найдутся, так как непременно есть в нем звенья, связанные с устоем либо парой вращения, либо парой скольжения. Произвольность этого задания соответствует представлению о независимости выбора бесконечно малого элемента времени, в течение которого воображаем себе совершившимся виртуальное перемещение; скорость же одной точки механизма определяет скорости всех остальных. Когда картина скоростей вычерчена, то геометрическое произведение из силы на скорость легко найти: нужно только спроектировать вектор, изображающий скорость на направление силы, или обратно, вектор, изо-

бражающий силу, на направление скорости и затем соответственно перемножить числовые величины, изображаемые одним из векторов и проекцией другого.

Так определится каждый из членов суммы, стоящей в числителе выражения (2); знак каждого члена будет зависеть от того, будет ли угол между силой и направлением виртуальной скорости острый или тупой. Что касается знаменателя, то он представляет собой проекцию виртуальной скорости данной точки приложения искомой равнодействующей на данную прямую действия уравновешивающей. Будет ли угол между этими двумя последними векторами прямой или острый мы не знаем, поэтому знаменатель можно определить, на первый взгляд, только по абсолютной величине. Но если заметить, что в соотношении (1), из которого получено (2), величины сил и скоростей входят только по абсолютной величине, то необходимо, чтобы знак знаменателя был противоположен знаку числителя, чтобы получить для Q положительное значение. Из последнего соображения и определится, в какую сторону по прямой действия направить найденную вычислением силу Q.

Высказанные выше соображения, ведущие к использованию картины скоростей к решению о нахождении уравновешивающей данной системы сил, приложенных к механизму, нашли себе яркое геометрическое толкование в теории вспомогательного рычага, изложенной в неоднократно уже упомянутой нами статье проф. Н. Е. Жуковского.

С целью изложения сущности этой теории, поскольку она касается затронутого здесь вопроса, напишем закон виртуальных перемещений для случая тонкой неизменяемой пластинки, имеющей неподвижную точку, около которой возможно вращение пластинки в ее плоскости. Обозначим радиусы-векторы, соединяющие точки приложения сил, расположенных в плоскости пластинки, с ее неподвижной точкой, буквой r и заменим в (1) виртуальные линейные скорости через соответствующее выражение угловой скорости, так что $v_i = r_i\omega$.

Величина ω, как постоянная для всех членов суммы и не равная нолю, сократится, и для случая такого плоского рычага, находящегося в равновесии под действием n сил, закон виртуальных скоростей приведет к выражению:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i r_i \cos(P_i, v_i) = 0.$$

Так как радиусы-векторы перпендикулярны направлению линейных скоростей точек рычага, то

$$\angle (P_i, r_i) = \angle (P_i, v_i) \pm 90^\circ \text{ и } \cos(P_i, v_i) = \pm \sin(P_i, v_i),$$

так что окончательно условие равновесия рычага напишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i r_i \sin(P_i, r_i) = 0. \qquad (3)$$

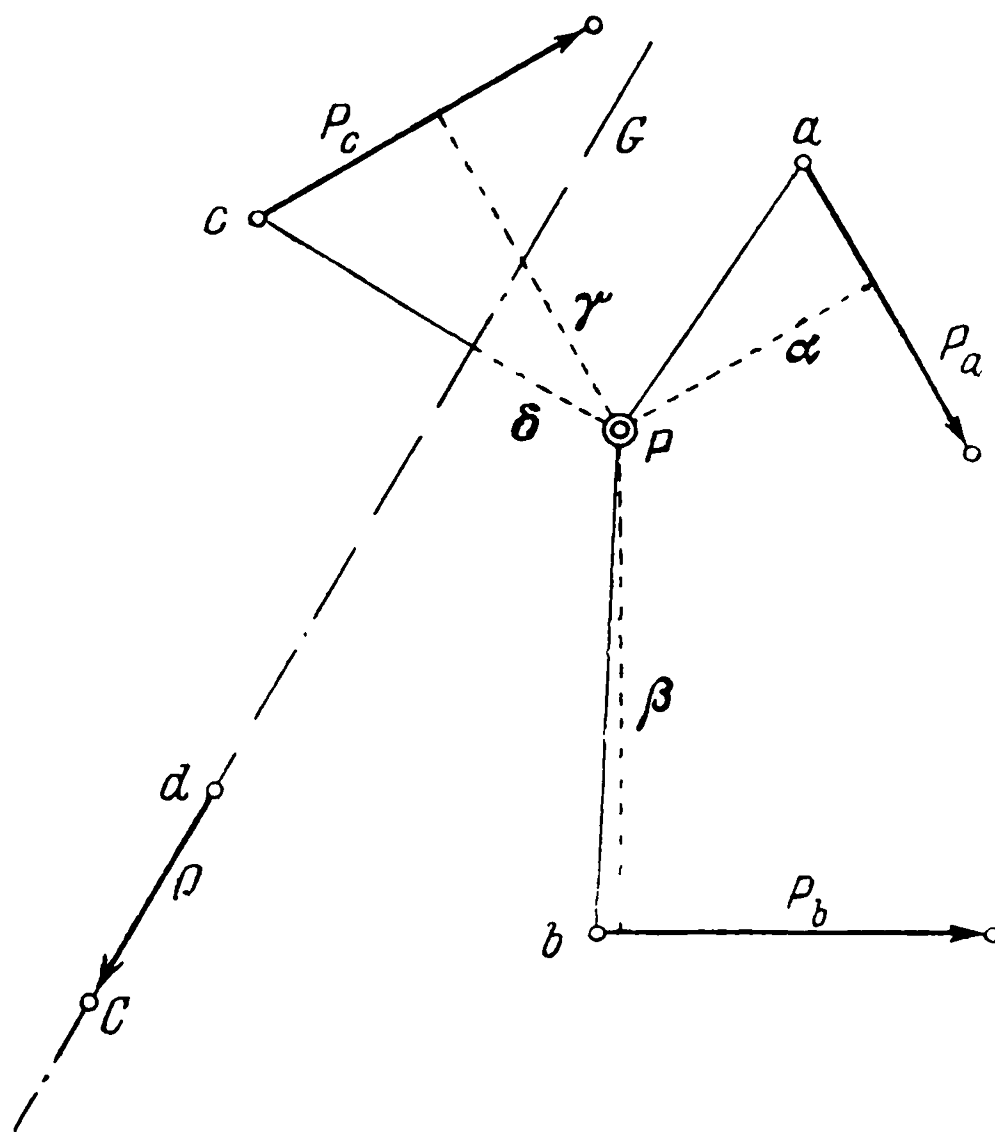
Под вспомогательным рычагом будем воображать пластинку, на которую нанесена картина скоростей в расположении Мора, закрепленную в полюсе последней и расположенную так, как мы эту картину в большинстве случаев чертили, т. е. так, чтобы радиусы-веторы изображающих точек были перпендикулярны к изображаемым ими скоростям изображаемых точек механизма, а изображающие прямые — параллельны изображаемым.

Если механизм находился под действием уравновешенной системы сил, то для него справедливо соотношение вида (1). Но величины скоростей изображаемых точек равны величинам r_i радиусов-векторов их изображений на вспомогательном рычаге. Если мы к каждой точке вспомогательного рычага приложим такую же силу, какая приложена в изображаемой точке механизма, то $\angle (P_i, v_i) = \angle (P_i r_i) \pm 90^\circ$, и потому закон виртуальных скоростей, написанный для случая меха-

низма, находящегося под действием n сил, после соответствующих замен, приведет к соотношению:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i r_i \sin(P_i, r_i) = 0,$$

т. е. окажется удовлетворенным условие равновесия вспомогательного рычага, в изображающих точках которого приложены силы, равные приложенным в соответствующих точках механизма. И обратно, если под действием некоторой системы сил окажется в равновесии вспомогательный рычаг, то, приложив такие же силы в изображаемых точках механизма, убедимся, что последний будет находиться в равновесии.



Фиг. 133.

Посмотрим теперь, как применить указанное свойство вспомогательного рычага к определению уравновешивающей системы сил, приложенных в точках механизма.

Конечно, такое определение может быть сделано с помощью уравнения моментов сил относительно неподвижной точки рычага. Допустим, что перед нами (фиг. 133) картина скоростей механизма, полюс которой P, причем векторы, изображающие скорости точек, повернуты на прямой угол. Если бы последнее условие не было выполнено, то, наоборот, пришлось

бы повернуть на прямой угол векторы сил *. Допустим, что в точках механизма, изображения которых будут a, b и c, приложены были соответственно силы P_a, P_b, P_c и требуется найти их уравновешивающую Q, приложенную в точке механизма, изображением которой служит d, и имеющую направление прямой G. Указанные три силы прилагаем в изображающих точках вспомогательного рычага и уравновешиваем их силой Q, направленной по прямой G. Отметив длину плеч всех четырех сил соответственно буквами α, β, γ, δ, определяем силу Q из уравнения моментов:

$$Q\delta + P_a\alpha - P_b\beta + P_c\gamma = 0.$$

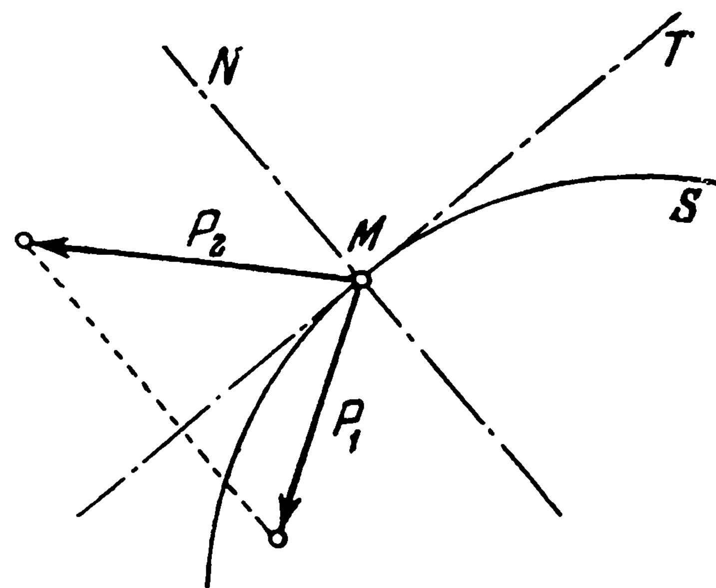
Момент силы Q получается с положительным знаком из предположения, что последняя вращает рычаг по часовой стрелке; поэтому отрицательное значение силы Q, определяемой из этого соотношения, показывает, что сила имеет обратное указанному направление. Это и будет, по величине и направлению, та сила Q, которую нужно приложить в точке механизма, изображением которой служит d.

Только что указанный способ приводит к вычислениям и, по существу, не представляет каких-либо выгод с ранее изложенным использованием картины скоростей для определения уравновешивающей. Здесь необходимо найти плечи сил, там — проекции сил на направления соответствующих скоростей. И здесь и там каждый член многочлена представляет собой произведение двух множителей. Таким образом, и чертежная работа и вычислительная вполне однородны в обоих случаях.

Беседуя со мною по поводу статьи проф. Н. Е. Жуковского, покойный проф. В. Л. Кирпичев высказался в том смысле, что идея вспомогательного рычага может быть с удобством использована для чисто графического решения задачи, если дан-

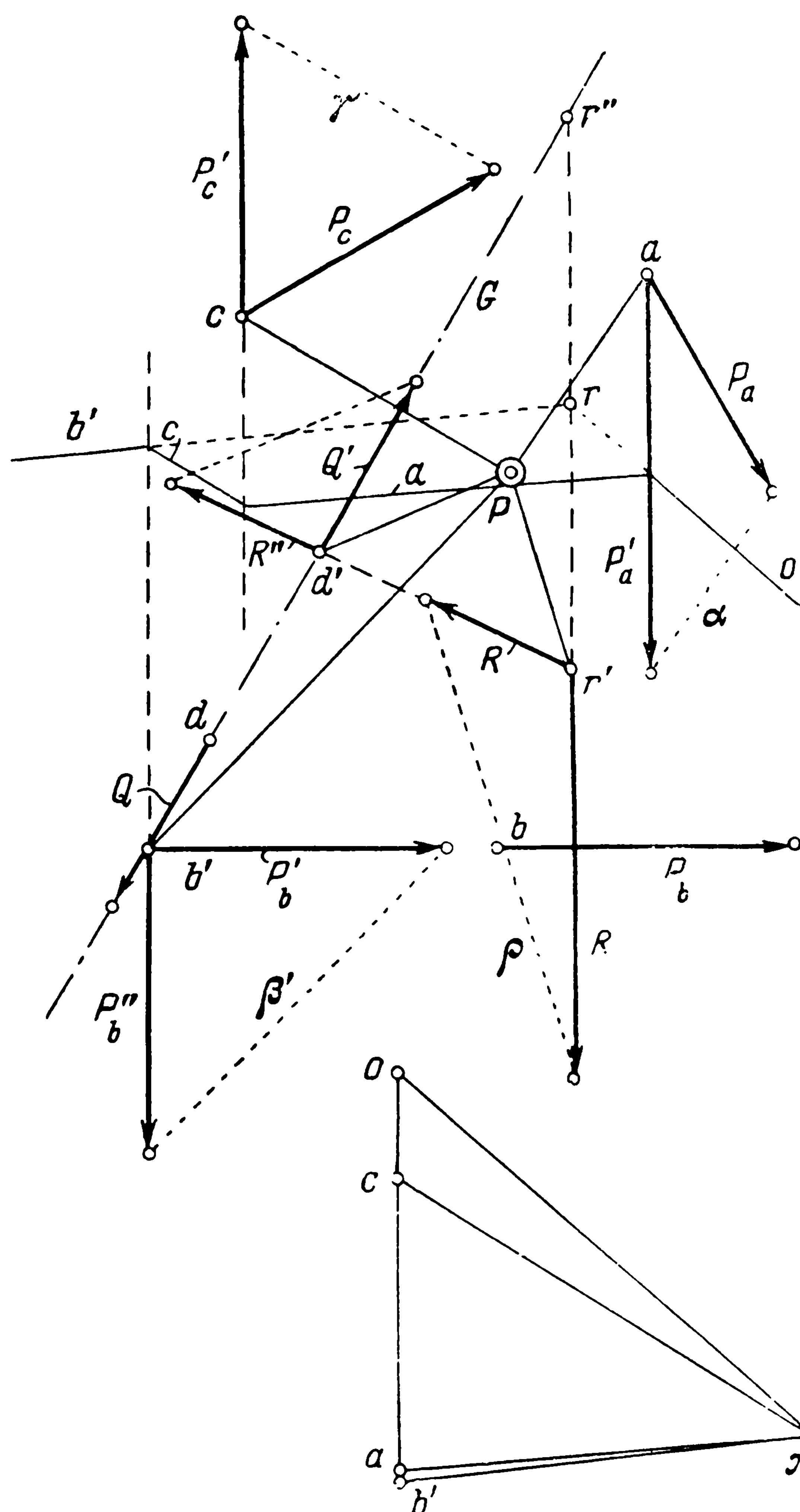
* Проще будет сказать, что силы во вспомогательном рычаге должны быть направлены по изображениям их прямых действия в механизме.

ную систему сил заменить системой сил параллельных. Детали этого приема мне так и остались неизвестными, но думается, что базироваться удобнее всего на повороте сил в рычаге около точек их приложения. Но можно было бы поворачивать также силу совместно с ее плечом, как жесткое целое, причем точка приложения перемещалась бы по окружности с центром в полюсе рычага. Мы опишем, как пользоваться первым приемом.



Фиг. 134.

Если S — траектория точки M некоторой системы с одной степенью свободы и T — касательная к траектории в этой точке (фиг. 134), то из закона виртуальных перемещений следует, что силы P_1 и P_2, приложенные в точке M и дающие одинаковые ортогональные проекции на направление касательной, эквивалентны между собою. Таким образом, в любой системе с одной степенью свободы *прямая, параллельная нормали к траектории в точке приложения силы и проведенная через конец вектора, изображающего последнюю, является геометрическим местом концов векторов, изображающих силы, эквивалентные данной и приложенные в той же точке.* Это положение позволяет в любой системе с одной степенью свободы заменить данную силу другой, имеющей ту же точку приложения, но иное направление. Очевидно, *что в случае плоского рычага концы векторов эквивалентных сил, имеющих общую точку приложения, будут лежать на прямой, параллельной радиусу-вектору точки их приложения.* Пользуясь возможностью, согласно сказанному, повернуть



Фиг. 135.

силу около точки приложения ее, составляющей особенность рычага и, кроме того, правилами о переносе и сложении сил в свободном твердом теле, можно найти уравновешивающую сил, приложенных к точкам рычага, следующим образом.

На фиг. 135 представлен тот же вспомогательный рычаг, о котором мы говорили выше (фиг. 133), находящийся под действием тех же сил. Через концы сил P_a и P_c проведены прямые α и γ, соответственно параллельные радиусам-векторам P_a и P_c их точек приложения, и указанные силы заменены силами, вертикальными P'_a и P'_c. Что касается силы P_b, то замена ее вертикальной силой, имеющей ту же точку приложения b, оказалась нецелесообразной, потому что плечо этой силы было бы весьма незначительно, а сама сила получилась бы огромной.

Чтобы избежать этого неудобства, сила P_b перенесена предварительно в точку b', лежащую на линии ее действия, в виде силы P'_b; через конец последней проведена прямая β', параллельная радиусу-вектору точки b', и с ее помощью определена сила P_b'', направленная вертикально и эквивалентная силам P'_b и P_b. Таким образом, система данных сил заменена системой сил параллельных; направление последних, конечно, может быть избираемо произвольно. Построен силовой многоугольник с полюсом π, в котором суммирование составляющих началось от точки O и слагаемые отложены в порядке P'_a, P'_c, P''_b, а концы силовых векторов обозначены теми же буквами, как их точки приложения в рычаге. Затем построен соответствующий указанному силовому веревочный многоугольник, лучи которого обозначены буквами, одноименными с теми, которыми обозначены точки, на которые опираются лучи силового многоугольника. Крайние лучи O и b' силового многоугольника пересекаются в точке r, проходящая через которую вертикаль является линией действия равнодействующей R.

Теоретически проще всего представить себе эту равнодействующую приложенной к точке пересечения r'' этой прямой с данной прямой G, проходящей через точку d. Здесь оставалось бы только повернуть найденную равнодействующую до совпадения с направлением прямой G и в точке d приложить равную ей, но имеющую обратное направление силу. Практически такое решение задачи не представится всегда удобным, обладая чрезмерно большой жесткостью в том смысле, что не дает возможности обойти мало точные построения. Если указанный кратчайший путь окажется неудобным, то можно действовать так, как на самом деле произведено построение на фиг. 135. Представляем себе равнодействующую R приложенной в какой угодно точке r' прямой ее действия, поворачиваем ее на какой угодно угол, заменяя силой R'. Последнюю * уже переносим по прямой ее действия в точку d' прямой

* На чертеже вместо R' тоже стоит R.

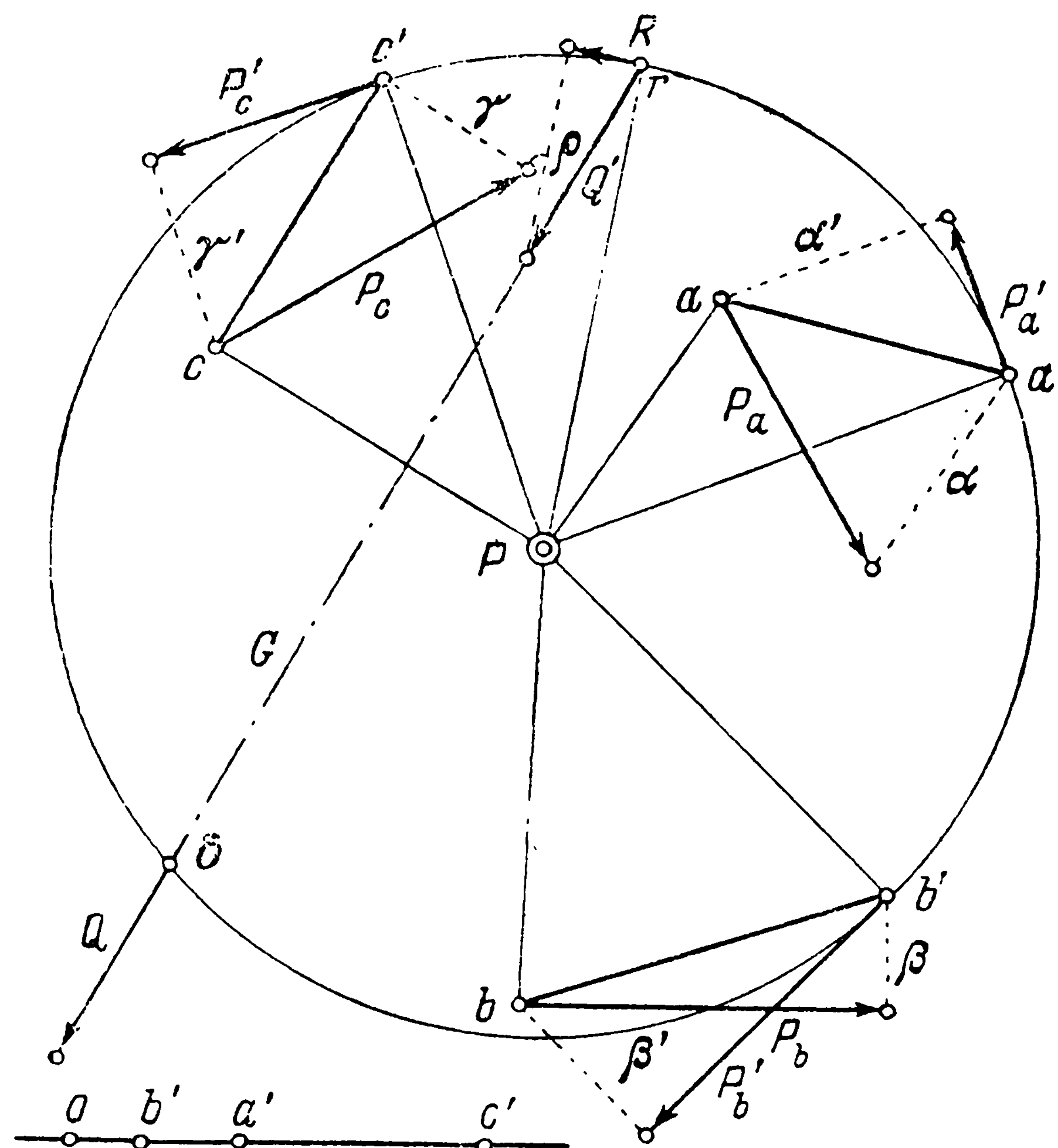
G в виде силы R'', которую можно заменить эквивалентной силой Q', приложенной в той же точке и направленной по прямой G. Искомая сила Q равна по величине и противоположна по направлению силе Q'.

Указанный только что прием, очевидно, упростится, если данную систему сил не будем вовсе заменять системой сил параллельных. Ведь с помощью силового и веревочного многоугольников можно отыскать непосредственно равнодействующую данной системы сил, хотя бы и непараллельных между собою, после чего с найденной равнодействующей можно манипулировать так, как с равнодействующей сил параллельных. Если замена данной системы сил системой сил параллельных оправдана, то с точки зрения удобства расположения чертежа она позволяет в значительно большей степени предугадать расположение веревочного многоугольника и сделать удачный выбор полюса силового и порядка сложения составляющих, чем в случае сил, как угодно расположенных в плоскости. Возможно, однако, что проф. В. Л. Кирпичев имел в виду и какой-либо прием, существенно отличный от изложенного здесь, в котором введение системы параллельных сил дает большие преимущества *.

С своей стороны предлагаю следующий простой прием, позволяющий вовсе обойтись без веревочного многоугольника, причем, однако, каждую силу приходится повернуть дважды около каждого из ее концов (фиг. 136). Из полюса P вспомогательного рычага проводим окружность произвольного радиуса, через конец же сил P_a, P_b, P_c — прямые α, β, γ, соответственно параллельные радиусам-векторам точек приложения

* Ко времени отпечатания настоящей работы вышло третье (посмертное) издание «Графической статики» проф. В. Л. Кирпичева, где в § 257 изложены соображения ее автора, касающиеся теории вспомогательного рычага. Замена данной системы сил системой сил параллельных совершается с помощью поворота как силы, так и плеча каждой повернутой силы. Метод приводящей окружности, в особенности с упрощением, устраняющим двойной поворот сил, даст результат быстрее.

a, b, c этих сил до пересечения с окружностью * в точках a', b', c'. Отрезки aa', bb', cc' изображают силы, эквивалентные данным, а будучи взяты с обратным знаком, т. е. считая за точку приложения точки a', b', c', образуют систему сил, уравновешивающую данную. Через лежащие на окружности точки



Фиг. 136.

a', b', c' проводим радиусы и касательные к окружности и поворачиваем силы $a'a$, $b'b$, $c'c$ около этих точек приложения до совпадения с направлением касательной. Для этого нужно только через точки a, b, c провести прямые α', β', γ', соответственно

* Означенную окружность будем называть приводящей окружностью так как она позволяет все силы привести к одному плечу. Так как радиус ее произволен, то всегда можно выбрать приводящую окружность достаточно большого радиуса, чтобы она пересекалась с перечисленными выше прямыми.

параллельные радиусам Pa' $P\text{в}'$ Pc' до пересечения с касательными. Силы P'_a, P'_b, P'_c обладают плечами равной длины и потому равнодействующая их, приложенная на том же плече, равна их алгебраической сумме. Сложение сил произведено внизу чертежа, начиная от точки O в порядке P'_a, P'_b, P'_c, причем концы силовых векторов обозначены теми же буквами, как точки их приложения в рычаге. Результирующий вектор Ob' прилагаем в виде силы R, касательной к окружности в точке пересечения r последней с прямой G, и поворачиваем ее около этой точки до совпадения с направлением прямой G в виде силы Q', по величине и направлению равной искомой силе Q.

Здесь описан кратчайший путь решения задачи двойным поворотом сил, который не всегда может оказаться удобным. Обходные построения будут состоять в том, чтобы перенести некоторые из данных сил по прямым их действия, а затем уже совершить двойной поворот. Равным образом нет надобности силу R прилагать в точке пересечения прямой G с окружностью; можно ее приложить в любой другой точке окружности, повернуть на любой угол и затем уже перенести в точку прямой G, как это было показано на фиг. 135 для силы R.

Относительно выбора радиуса круга следует заметить, что целесообразно брать его приблизительно равным расстоянию прямой G от полюса рычага. Благодаря тому, что радиус этого круга на фиг. 136 взят значительно больше, сила R вышла значительно меньше Q'. Сила R определена, конечно, с некоторой ошибкой; эта ошибка в увеличенном значении войдет в величину силы Q'.

Кроме того, легко еще упростить построение, заменив двойной поворот сил простым; применение этого приема станет даже необходимым, если окружность, в силу упомянутых соображений, будет выбрана радиуса столь малого, что прямые α, β, γ с ней не пересекутся. С этой целью отметим, что каждой прямой действия некоторой силы, приложенной в точке механизма, соответствует параллельная ей и проходящая через изображающую точку линия действия силы, приложенной в

изображающей точке. Следовательно, нет надобности во вспомогательном рычаге прилагать силы именно в изображающих точках, а можно приложить их в любой точке прямых их действия.

Поэтому наносим на чертеж вспомогательного рычага не силы, а сначала их линии действия. Если такая прямая пересекает нанесенную на чертеж нашу окружность произвольного радиуса, то точку приложения силы выбираем на этой окружности, а силу поворачиваем около этой точки до совпадения с касательной к окружности. Если прямая окружности не пересекает, то точку приложения силы выбираем на прямой действия в точке, достаточно удаленной от окружности, чтобы точно определилось направление касательной, проведенной из этой точки к окружности, и поворачиваем силу около точки ее приложения до совпадения с направлением указанной касательной. Хотя точка приложения и не будет лежать на окружности, но мысленно мы себе представим, что она, после совершившегося поворота силы, перенесена по касательной на окружность. Построение, выполненное последним способом, мы найдем ниже, на фиг. 145.

Так или иначе, но определение уравновешивающей, а, следовательно, и равнодействующей системы сил, приложенных в точках механизма, по заданной точке приложения и прямой действия может быть выполнено. Но следует помнить, что решение задачи возможно только для тех механизмов, для которых мы умеем построить картину скоростей. Предыдущая глава показала нам, как последняя задача решается для всех механизмов первых трех классов и для многих — четвертого. Та же задача с помощью мгновенных центров может быть решена только для механизмов второго и третьего порядков первого класса, т. е. содержащих только двухповодковую и трехповодковую группы. Уже для кулисы Гейзингера, в которой имеется четырехповодковая группа, неизвестен прием построения мгновенных центров, если, конечно, не воспользоваться для этого картиной скоростей. Ввиду того, что решение вопроса о равно-

весии механизмов с помощью картины скоростей представляет гораздо большие удобства, чем с помощью мгновенных центров, мы нашли возможным вовсе не разрабатывать приемов построения последних для механизмов, где они еще неизвестны.

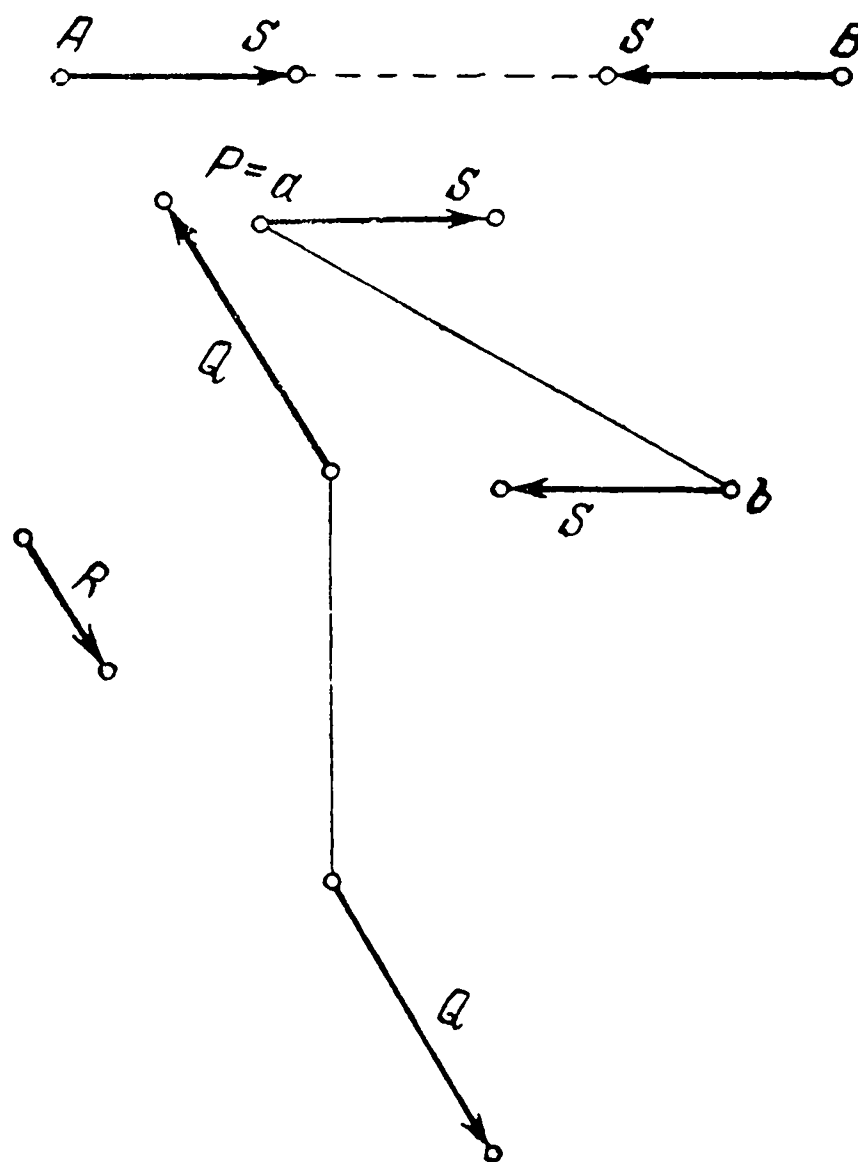
Мы позволим себе сделать важное в дальнейших своих применениях отступление от прямой нашей задачи — исследование обстоятельств равновесия механизмов, — чтобы показать, как идея вспомогательного рычага может быть применена для нахождения напряжений стержней ферм, если ее сочетать с известным «кинематическим методом», создателем которой является также Мор.

Говоря о статье Таубелеса, мы привстствовали введение нового термина — степени изменяемости цепи. До сих пор под кинематической цепью разумелась всегда цепь одной только степени изменяемости, которая, будучи поставлена на одно звено, дает начало механизму. Если ввести в терминологию степень изменяемости, то можно обобщить термин кинематической цепи и говорить о кинематических цепях разных степеней изменяемости. С этой точки зрения различие между фермой и механизмом только в степени изменяемости, лежащей в основе их кинематической цепи. То, что называют обычно свободной фермой, представляет собой кинематическую цепь с нулевой или отрицательной степенью изменяемости, смотря по тому, образуется ли при неподвижном укреплении одного звена такой цепи ферма, статически определимая или статически неопределимая. Мы будем говорить лишь о фермах статически определимых, и потому достаточно будет указывать, что лежащая в основе их цепь неизменяема.

Кинематический метод обращает эту неизменяемую кинематическую цепь в изменяемую с одной степенью свободы выбрасыванием стержня, напряжение которого является искомым. Допускаем, что AB (фиг. 137) — стержень неизменяемой кинематической цепи, находящейся в равновесии под действием некоторой системы сил P_1, P_2, P_3, ..., P_n, приложенных в шарнирных точках цепи, которую представляем себе состоящей

только из двухшарнирных стержней. Равновесие должно сохраниться, если, выбросив стержень AB, в шарнирных точках A и B приложим направленные по оси выброшенного стержня равные и противоположно направленные силы S, равные его напряжению.

Но, выбрасывая стержень, мы образовали из цепи неизменяемой цепь с одной степенью изменяемости, и силы S должны быть подобраны в соответствии с законами равновесия последней. В цепи с одной степенью изменяемости можно задаться произвольно положениями, а потому и скоростями двух ее точек, расстояние между которыми изменяемо. Если только стержень AB не является избыточным, что противоречит предположению относительно свойств данной неизменяемой цепи, то такими точками являются A и B. Это значит, что в картине скоростей мы можем произвольно задаться полюсом и положением изображений этих точек. При этом, благодаря одной только степени изменяемости цепи, расположение точек картины скоростей не будет зависеть от положения полюса, а только от расположения изображающих точек a и b; поэтому полюс можно нанести и позднее, когда картина будет построена.



Фиг. 137.

Такой произвол в нанесении изображающих точек отражает в себе то обстоятельство, что кинематическая цепь с одной степенью изменяемости представляет собой систему с четырьмя степенями свободы. Очевидно, что закон виртуальных пере-

мещений не только для системы с одной степенью свободы, но и для систем с большим числом степеней свободы приводит к заключению, что вспомогательный рычаг будет находиться в равновесии под действием сил, приложенных указанным образом в изображающих точках. Разница будет состоять лишь в том, что для системы с одной степенью свободы можно построить только один вспомогательный рычаг, если считать подобные между собой картины скоростей тождественными, благодаря возможности соответственным образом изменить масштаб чертежа. Для систем же с большим числом степеней свободы их может быть построено несколько различных, и все различные вспомогательные рычаги должны находиться в равновесии под действием сил, приложенных указанным образом. Таким образом, условия равновесия систем с несколькими степенями свободы могли бы быть выведены, если пользоваться несколькими различными вспомогательными рычагами.

В рассматриваемом нами случае достаточно, однако, какого-нибудь вспомогательного рычага для цепи с одной степенью изменяемости, чтобы определить искомое усилие в стержне неизменяемой системы. Единственным ограничением является, чтобы изображающий отрезок ab (см. фиг. 137) не был избран параллельным изображаемому отрезку AB, так как тогда картина скоростей обнаруживала бы, что длина последнего при движении изменяемой цепи не меняется и сумма виртуальных работ сил S обратилась бы в ноль, поэтому члены, содержащие эти силы, исчезли бы из выражения виртуальных работ.

Картина скоростей, как мы уже заметили, может быть построена без нанесения на чертеж полюса, положение которого служит лишь для определения абсолютных скоростей точек. Нет особой надобности в нем и для того, чтобы решить до конца поставленную задачу. Дело в том, что геометрическая сумма сил P_1, P_2, P_3, ..., P_n, приложенных в разных точках вспомогательного рычага, равна нолю, потому что под действием этих же сил неизменяемая система находится в равновесии. Сложив

поэтому все эти силы по способу веревочного многоугольника, мы придем к паре сил. Эта пара должна уравновешиваться другой парой сил s, приложенных в точках a и b, направление которых известно и определяется отрезком AB. Плечо последней пары не будет равно нолю, если только отрезок ab не параллелен отрезку AB; в противном же случае плечо первой пары тоже обратится в ноль, и решение задачи становится неопределенным. Очевидно, что так как рычаг находится под действием двух пар сил, то величина момента искомой пары не зависит от положения его неподвижной точки, и простой расчет позволит определить силы второй пары.

Если желательно довести до конца задачу чисто графическим путем, то можно нанести полюс вспомогательного рычага совершенно произвольно. Если силы найденной способом веревочного многоугольника пары назовем Q, то плечо каждой из пар переносим таким образом, чтобы одна из сил каждой пары проходила через полюс рычага; после этого остается только вторая из сил Q, которую остается уравновесить второй из сил S по законам рычага.

Но если уж наносить полюс, то проще притти к цели без помощи веревочного многоугольника, методом фиг. 136, причем целесообразно полюс выбрать в одной из точек a или b; этот метод заменит совокупность сил P_1, P_2, ..., P_n одной равнодействующей R (в рычаге действие пары может быть заменено действием силы), момент которой относительно полюса рычага будет равен моменту прежней пары сил Q. Последняя, равно как и сила R, показаны на фиг. 137, где полюс совмещен с точкой a. Силы s не определяются, так как метод их определения известен из предыдущих чертежей.

Кинематический метод определения напряжений может быть также применен, если имеется картина скоростей, построенная в расположении Бурместера. И там решение задачи приводится к равенству нолю суммы моментов сил, приложенных в изображаемых точках, но момент каждой силы берется относительно изображающей точки и потому нет общего центра

моментов. Поэтому сложения сил по законам статики неизменяемой системы или рычага произвести нельзя, проще всего определить напряжения из уравнений, составленных относительно указанных центров моментов сил.

Ниже мы увидим, насколько решенная здесь задача близко связана с вопросами статики механизмов. Вообще изучение свойств кинематических цепей с одной степенью изменяемости и неизменяемых настолько тесно связано, что остается только удивляться, что учебники так резко разделяют эти дисциплины. Невозможно в полноте изучить одну из них, не зная в совершенстве другую, но странно излагать дважды самостоятельно вопросы, которые являются общими в обеих дисциплинах.

Переходим к другой задаче статики механизмов, решение которой необходимо, чтобы можно было приступить к определению прочных размеров их частей. Заметим, что вопрос о прочности каждого звена в отдельности решается методами теорий сопротивления материалов и упругости, причем вопрос о напряжении материала в различных точках звена не может быть решен, если неизвестны его конструктивные формы. Мы же трактуем только вопросы, в которых конструктивные формы безразличны. Если это так, то задача наша будет состоять не в определении внутренних напряжений в звене, а только внешних сил, под действием которых звено находится. Часть этих внешних сил известна, если даны силы, под действием которых механизм находится в равновесии. Но, кроме этих данных сил, на звено действуют соседние с ним звенья. Определением этих сил взаимодействия мы и предполагаем заняться. Так как звенья механизма связаны между собой, по предположению, низшими парами, то мы должны решать задачу о давлениях в шарнирах и ползушках механизма. Решение этой задачи должно иметь еще применение в вопросе об изнашиваемости частей механизма.

Равным образом при решении вопроса о равновесии механизма под действием данной системы сил и сил трения определение давлений между кинематическими парами является су-

щественной частью решения задачи. Обычно здесь приходится прибегать к методу последовательных приближений, т. е. сначала определить эти давления, не принимая во внимание сил трения, определить последние с помощью этих приближенно найденных сил взаимодействия, затем, в случае требования большей точности, что, однако, в практических случаях не понадобится, вновь пересчитать силы взаимодействия, учтя приближенные силы трения и т. д.

Мы не будем вовсе говорить здесь об аналитическом решении задачи об определении силы взаимодействия между звеньями, которое сводится к составлению системы линейных уравнений, число неизвестных в которых обычно весьма велико.

Что касается графических методов решения задачи, то опыт в этом направлении сделан Мором, к идеям которого всецело присоединяется и Виттенбауер *. Прием Мора состоит в следующем.

Какая бы система сил ни действовала на звено механизма, она в случае плоского механизма приведется, по закону сложения сил в теле неизменяемом, либо к одной равнодействующей, либо к паре сил. Силы взаимодействия между звеньями механизма не изменятся, если эту систему сил заменить их равнодействующей силой или парой, приложенными в точках все того же звена. Так как каждое звено обладает не менее, чем двумя шарнирами (случай пар скольжения Мор не разбирает), то можно равнодействующую как пару, так и силу, опять-таки не изменяя сил взаимодействия между звеньями, заменить двумя силами, приложенными в двух из шарнирных точек данного звена. При этом, однако, следует помнить, что эти две силы не переносятся в шарнирной точке на другое звено или на шарнирный болт, а остаются все на том же звене, так как в противном случае изменились бы силы взаимодействия между звеньями. После этого твердые звенья, в которых имеется больше двух шарниров, заменяют фермочками, составленными из двухшарнирных стержней. Таким образом, данный механизм ока-

* Zeitschr. f. Math. u. Physik, B. 53.

жется подмененным другим, в котором все звенья — двухшарнирные, и давления на каждый из его стержней направлены по оси последнего.

Определяем теперь силы взаимодействия между частями подмененного механизма. Сначала вырезаем какой-нибудь узел и замечаем, что в равновесии между собой должны находиться внешние силы, приложенные в шарнирной точке узла, и напряжения в стержнях, направленные по осям последних. Если удастся найти такую последовательность построений, что в каждом узле будут только иметься по два неизвестных напряжения, то все напряжения определятся из многоугольников равновесия узлов. Что такая последовательность построений далеко не всегда может быть найдена, достаточно известно для случая решения той же задачи в жестких кинематических цепях или фермах. Допустив, однако, что удалось найти такую последовательность и определить напряжения в стержнях, не следует думать, что эти напряжения тождественны искомым давлениям в шарнирных точках, как это обычно говорится в теории ферм.

Дело в том, что там воображают себе, что все силы приложены к шарнирному болту, представляющему собой как бы самостоятельное тело; у нас же силы хотя и приложены в шарнирных точках, но к различным звеньям. Поэтому напряжение в стержне уравновешивает не одно только давление шарнирного болта на серьгу, но геометрическую сумму этого давления и той силы, которая приложена в шарнирной точке и относится к рассматриваемому звену.

Итак, нолю должна равняться геометрическая сумма трех сил давления на серьгу, напряжения в стержне и силы, приложенной к данному звену в шарнирной точке. Следует еще отметить, что в механизме шарнирный болт не представляет собой самостоятельного тела, так как он бывает закреплен неподвижно в одном из сходящихся в шарнире звеньев; поэтому давление на шарнирный болт есть геометрическая сумма давлений отдельных серег.

Но после этого нужно еще перейти от давлений в шарнирах механизма, состоящего из двухшарнирных стержней, к силам взаимодействия в действительном механизме, который не состоит из таких стержней. Если в каком-нибудь шарнире сошлось несколько стержней фермы, заменяющей данное жесткое звено, то давление на серьгу или болт этого звена будет равен геометрической сумме давлений на серьги или болт указанных стержней.

Таковы основания, с помощью которых Мор рекомендует определять давления в шарнирах механизма. Применение иллюстрируется одним примером механизма, составленного из кривошипа и двух двухповодковых групп. О том, когда указанный прием приведет к желаемому результату и когда нет, ничего не говорится, так что читатель может вынести впечатление, что метод универсален.

Мы приступим к изучению вопроса, уже вооруженные определенными сведениями о возможной структуре механизма. При этом задача, очевидно, сведется к изучению вопроса о давлениях между звеньями, а также звеньями и поводками нормальных цепей, пристегнутых к неизменяемой основе и нагруженных силами. Если механизм образовался из простого кривошипа наслоением нормальных цепей в определенном порядке, то надо начать с последней цепи. Предполагая, что механизм находится в равновесии, мы скажем, что силы взаимодействия отдельных частей это цепи между собой будут те же, какие были бы, если бы точки, которыми поводки пристегнуты к остальной части механизма, принадлежали неизменяемому и неподвижному устою, а давления поводков на точки их прикрепления — другим нормальным цепям, входящим в состав механизма, как давления их, в том же случае, на устой, допуская, конечно, что конфигурация цепи и приложенных сил в обоих случаях одна и та же. Это следует из того, что точки, в которых свободные концы поводков пристегиваются к остальной части механизма, в силу равновесия неподвижны, и равновесие системы не будет нарушено наложением новых, совме-

стных с прежними связей, т. е. допущением, что эти точки накрепко соединены будут с устоем.

Определивши давления поводков последней группы на звенья оставшейся части механизма, можно отбросить последнюю из нормальных цепей и перейти к рассмотрению равновесия следующей с конца цепи под действием сил данных и найденных давлений поводков отброшенной цепи. Рассмотрев таким образом одну нормальную цепь за другой, дойдем, наконец, до кривошипа. Здесь уже все силы будут известны и проверкой всех действий должно служить выполнение условий равновесия кривошипа, т. е. плоского рычага. Роль кривошипа может играть и простая ползушка, что не осложнит проверки.

Если нам удастся, таким образом, решить вопрос о равновесии определенных классов механизмов, то этим же будет решен и вопрос об определении напряжений в стержнях соответствующих им ферм. Ведь с нашей точки зрения ферма отличается от механизма лишь тем, что последний состоит из устоя, кривошипа и наслоения нормальных цепей, а в ферме кривошип опущен. Но фермы представляют и ряд особенностей. В то время как в механизмах редко встречаются шарниры, в которых сходится три звена, в фермах сплошь и рядом в одном шарнире сходится большое число звеньев. Наиболее обычные типы ферм устраиваются из двухшарнирных стержней и, разбирая их по нашему способу, приходится рассматривать шарнир в данном звене как результат слияния многих шарниров.

Все это создает специальные условия, и было бы совершенно нецелесообразно применять указываемые здесь способы ко всякой ферме. В большинстве случаев специально выработанные для ферм приемы для весьма сложных ферм, в частности, остроумный метод Геннеберга, окажутся более целесообразными. Если большинство ферм станем разбивать на устой и ряд нормальных цепей, то структура их окажется крайне сложной, если только ферма не состоит из ряда двухповодковых групп. В то же время спецальные приемы позволяют справиться с задачей о нахождении напряжений стержней таких ферм срав-

нительно просто, благодаря указанным выше слияниям шарниров.

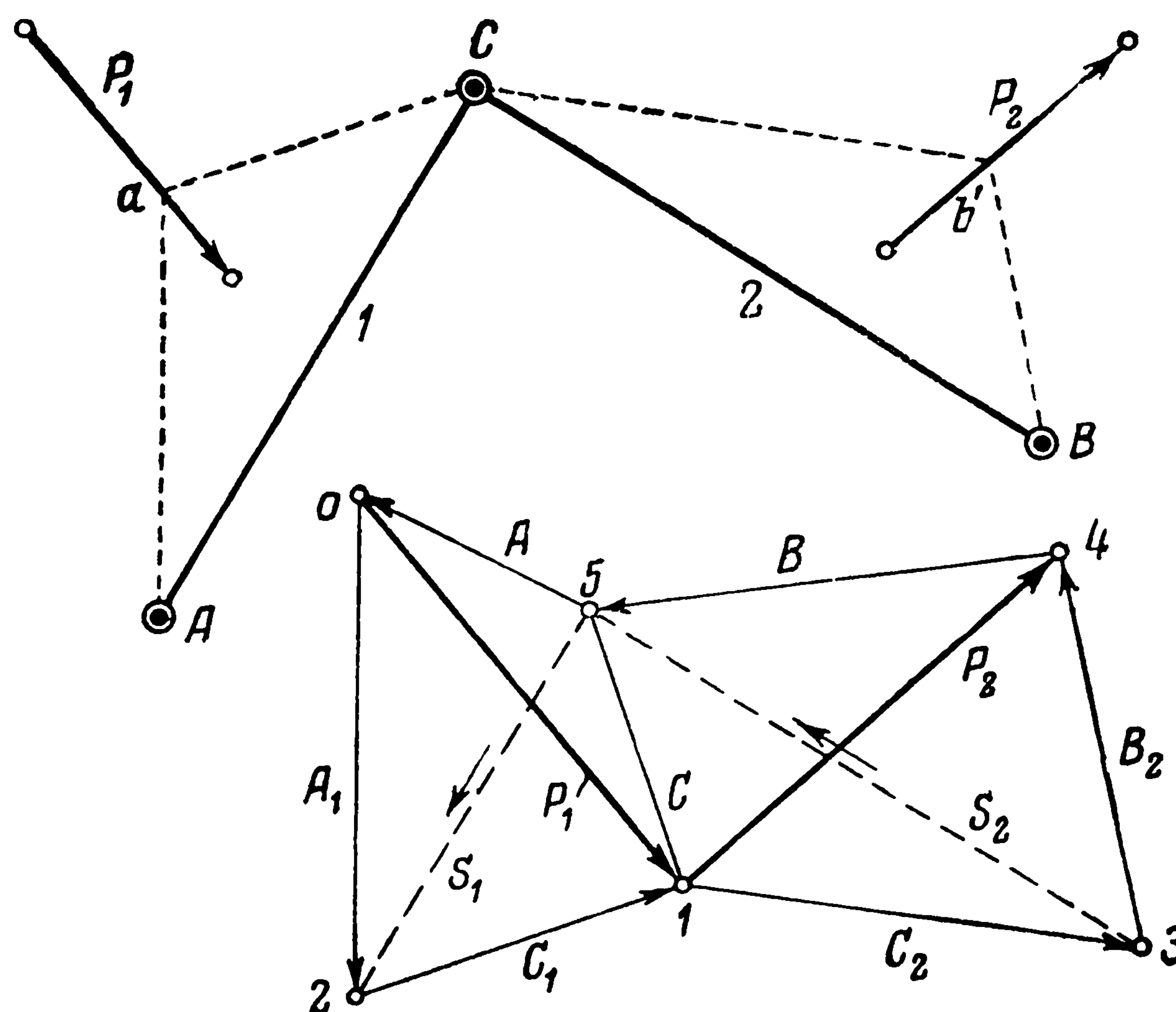
Но существуют типы ферм, которые стоит рассматривать, как соединения ряда нормальных цепей с устоем. Сюда относятся фермы, которые можно назвать составными в том смысле, что они составлены не из двухшарнирных стержней, а из отдельных фермочек, причем соединение их между собой таково, что часть таких фермочек является звеньями многошарнирными. Здесь было бы сложнее разложить всю ферму на совокупность двухшарнирных стержней, пользуясь тем, что отдельные фермочки составлены из таких стержней, чем рассматривать каждую такую фермочку, как самостоятельное твердое звено, определить давления на него остальных звеньев и затем уже иметь дело с определением напряжений стержней такой отдельной фермочки. Структура же таких составных ферм, с нашей точки зрения, бывает обычно весьма проста.

Мы начнем, конечно, с случая двухповодковой группы, причем будем сначала решать задачу, придерживаясь изложенных выше идей Мора, заметив, однако, что этой группе, в отдельности взятой, Мор не уделил внимания, говоря об определении давлений в шарнирах механизма. Впрочем, задача эта трактуется самостоятельно в курсах графической статики, составляя содержание отдела, посвященного рассмотрению статических свойств трехшарнирной арки, где мы находим и иные приемы решения *.

Итак допустим (фиг. 138), что A, B и C будут три шарнира двухповодковой группы; поводки ее, форма которых безразлична, будут *1* и *2*. Равнодействующие сил, приложенных соответственно к каждому из них, — P_1 и P_2. На прямых действия этих сил выбираем произвольно точки a и b; первую из них соединяем с точками A и C, вторую с точками B и C. Представляя себе точки приложения обеих указанных сил перенесенными соответственно в точки a и b, разлагаем силу P_1 на

* В. Л. Кирпичев. Основания графической статики, 1908 г., § 34 и § 66.

две силы по направлениям aC и aA, которые переносим в соответственные шарнирные точки, оставляя их на звене *1*. Силу P_2 разлагаем по направлениям bB и bC, и ее составляющие тоже переносим в шарнирные точки, оставляя их на звене *2*. Разложение сил произведено ниже на той же фиг. 138. Сила P_1 отложена в виде отрезка $\overline{01}$, сила P_2 — в виде отрезка $\overline{14}$. Что



Фиг. 138.

касается составляющих этих сил, приложенных в шарнирных точках, то будем обозначать их теми же буквами, которыми обозначены шарниры, с присоединением индекса нумерного, характеризующего звено механизма, к которому сила приложена. Давления в шарнире будем также обозначать теми же буквами, как и название шарнира, но уже без индекса. Поэтому составляющие силы P_1 названы A_1 и C_1, силы P_2 — C_2 и B_2.

Разложение на составляющие должно быть произведено таким образом, чтобы в диаграмме силы C_1 и C_2, приложенные в одной и той же шарнирной точке, были отложены как две смежные составляющие геометрической суммы. Под действием

сил A_1, C_1, C_2, B_2 в поводках могут развиться только напряжения, направленные, соответственно, по прямым AC и BC. Поэтому отрезанный узел C должен находиться в равновесии под действием сил C_1, C_2 и напряжений S_1 и S_2 поводков, представляющих собой не что иное, как равнодействующие всех сил, приложенных к последним в точках A и B. Многоугольник равновесия узла C будет *21352*.

Представим себе на стержне *1* серьгу. Вынув шарнирный болт, принадлежащий стержню *2*, и отделив серьгу от своего стержня, найдем, что силы S_1 и C_1 должны уравновеситься давлением C шарнирного болта на серьгу; точно так же давление серьги на болт будет уравновешивать совокупность сил C_2 и S_2. Таким образом, давление в шарнире C изображается общей стороной треугольников равновесия *5215* и *1351*. В точке B в равновесии должны находиться три силы S_2, B_2 и B, причем сила S_2 должна быть взята со знаком, обратным помеченному на чертеже и относящемуся к равновесию узла C; знак давления B взят так, чтобы он соответствовал давлению точки опоры на стержень.

Вполне аналогично равна нолю геометрическая сумма сил A, A_1 и S_1, причем последнюю нужно брать со знаком, обратным тому, который она имеет в многоугольнике равновесия узла C.

Считая двухповодковую группу составной частью механизма и определив давления в шарнирах ее, мы можем ее отбросить, введя только давления поводков на звенья механизма в точках A и B, со знаками, обратными только что указанным. Вот почему важно знаки этих давленнй определить правильно, между тем как в шарнире C знак давления нас может менее интересовать.

Если бы к поводку, скажем *2*, вместо силы была приложена пара сил, то задача привелась бы к предыдущей либо приведением пары к плечу CB и совмещением этого плеча с последним отрезком, или проще; без изменения плеча пары — совмещением одной из сил пары с точкой B и разложением другой на две силы, проходящие через C и B. Сила B_2 составилась бы

тогда как геометрическая сумма двух сил, из которых одна будет одной силой пары, а вторая — составляющей второй ее силы.

Применяя наши рассуждения к целому механизму, составленному из двухповодковых групп, начнем с самой удаленной от кривошипа группы; в ней силы P_1 и P_2 будут равнодействующими системы данных сил, приложенных к поводкам. Отбросив, по нахождении давлений в A и B, эту группу и введя взамен давления A и B на поводки следующих за ней по направлению к кривошипу групп, мы в последних должны будем искать равнодействующую давления A и данных сил, приложенных к тому же поводку, равным образом давления B и данных сил, приложенных к некоторому другому поводку, в котором располагается точка B. Эти равнодействующие могут быть пристроены как геометрические суммы к нашей диаграмме сил (см. фиг. 138).

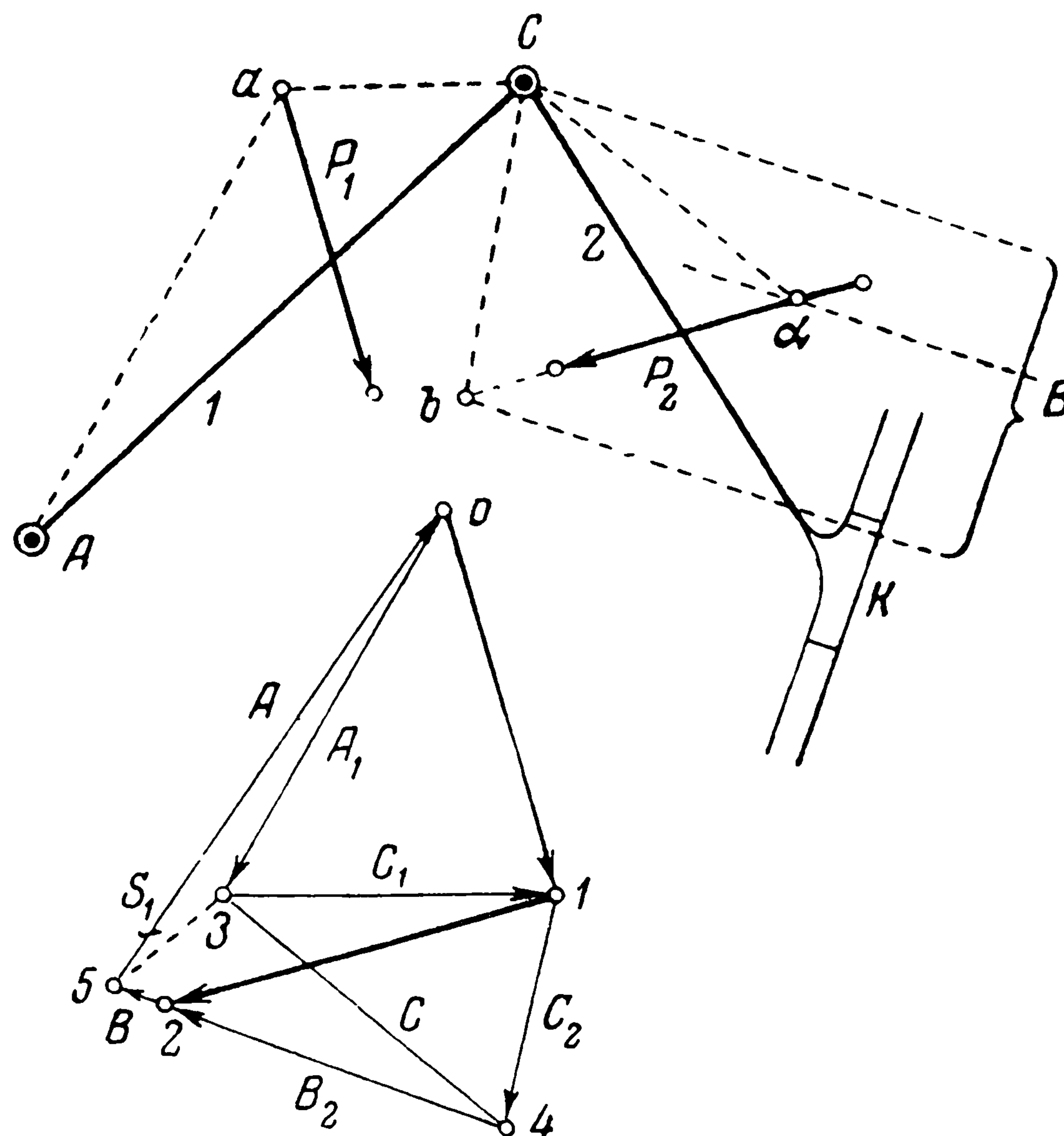
Если точки A и B принадлежат поводкам двух разных, следующих за рассмотренной двухповодковых групп, то очевидно, что диаграмма распределения в них сил может быть пристроена в диаграмме предыдущей группы, раз только приведены в известность силы, под действием которых находятся их поводки. Если же они принадлежат одной и той же группе, то это тоже может быть сделано, если только пользоваться силами A и B при построении геометрической суммы сил, действующих на каждый из этих поводков, так, чтобы равнодействующие этих двух сумм были расположены, как две смежные составляющие геометрической суммы, как это было с нашими силами P_1 и P_2. Отсюда следует, что *в механизмах, образованных последовательным наслоением двухповодковых групп*, т. е. таких, в которых последние могут быть отброшены только в одном совершенно определенном порядке, *диаграмма распределения сил, давлений и напряжений может быть построена как одно связное целое*, подобно тому, как строятся диаграммы напряжения стержней ферм.

Последнее положение у Мора обнаруживается только на проделанном примере, доказательства же его нет. Будет ли дело обстоять так же в механизмах, в которых встречаются несколько групп, присоединенных независимо одна от другой (можно сказать: параллельно), остается еще под вопросом. Впрочем, если не пользоваться тем особым соответствием между картиной распределения стержней и сил в механизме, с одной стороны, и точек и линий силовой диаграммы — с другой, которое в теории ферм основывается на свойствах взаимных многогранников Максвелла, то при большей сложности диаграмм, которую вносят шарнирные давления, о которых в теории ферм не приходится говорить вовсе, чтение сплошной, непрерывной диаграммы становится довольно затруднительным, и потому, быть может, лучше довольствоваться врозь построенными диаграммами каждой двухповодковой группы в отдельности.

Не следует забывать, что найденные в диаграмме напряжения в стержнях не будут истинными. Так, например, истинное распределение напряжений в звене *2* можно получить, только если знать распределение в нем материала и приложить к нему три силы P_1, B и C, но при этом переносить их точки приложения нельзя, и направление последней из них не будет уже безразличным.

Посмотрим, как видоизменится изложенный прием в случае замены одного из шарниров парой скольжения. На фиг. 139 шарнир B заменен прямолинейной парой скольжения, что геометрически равносильно удалению его в бесконечность. Поэтому можно применить предыдущие рассуждения, считая только все прямые, проходящие через конечные точки чертежа и точку B, параллельными между собой и перпендикулярными к направлению перемещения ползушки; таких прямых имеется две: CB и bB. Учтя это обстоятельство, строим диаграмму распределения сил, как и в предыдущем случае. Она показана на той же фигуре ниже. Особенность ее будет заключаться в том, что направления сил B_2 и S_2 сольются, и эти силы изображаются отрезками одной и той же прямой: B_2 — отрезком $\overline{42}$, S_2 —

отрезком $\overline{45}$. Поэтому давления в точках A и B будут изображаться, соответственно, отрезками $\overline{50}$ и $\overline{25}$. Но диаграмма распределения сил, построенная по предыдущему, еще не решает задачи окончательно. Когда точка B лежала в конечной плоскости чертежа, достаточно было знать направление силы B, определяемое за одно с ее величиной этой диаграммой.

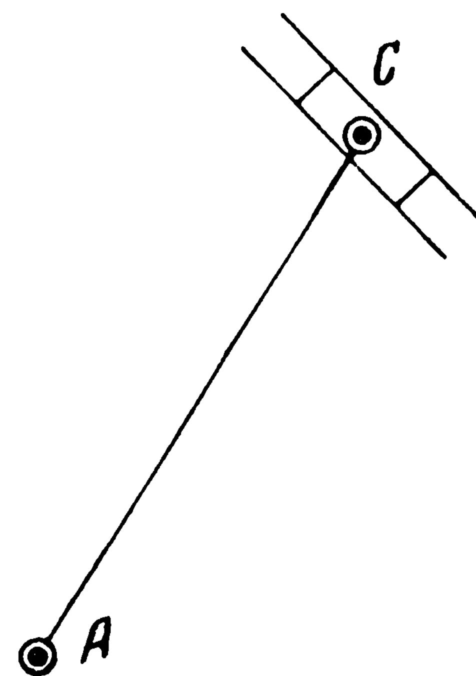


Фиг. 139.

Но теперь, когда точка B — в бесконечности, направление силы B еще не опрсделяет ее линии действия, так как весь пучок, проходящий через B и точки конечной части чертежа, состоит из параллельных лучей, и потому направление силы не позволяет остановиться на каком-либо определенном луче параллельного пучка. Поэтому становится необходимым дополнительное построение. Поводок *2* находится в равновесии под действием трех внешних сил: P_2, C и B; из них вторая есть давление поводка *1* на *2* че-

рез посредство шарнира C, третья — равнодействующая всех сил давлений, исходящих от направляющей и приложенных к ползушке. Для равновесия необходимо, чтобы эти три силы пересекались в одной точке. Проведя поэтому через точку C прямую, параллельную силе C до пересечения с силой P_2 в α, заключаем, что линия действия силы B проходит через точку α.

То обстоятельство, что эта прямая лежит вне пределов соприкосновения направляющих с ползушкой, показывает, что ползушка работает «с перекосом», т. е. давления на нее направляющих в одной ее части направлены в одну сторону, в другой — в противоположную. Этот весьма вредный с точки зрения изнашиваемости механизма перекос всегда стремятся избегнуть в машиностроении, и потому рекомендуется употреблять ползушки лишь такие, в которых шарнирная точка (у нас точка C) лежит в центре ползушки и в этой же точке приложена сила P_2, чаще же последняя вовсе отсутствует.



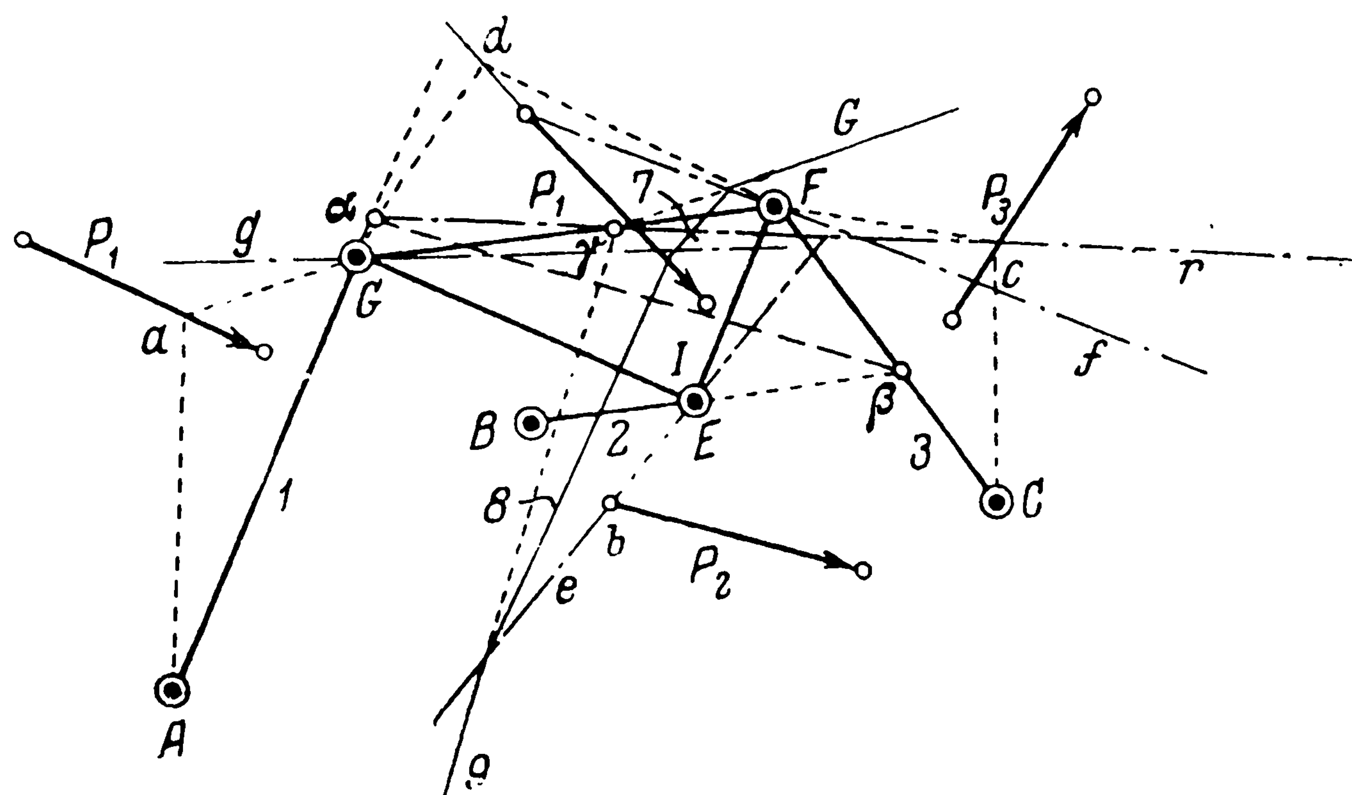
Фиг. 140.

Таким образом, точка α совмещается с шарнирной точкой C и здесь же помещается центр ползушки, как показано на фиг. 140. Небольшие уклонения от этого правила хотя и встречаются, но всегда должны быть поставлены в вину конструкции, в особенности, если не принято надлежащих мер, чтобы устранить вредные влияния перекоса и ущемления ползушки.

Сказанного достаточно, чтобы уяснить себе, как строить диаграмму, если парой скольжения заменен шарнир в C, или два каких-либо шарнира. Направляющие могут быть и криволинейными (круговыми), что приближает способ определения давлений к случаю фиг. 138.

Переходим теперь к определению усилий в трехповодковой группе (фиг. 141). Звено этой группы EFG обозначим I, поводки —*1*, *2*, *3*; силы, на них действующие, отмечены соответствующими индексами. Заменим данные силы приложенными в шар-

нирных точках, причем сила P_I может быть разложена на любую пару из трех таких точек звена I. За такую пару выбираем точки G и F. В соответствии с этим откладываем на силовой диаграмме силы P, образуя их геометрическую сумму, в таком порядке, чтобы сила P_I помещалась между силами P_3 и P_1, составляющие которых будут приложены в тех же точках F



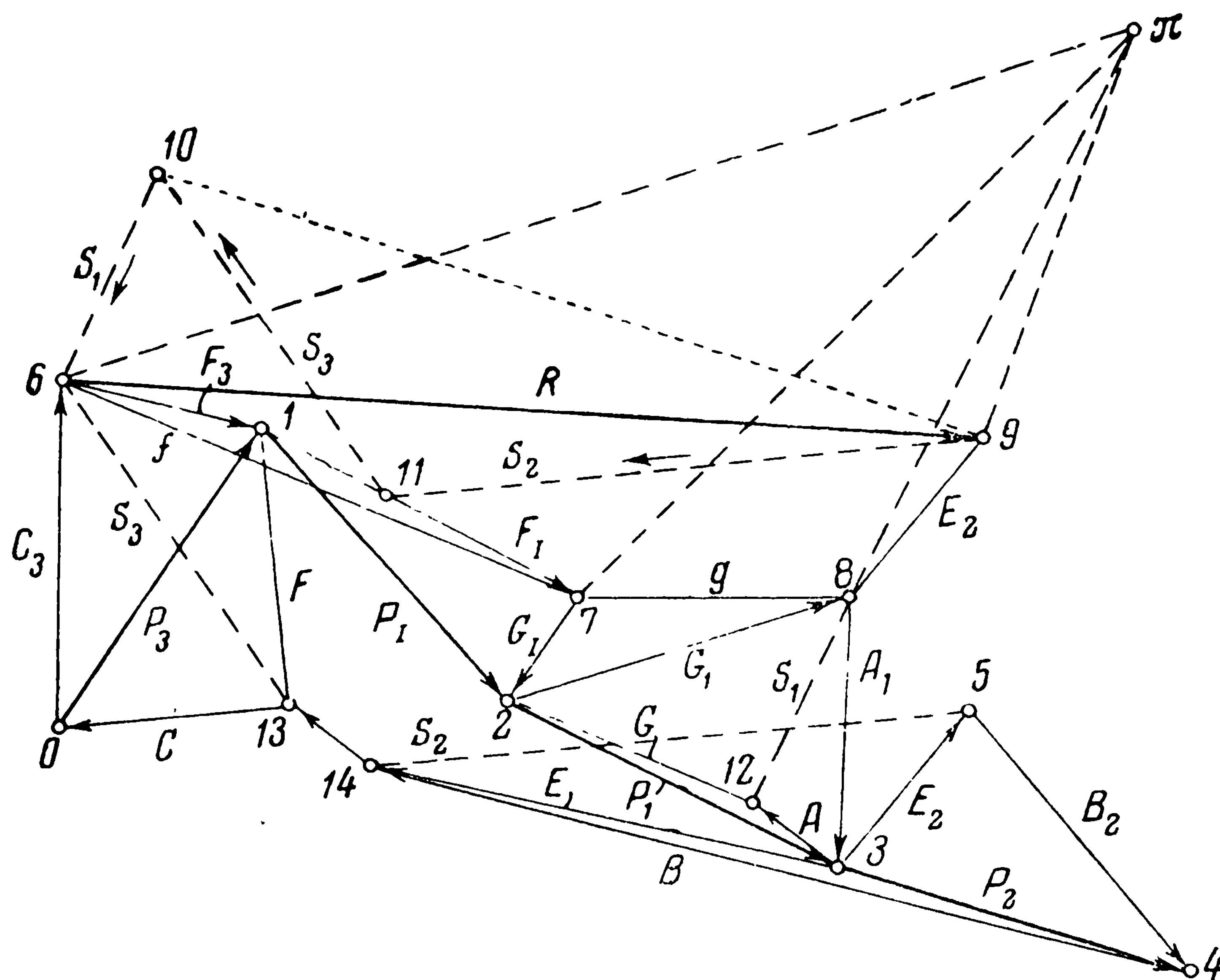
Фиг. 141.

и G. В результате получится (фиг. 142) ломаная *01234*. Каждую составляющую этой ломаной разлагаем в свою очередь на две силы, предполагая точки приложения сил P перенесенными в точки a, b, c и d.

Таким образом, силы P_3, P_I, P_1 и P_2 составятся, соответственно, как суммы сил C_3 и F_3, F_I и G_I, G_1 и A_1, E_2 и B_2; при этом разложение произведено таким образом, чтобы на силовой диаграмме две силы, действующие в каждом из узлов F и G, были расположены, как смежные члены геометрической суммы.

Следуя дальше рецепту Мора, следует заменить неизменяемое звено I треугольной фермочкой, состоящей из стержней EF, FG, GE. Но тотчас же видно, что применение этого рецепта к цели не приведет. В узлах E, F и G окажется по три неизвестных напряжений стержней, в шарнирных же точках A,

B, *C* — по одному неизвестному напряжению стержня и неизвестное по величине и направлению давление в шарнире, т. е. тоже по три неизвестных в каждом узле. Таким образом, где бы ни начать, искомых не найти, пользуясь только рецептом Мора. Итак, в чистом своем виде способ Мора не приводит к цели даже в случае весьма употребительных трехповодковых механизмов; тем более он далек от универсальности.



Фиг. 142.

Конечно, истина здесь не за горами, и если нехватает чего-либо, то только готового рецепта, как действовать; нет еще надобности изобретать что-либо существенно новое, а только комбинировать по-новому уже существующие приемы.

Мы не будем создавать из звена *I* фермочку, а будем его считать попрежнему за цельное неизменяемое тело. Будем искать прежде всего напряжения в поводках, причем заметим, что эти напряжения не изменятся, если силы F_3 и G_1 перенести в шарнирной точке на звено *I*, силы же A_1, B_2 и C_3 с поводков

на те звенья, к которым последние пристегнуты в точках A, B и C. Правильность этого положения легче всего себе уяснить, вообразив, что напряжения какого-либо поводка мы определяем кинематическим методом. При этом придется перерезать соответствующий поводок, но не придется разъединять шарниров и потому виртуальная работа сил, приложенных в шарнирных точках, не будет вовсе зависеть от того, к которому звену мы отнесем силу, приложенную в шарнирной точке. Этот перенос заставит исчезнуть силы, нагружающие поводки в их шарнирных точках, и теперь, при новом распределении сил, давления в шарнирах и напряжения в поводках будут тождественны, как в случае расчета ферм, нагруженных в узлах. Определение напряжений в поводках будет тогда проще всего сделать с помощью методов Риттера или Кульмана, известных из теории ферм. Мы применим последний как чисто графический.

Необходимо прежде всего построить равнодействующую сил, приложенных к звену I, равную геометрической сумме сил, приложенных в точках E, F и G. В силовой диаграмме четыре силы, приложенные в последних двух точках, расположены уже как слагаемые геометрической суммы; остается прибавить к ним только пятое слагаемое в виде отрезка $\overline{89}$, изображающего силу E_2. Искомая равнодействующая R изобразится отрезком $\overline{69}$. Линия ее действия в звене I определится, однако, если построим веревочный многоугольник. При этом проще всего представить себе совокупность сил F_1 и F_3 замененной их равнодействующей f, а сил G_I и G_1 — равнодействующей g (см. фиг. 142). Линии действия сил f, g и E_2 обозначены на фиг. 141 буквами f, g и e, линия действия равнодействующей R — буквой r.

Веревочный многоугольник построен, с использованием полюса π силового; стороны его обозначены теми же цифрами, как и концы лучей, исходящих из π, которым они соответственно параллельны; точка пересечения его крайних лучей будет γ. Прямая r пересекает поводок 1 в точке α, направления же поводков 2 и 3 пересекаются в β. Отрезок $\alpha\beta$ определяет собой на-

правление геометрической суммы сил R и давления S_1 поводка *1* на звено I, или же равной, но противоположной ей по знаку геометрической суммы давлений S_2 и S_3 двух других поводков на то же звено. Геометрическая сумма первых двух сил изображается отрезком *10—9*, напряжение же S_1 отрезком *10—6*. Силы S_2 и S_3 определятся как стороны треугольника *9—10—11* или же из равенства нулю геометрической суммы сил S_1, S_2, S_3 и R.

Зная напряжения поводков, легко получить давления в шарнирах, когда силы A_1, B_2, C_3, G_1, E_2, F_3 представим себе перенесенными обратно на поводки. Обозначая давления в шарнирах, как и раньше, теми же буквами, как и самые шарниры, скажем, что для того, чтобы напряжения поводков остались прежние, необходимо, чтобы геометрические суммы сил A и A_1, B и B_2, C и C_3, соответственно, были равны напряжениям S_1, S_2, S_3. Чтобы получить искомые A, B и C, пришлось еще раз отложить найденные напряжения в виде отрезков *8—12*, *5—14* и *13—6*. Искомые давления, испытываемые поводками в точках A B и C, изобразятся, соответственно, отрезками *3—12*, *4—14*, *13—0*. Чтобы получить давления трехповодковой группы на точки, к которым она пристегнута, нужно только изменить знаки найденных давлений A, B и C. Проверкой может служить то обстоятельство, что геометрическая сумма шарнирных давлений в A, B и C и данных сил P равна нулю; поэтому отрезок *14—13* должен изображать силу A; какой-либо заметной невязки не обнаружено.

Остается еще определить давления в остальных трех шарнирах E, F и G. С этой целью отметим, что геометрические суммы сил S_1, G_1 и G, S_2, E_2 и E, S_3, F_3 и F должны каждая равняться нулю; поэтому давления в указанных трех шарнирах будут изображаться отрезками *12—2*, *14—3* и *1—13*.

Если только отвлечься от той части диаграммы, которая отвечает построению веревочного многоугольника и определению напряжений в поводках, то в остальной своей части она представляет большое сходство с диаграммой, соответствующей

двухповодковой группе. И здесь и там каждому поводку соответствует некоторый четырехугольник, шесть сторон которого * исчерпывают распределение сил, относящихся к поводку; одна сторона изображает данную силу, приложенную к поводку, две других — ее составляющие, распределенные на шарнирные точки поводка, одна сторона — напряжение поводка под действием сил, приложенных только в узловых точках, и две оставшихся — давления в обоих шарнирах.

Несомненно, однако, что диаграмма распределения сил в трехповодковой группе много сложнее, чем диаграмма двухповодковой; поэтому вряд ли представится целесообразным сливать в одну несколько таких диаграмм, относящихся к одному и тому же механизму.

Строя указанную диаграмму, мы в общем вращались в кругу идеи Мора, отличительными признаками которой должно служить распределение сил на шарнирные точки и определение напряжений в двухшарнирных стержнях, возникающих под действием видоизмененной, таким образом, системы сил. Так как указанные напряжения ничего общего не имеют с действительно возникающими в звеньях механизма, под действием данных сил, упругими напряжениями, то мы позволим себе, для краткости, называть эти фиктивные напряжения моровскими.

* Нам нельзя здесь говорить о сторонах и диагоналях четырехугольника, потому что одна и та же сила, в зависимости от расположения и конфигурации линий чертежа, то будет выражаться стороной, то диагональю четырехугольника. Таким образом, мы можем придерживаться только терминологии новой геометрии, не отличающей сторон от диагоналей в многоугольниках. Четыре вершины четырехугольника в различных комбинациях по две определяют шесть прямых, которые все и будут называться сторонами его. Зато новая геометрия должна ввести различие между многоугольником и многосторонником. Если под четырехугольником разумеется совокупность четырех точек со всеми прямыми, определяемыми парными комбинациями этих точек, то под четырехсторонником разумеется совокупность четырех прямых со всеми точками, определяемыми пересечением любой пары из них. Таким образом, четырехугольник обладает шестью сторонами, а четырехсторонник — шестью вершинами.

Нетрудно заметить, что кинематическая метода позволяет определить моровские напряжения в поводках всех цепей первых трех классов и части цепей четвертого. Это следует из того, что, как указывалось в первой части нашего труда, устранение одного поводка пристегнутой к устою нормальной цепи одного из указанных классов превращает ее в механизм, состоящий из кривошипа и нормальной цепи того же класса, которая может, однако, распасться на простейшие. Желая определить моровское напряжение поводка, мы должны устранить этот поводок. Точки, к которым пристегивается исследуемая нормальная цепь, считаем неподвижными и строим картину скоростей полученного механизма, пользуясь затем кинематическим методом, как указано выше. Если цепь — четвертого класса, то может, конечно, оказаться, что механизм состоит из кривошипа и цепи типа еще неисследованного. Во всех же остальных случаях моровское напряжение поводка определится.

Применяя кинематическую методу для определения напряжений некоторых поводков, заменяя при этом звенья нормальных цепей, входящих в состав механизма фермочками, составленными из двухшарнирных стержней, можно указать ряд приемов, позволяющих определить моровские напряжения в механизме в зависимости от тех или иных нормальных цепей, определяющих его структуру. Когда моровские напряжения приведены в известность, то давления в шарнирах найдутся как замыкающие многоугольника, составленного из сил, приложенных к звену в данном шарнире, и напряжений сходящихся в нем стержней этого звена, так что можно задачу считать решенной, когда удалось определить моровские напряжения в стержнях. О замене пар вращения парами скольжения мы говорить будем лишь постольку, поскольку сказанное не сведется к повторению замеченного при исследовании двухповодковой группы.

Положение I. Если известны моровские напряжения всех стержней, примыкающих к данному трехшарнирному звену в одном из его шарниров, и напряжения всех

стержней, кроме одного, примыкающих к нему во втором шарнире, то такие же напряжения трех стержней, из которых воображаем себе составленным трехшарнирное звено, а также упомянутого стержня, примыкающего во втором шарнире, определятся из многоугольников равновесия двух узлов.

Положение это почти очевидно. Допустим, что A, B и C три шарнирные точки звена, не имеющего больше шарниров; стороны, противолежащие указанным вершинам треугольника, обозначим, соответственно, a, b, c и образуем все звено из трех стержней, изображаемых означенными сторонами. Допустим, что к шарнирной точке A примыкает ряд других стержней, из которых представляем себе составленными смежные с ABC звенья. Многоугольник равновесия узла A будет составлен из сторон, изображающих данные силы, нагружающие шарнирную точку A, независимо от того, к которому из звеньев, сходящихся в этом шарнире, означенные силы приложены, и из напряжений стержней, направления которых известны все без исключения; по величине же окажутся неизвестными только напряжения стержней b и c, сходящихся в шарнире A. Эти напряжения и определятся из многоугольника равновесия. Допускаем далее, что из напряжения примыкающих к ABC в шарнирной точке B звеньев неизвестно только напряжение одного стержня, который назовем d: в этой ж узловой точке сходятся стержни a и c данного звена, причем напряжение в стержне c уже приведено в известность. Неизвестными, и только по величине, окажутся напряжения стержней a и d, которые и определятся из многоугольника равновесия узла. Итак, напряжения всех четырех стержней a, b, c, d найдены методом, в теории ферм именуемым полигональным.

Этого положения достаточно, чтобы показать, что моровские напряжения всех стержней, из которых воображаем себе составленными звенья цепи первого класса, а также напряжения всех ее поводков, определятся полигональным методом, если с помощью кинематической приведем

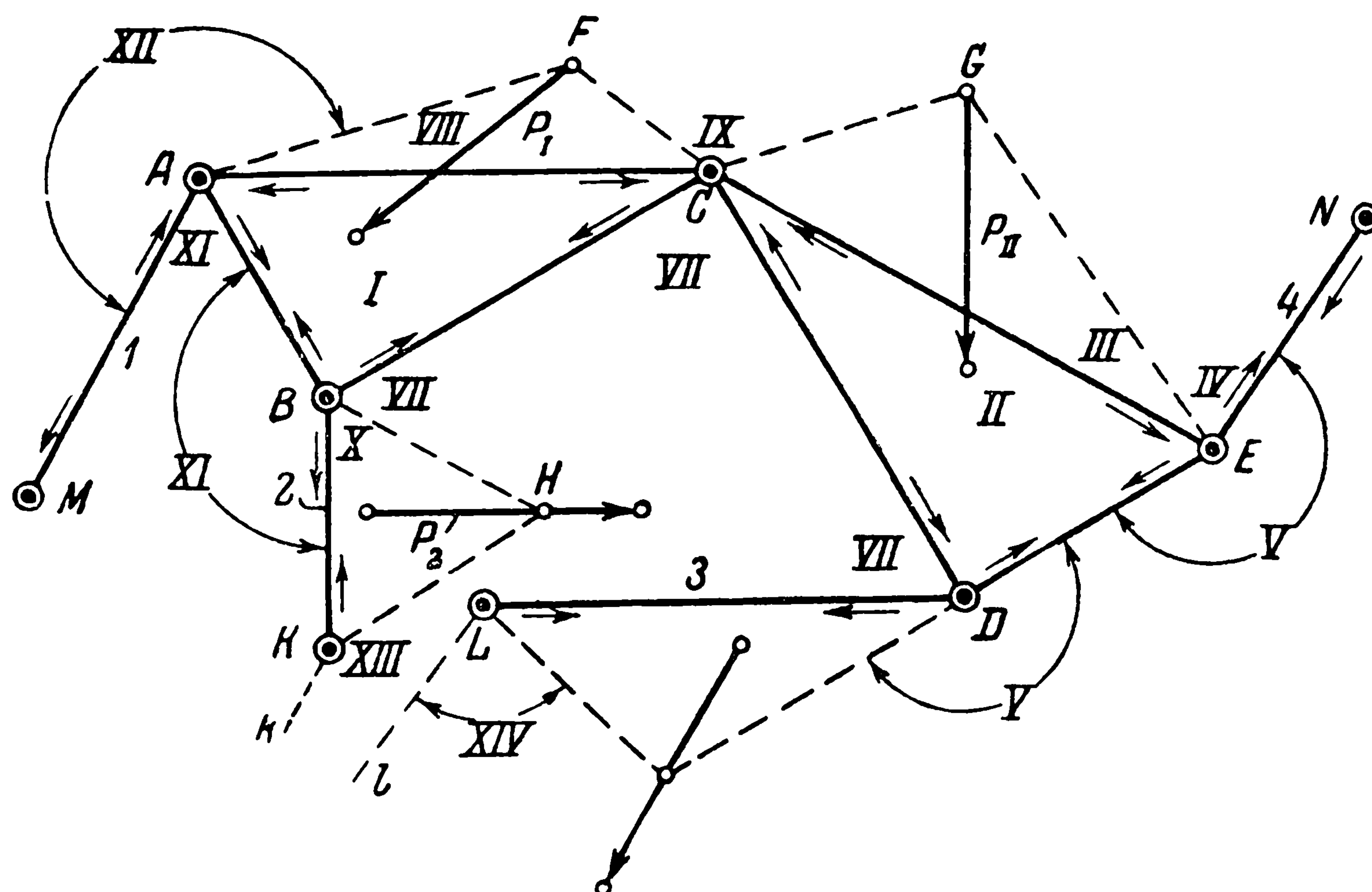
в известность напряжение одного из поводков крайнего звена.

Обратимся хотя бы к чертежу фиг. 95 предыдущей главы, причем можем себе вообразить сколько угодно звеньев в цепи. Допустим, что с помощью кинематического метода определено напряжение поводка *6*. В силу доказанного положения определятся полигональным методом напряжения всех трех стержней звена *V* и напряжение поводка *5*. Окажутся известными напряжения стержней, примыкающих к одноповодковому звену *IV* в шарнире C_4, и, согласно доказанному положению, определятся напряжения трех стержней, из которых воображаем себе составленным последнее звено, а также поводка *4*. Следующее одноповодковое звено *III* окажется теперь в тех же условиях, в каких только что находилось предыдущее *IV*, и потому напряжения его трех стержней и поводка определятся тоже с помощью полигонального метода. Так мы будем переходить от одного одноповодкового к другому, пока не дойдем до второго крайнего двухповодкового. Оставив пока без внимания один из его поводков, скажем 0, мы определим, по предыдущему, напряжения стержней, из которых воображаем себе составленным это звено, и напряжение второго поводка *1*. Из многоугольника равновесия узла *B* определится единственное неизвестное: напряжение поводка 0, причем проверкой будет служить то обстоятельство, что соответствующая замыкающая многоугольника должна быть параллельной направлению поводка 0.

В данном случае применение кинематического метода для предварительного определения моровского напряжения одного из поводков крайнего звена будет довольно целесообразно. Устранение этого поводка при неподвижности точек, которыми цепь первого класса пристегнута к другим звеньям механизма, превращает ее в механизм, состоящий из кривошипа и ряда двухповодковых групп, так что картина скоростей построится сравнительно просто.

В виде примера рассмотрим построение диаграммы моровских напряжений и шарнирных давлений для случая четырех-

поводковой группы. Заметим, что в случае трехповодковой группы диаграмма получится такая же, как и изображенная на фиг. 142; отпадет только построение силового многоугольника, соответствующего веревочному на фиг. 141, взамен же этого станет построение картины скоростей.

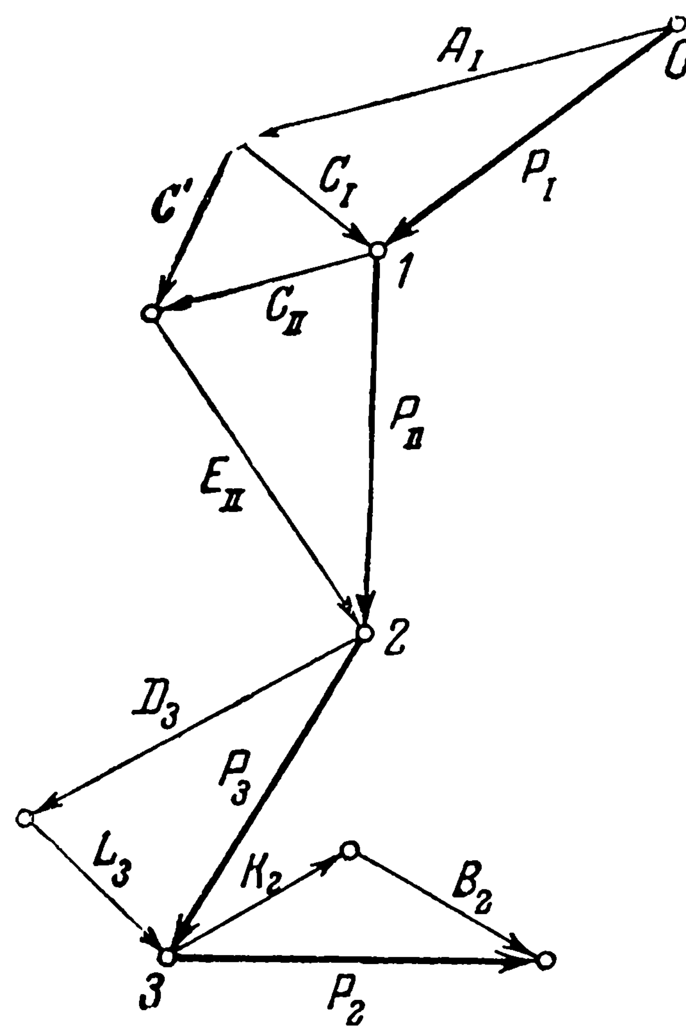


Фиг. 143.

На фиг. 143 изображена четырехповодковая группа, звенья *I* и *II* которой нагружены соответственно силами P_I и P_{II}; из поводков нагружены только *2* и *3*, соответственно, силами P_2 и P_3. На фиг. 144 эти силы отложены подряд, как будто строилась их геометрическая сумма; силы P_I и P_{II} отложены, как смежные члены геометрической суммы, что существенно, чтобы тут же получить равнодействующую C' сил C_I и C_{II} . Силы разлагаем на шарнирные точки по направлениям, указанным на фиг. 143; само разложение выполнено на фиг. 144, причем соблюдались условленные нами обозначения.

После этого приступаем к определению напряжения одного из поводков по кинематическому методу под действием системы

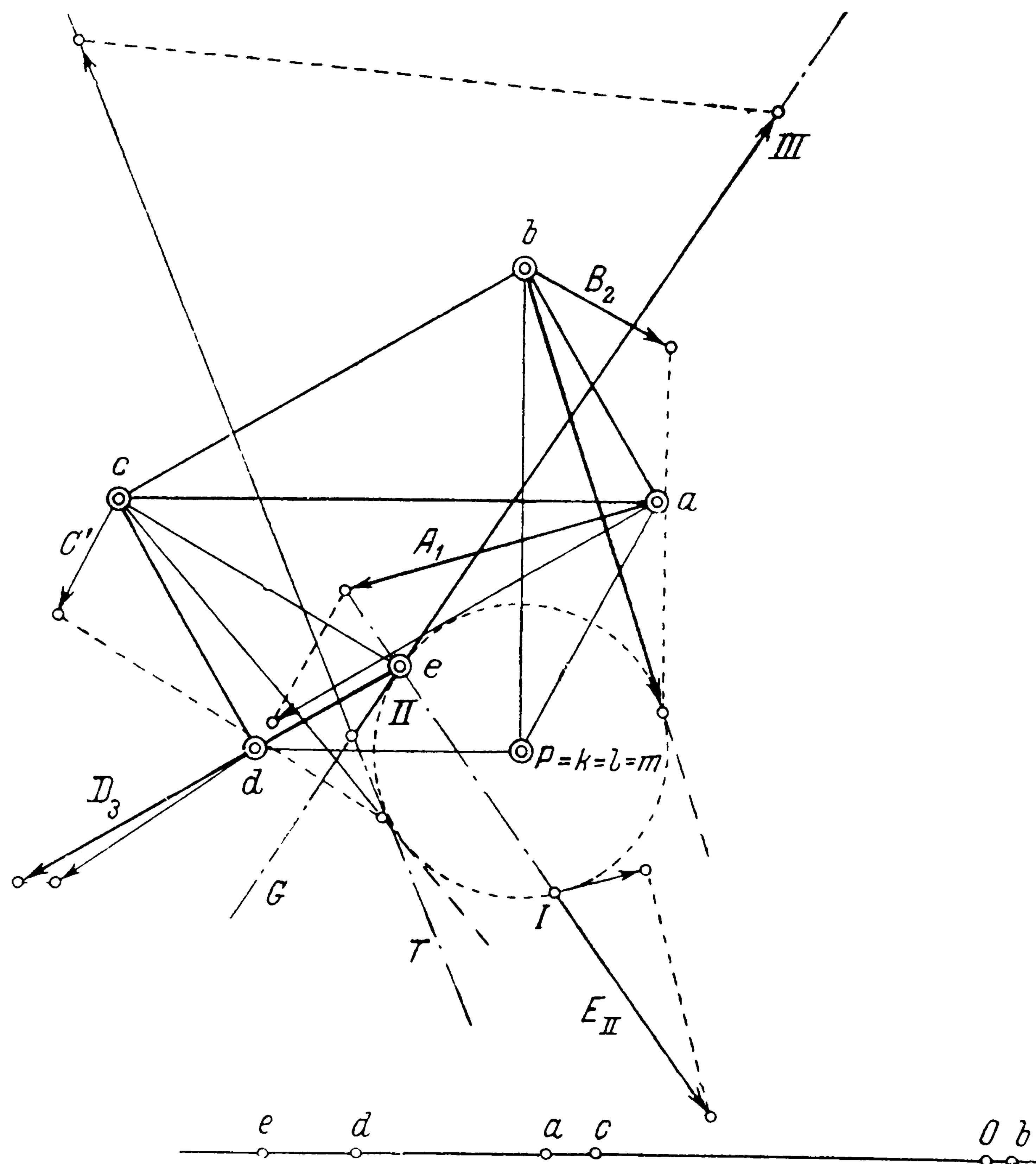
сил, приложенных только в шарнирных точках. Останавливаемся на поводке *4*, но нисколько не сложнее было бы остановиться и на одном из нагруженных поводков *2* или *3*. Отбросив поводок *2* и считая точки M, K и L неподвижными, строим картину скоростей механизма, в котором кривошипом считаем прежний поводок *1*. Скоростью точки A задаемся (фиг. 145) произвольноно в виде отрезка Pa; определение остальных изображающих точек настолько просто, что на нем останавливаться не будем. На вспомогательном рычаге силы должны быть приложены в точках a, b, c, d, e. За исключением силы, приложенной в последней, линии действия остальных сил не пересекают приводящей окружности, радиус которой избран так, что она проходит через e. Силу E_{II} прилагаем поэтому в точке *I*, где прямая ее действия пересекает окружность, и здесь сообщаем ей поворот до совпадения с направлением касательной в этой точке к окружности. Точками же приложения остальных сил остались соответствующие изображающие точки, причем они повернуты до совпадения с направлениями касательных из точек их приложения к нашей окружности. На чертеже векторы первоначальных сил показаны более толстым штрихом, в повернутом положении — более тонким. В точке C приложена непосредственно геометрическая сумма C' сил C_I и C_{II}. В нижней части фиг. 145 произведено алгебраическое сложение сил, касательных к окружности, начиная от точки O, в порядке сил, приложенных в точках a, b, c, d, e, причем концы силовых векторов обозначались соответственно теми же буквами. Уравновешивающая данной системы сил, направленная по одной из касательных к окружности по величине, изобразится отрезком Oe и



Фиг. 144.

должна вращать вспомогательный рычаг по часовой стрелке.

За линию ее действия избираем касательную T и наносим на чертеж прямую действия G искомого напряжения поводка 4,



Фиг. 145.

которая должна быть параллельна последнему и проходить через точку e. Прямые G и T пересекаются в точке II, где и прилагаем уравновешивающую, направленную по касательной T, а затем поворачиваем ее около точки приложения до совпа-

дения с направлением прямой G. Искомое напряжение поводка 4 выразится отрезком $II — III$.

После этого легко построить многоугольник равновесия каждого из узлов четырехповодковой группы (см. фиг. 143), считая звенья ее за треугольные фермочки, и найти напряжения всех двухшарнирных стержней, из которых воображаем себе составленной всю конфигурацию. Это будет очень просто, если многоугольник равновесия каждого узла вычертить отдельно. Но если желательно получить связную диаграмму, как это было сделано, например, для трехповодковой группы (см. фиг. 142), где напряжение каждого стержня отложено по разу, то сделать это, как там, не руководствуясь каким-либо общим началом, почти невозможно. Вероятность, что члены каждой геометрической суммы будут отложены в порядке, надлежащем для того, чтобы все полигоны оказались совмещенными равными сторонами, изображающими напряжения одного и того же стержня, весьма ничтожна, и путь проб здесь безнадежен.

Может, конечно, возникнуть вопрос, стоит ли вообще стремиться к осуществлению такой связной диаграммы, не удобнее ли иметь дело с отдельными полигонами. Ведь с точки зрения затрат чертежного труда не так уж важно, будет ли отрезок, изображающий напряжение данного стержня, отложен один или два раза. К тому же такие диаграммы, как изображенные на фиг. 138, 139, 142, обладают, пожалуй, меньшей ясностью, чем та, которая получится при пользовании отдельными, разрозненными полигонами. Если мы вспомним соответствующую задачу из теории жестких кинематических цепей или ферм, то мы должны признать, что там никто не строит отдельных разрозненных полигонов равновесия, что одной из важных заслуг Максвелла * является применение к построению связных диаграмм напряжений в стержнях плоских ферм свойств в з а и м н ы х многогранников. Применение этих свойств имеет столь огромное значение не потому только, что

* Scientitic Papers of T. C. Maxwell. On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces.

оно позволяет безошибочно вычертить связную диаграмму, но, главным образом, потому, что позволяет ввести целесообразные обозначения, в силу которых чтение полученной диаграммы становится столь простым, что гораздо проще ориентироваться в связной диаграмме, чем в совокупности разрозненных многоугольников.

Мы напомним в общих чертах положения о применении теории взаимных многогранников к определению напряжений в жесткой кинематической цепи. Под взаимными многогранниками разумеют такие два многогранника, что каждому ребру одного из них соответствует ребро другого, каждой грани одного — вершина другого, и обратно: каждой вершине первого — грань второго. При этом, если только плоская кинематическая цепь может рассматриваться как ортогональная проекция многогранника с плоскими гранями, то всегда можно построить фигуру, которая может рассматриваться как проекция многогранника, взаимного данному, а связная диаграмма напряжений стержней будет выражаться именно такой плоской фигурой. Не совсем из изложенного ясно, как себе представить многогранник с неплоскими гранями. Ясности представления будет способствовать, если параллельно с многогранником будем представлять себе пространственную стержневую систему, получаемую из него, заменяя ребра стержнями, а вершины — узловыми точками. Тогда грани, как таковые, исчезают, остается только периметр, ограничивавший каждую грань. Если мы получили пространственную стержневую систему из многогранника с плоскими гранями, то оставшийся периметр каждой грани будет плоский многоугольник. Можно теперь изменить длины стержней пространственной системы, и тогда раньше бывший плоским многоугольник окажется, в общем случае, неплоским. Если бы мы теперь хотели вернуться от стержневой системы к многограннику, то под гранью можно представлять себе какую бы то ни было поверхность, но уже не плоскость.

Ограничение, вводимое требованием, чтобы жесткая кинематическая цепь могла рассматриваться как проекция много-

гранника с плоскими гранями, не так существенно, как принято думать. Упомянутую выше пространственную систему легко обратить в другую, соответствующую многограннику с плоскими гранями; нужно только вставить новые стержни. В самом деле, проведем в многоугольнике с неплоским периметром диагонали таким образом, чтобы он разбился на треугольники; каждый такой треугольник может уже рассматриваться как плоская грань. Другими словами, неплоскую грань представляем себе уже не как поверхность неопределенной формы, а как совокупность треугольных граней. Этим мы введем в ферму лишние стержни, но напряжение этих лишних стержней заранее известно и должно равняться нулю.

Между тем и для ферм с лишними стержнями доказывается, что диаграмма напряжений в стержнях будет проекцией многогранника, взаимного многограннику, за проекцию которого считаем плоскую ферму *. Правда, указанный закон взаимности не оказывается в этом случае достаточным, чтобы построить диаграмму; нужно предварительно определить напряжения в избыточных стержнях приемами, выработанными для статически неопределимых ферм. Но после этого соблюдение указанного соответствия очевидно. Выбросив лишние стержни, заменяем действие их силами, и в результате получаем ферму, статически определимую, для которой указанное соотношение справедливо.

При этом совершенно безразлично с точки зрения формы воображаемого многогранника, будем ли мы заменять действие стержней силами или оставим стержни. Дело в том, что мы еще не указали, что не только стержни фермы должны рассматриваться как проекции ребер многогранника, но и прямые действия приложенных сил. Таким образом, замена действия стержня силой, направленной по оси его, нисколько не изменит вида проектируемого многогранника.

---

* В. Л. Кирпичев. Графическая статика. Изд. 1908 г. Глава XII, § 221—223.

Когда многогранник с неплоскими гранями указанным выше способом обращен в плоский, то в ферме прибавятся лишние стержни. Чтобы картина напряжений в остальных стержнях соответствовала истинной, необходимо принять напряжения всех введенных, таким образом, лишних стержней равными нулю. Таким образом, вопрос о том, может ли данная ферма рассматриваться, как проекция пространственной стержневой системы, стержни которой являются ребрами многогранника с плоскими гранями, или же последние окажутся неплоскими, уже потерял для нас значительную часть той остроты, которую ему принято приписывать. Сейчас мы увидим, что над ним и вовсе незачем задумываться.

Чтобы уяснить себе это, перейдем к изложению предложенных Максвеллом обозначений. Раньше, однако, скажем еще несколько слов о том, что иногда приходится себе представлять грани многогранника, проекцией которого является ферма, уходящими в бесконечность. Мы уже сказали, что не только стержни фермы, но и линии действия сил, приложенных к ферме, должны считаться ребрами многогранника. Прямые действия, вообще говоря, удаляются в бесконечность, по одну и другую сторону узла, в котором сила приложена и который является проекцией вершины многогранника. Но ребра многогранника идут от вершины только в одном направлении, и потому, если будут ребра, уходящие в бесконечность, то это будет только так называемые п о л у п р я м ы е. Если имеем две силы, приложенные в двух узлах, между которыми проходит некоторая ломаная линия стержней, образующих внешний контур фермы, если при этом в промежуточных узлах этой линии не имеется приложенных сил, или если нет вообще таких узлов, т. е. ломаная заменяется одним стержнем, то прямые действия этих двух сил и указанные промежуточные стержни должны считаться проекциями ребер одной и той же грани. Если указанные полупрямые пересекаются, то можно получить замкнутый многоугольник, который будет считаться проекцией контура периметра грани; но две полупрямые могут и не пере-

секаться; в этом случае грань так и считается уходящей в бесконечность. Равным образом нет надобности доводить до взаимного пересечения подобного рода ребра в том случае, если вершина, в которой они пересекаются, лежит за пределами чертежа; достаточно лишь представить себе соответствующую грань, независимо от того, где она кончается.

Для получения целесообразных обозначений важно на чертеже фермы отметить какими-либо знаками — буквенными или же цифровыми — проекции граней многогранника. Так как ребро представляется границей двух граней, то затем любой стержень может быть обозначен двумя знаками, которыми отмечены две грани, пересекающиеся в соответственном ребре. Каждому ребру многогранника соответствует ребро взаимного многогранника, но обеим граням будут соответствовать две вершины последнего, которые будут соединяться указанным выше ребром. В диаграмме напряжений стержней проекция ребра взаимного многогранника изображает напряжение стержня данного, и соответствующий отрезок с двух сторон ограничен проекциями вершин, носящими те же наименования, как проекции двух граней основного многогранника, разделяемые соответствующим стержнем. Так, например, если две грани многогранника обозначим A и B, то стержень или линия действия некоторой силы, служащие проекцией ребра пересечения граней A и B, будет обозначаться AB, а напряжение его в силовой диаграмме окажется изображенным отрезком AB.

Сказанного достаточно, чтобы уяснить себе, что вопрос о том, будет ли ферма проекцией многогранника с плоскими или неплоскими гранями, не имеет никакого значения для существования взаимной диаграммы. Мы уже сказали, как данную неплоскую грань заменить рядом плоских треугольных граней, причем напряжения всех вводимых лишних стержней в ферме будут равны нулю. Если проекции двух граней разделяются стержнем, напряжение которого равно нулю, то во взаимной

диаграмме проекция соответствующего ребра должна равняться нулю, и знаки, обозначающие обе грани, будут служить наименованиями одной и той же точки. Если неплоскую грань заменим совокупностью треугольных с помощью диагоналей, исходящих из одной вершины, то легко заметить, что всем этим граням в силовой диаграмме будет соответствовать одна и та же вершина, потому что напряжения всех лишних стержней будут равны нулю. Следовательно, всей совокупности этих плоских граней, на которые разбилась неплоская, соответствует одна и та же вершина в проекции взаимного многогранника; другими словами, она соответствует неплоской грани. Чем вводить лишние стержни в ферму и затем в диаграмме обозначать одну и ту же точку несколькими буквами, будет проще эту точку обозначить одной только буквой и той же буквой обозначать неплоскую грань. Но тогда различия между гранями плоскими и неплоскими не существует уже *.

Мы видели, что закон взаимности между чертежом фермы и диаграммой сил существует не только для цепей, степень изменяемости которых равна нулю, но и для цепей, для которых она будет отрицательна. Нет ли оснований предположить, что закон взаимных многогранников окажется применимым и для

* Не первый раз уже на протяжении все той же работы автору приходится выходить за пределы области, в которой он привык работать специально. Не будучи знаком со всей огромной литературой в области строительной механики, он не может с полной уверенностью утверждать, что здесь впервые в приложениях теории взаимных многогранников, поскольку ею приходится пользоваться для построения диаграмм напряжений в фермах, устранено существенное ограничение. Во всяком случае, такой специалист по этим вопросам, как проф. В. Л. Кирпичев, в своей «Графической статике», в которой главы 11 и 12 посвящены взаимным многогранникам Максвелла еще в 1908 г. (см. § 218 означенного сочинения), подчеркивает означенное ограничение. Существенное с принципиальной точки зрения устранение указанного ограничения для нас будет иметь только то значение, что нам не придется в дальнейшем доказывать, что рассматриваемые ниже стержневые системы будут проекциями многогранника с плоскими гранями; но читатель сам легко может убедиться, что последнее условие кажется выполненным.

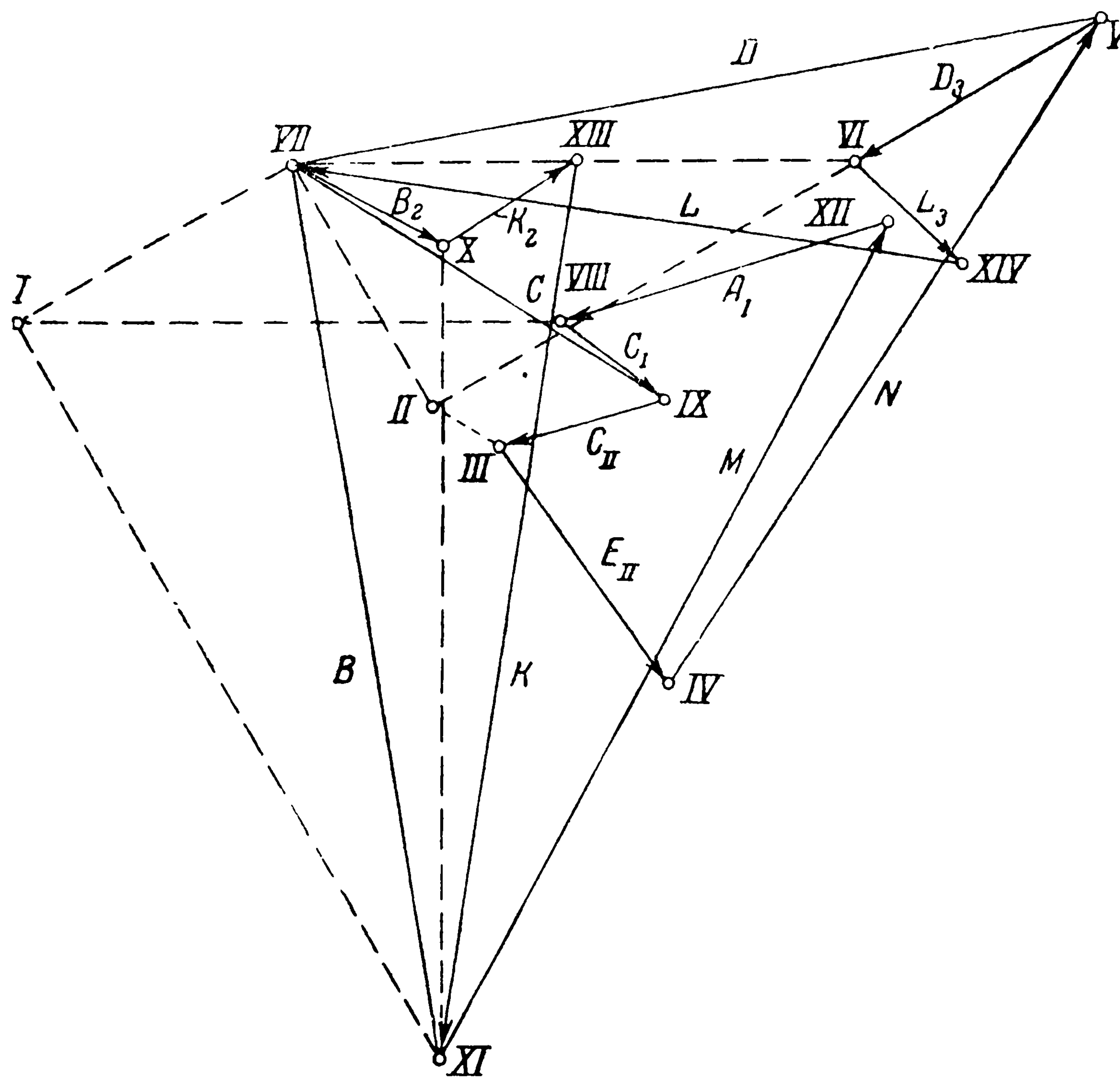
нахождения напряжений в таких стержневых системах, составленных из двухшарнирных стержней и нагруженных в узловых точках, которые могут рассматриваться как кинематические цепи с положительной степенью изменяемости?

Можно указать случаи, где закон взаимности чертежа системы и диаграммы напряжений заведомо имеет место. В любой ферме можно устранить один или несколько стержней, заменив действие их на узловые точки силами. Таким образом, ферма превратится в изменяемую стержневую систему, находящуюся в равновесии. Только раньше выброшенные стержни образовали проекции ребер многогранника, теперь их место займут прямые действия сил, совпадающие с направлениями выброшенных стержней. Соответственным образом, в диаграмме напряжений отрезки, изображавшие раньше напряжения выброшенных стержней, будут теперь изображать внешние силы, общий же вид многогранника, проектирующегося в диаграмму напряжений, будет тот же. Итак, закон взаимных многогранников может найти себе применение и при построении диаграмм напряжений изменяемых стержневых систем.

Но можно сказать и больше. Если мы просмотрим доказательства закона взаимности, то в этих доказательствах нигде не требуется упоминания о том, что ферма представляет собой жесткую стержневую систему; нигде не говорится о числе узлов и стержней, их связывающих, и потому доказательство может быть отнесено к любой плоской стержневой системе. А так как всякая такая система может быть рассматриваема как проекция некоторой пространственной, т. е. такой, которую принято называть многогранником, в общем случае с неплоскими гранями, то нет решительно никаких оснований думать, что к изменяемым стержневым системам закон взаимных диаграмм не имеет применения. Наша основная задача будет состоять в том, чтобы применить его к нормальным многоповодковым цепям.

Итак, переходим прямо к четырехповодковой группе (см. фиг. 143). Линии действия сил, разложенных на узловые

точки, отмечены здесь пунктиром. Напряжение поводка *4* уже приведено в известность кинематическим методом. Остается только приступить к построению диаграммы (см. фиг. 146). В теории ферм рекомендуется построить сначала многоугольник



Фиг. 146.

внешних сил, обойдя узлы фермы в определенном порядке, например по направлению движения часовой стрелки. Не говоря о том, что этот рецепт неудобоприменим, когда имеются нагрузки не только в узлах, принадлежащих внешнему контуру фермы, но, кроме того, для нашей системы внешние силы не так уж просто привести в известность. Ведь в числе их имеются и шарнирные давления M, K, L, которые определятся в результате построения диаграммы, а при начале ее построения долж-

ны считаться неизвестными. Поэтому многоугольника внешних сил мы откладывать не будем; он сам постепенно войдет в состав нашей диаграммы.

Разметим же сначала проекции граней воображаемого многогранника. Чтобы легче себе представить грани, сходящиеся в данном узле, можно просто разметить плоские углы, сходящиеся в данной вершине. Поэтому на чертеже некоторые цифры повторены по нескольку раз, так как одна и та же грань имеет несколько вершин, и около каждой из вершин плоский угол будет обозначен цифрой все той же грани. Так, например, цифра *VII* повторена три раза ввиду особых трудностей ясно представить себе соответствующую грань. Следует, однако, отметить, что при пользовании соотношениями, основанными на свойствах взаимных многогранников Максвелла, для получения результата вовсе и не требуется в полной мере представлять себе пространственную систему, проектирующуюся в данную стержневую. Важно только правильно разметить плоские углы в вершинах, т. е. обозначить одной и той же буквой все плоские углы, относящиеся к одной и той же грани. Но это делается совершенно автоматически при построении диаграммы напряжений, как мы увидим, когда будем размечать эти плоские углы не сразу, а по мере перехода от узла к узлу.

Следует отметить, что Максвелл дал в то же время правило, пользуясь которым мы будем откладывать стороны силовых полигонов в надлежащем порядке. Правило это состоит в том, что напряжения проекций ребер, сходящихся в одной вершине, должны быть построены в порядке обхода ребер, который может совершаться либо по часовой стрелке, либо против нее; но принятое направление должно быть сохранено во всех узлах. Это правило обычно соединяется с другим, а именно, что внешние силы, приложенные к узлам внешних поясов фермы, тоже должны быть отложены в порядке, вытекающем из обхода этих узлов в том же направлении, в котором будем обходить ребра в каждой из вершин. Последнее добавление необходимо только

на тот случай, если желательно сразу построить многоугольник внешних сил. Оно приводит к затруднениям уже в теории ферм, когда имеются нагрузки на внутренние узлы; оно станет совсем неприменимо в системе (см. фиг. 143), которая, по введении реакций в точках K, L, M, N, будет находиться в равновесии, представляя собой стержневую систему с восемью степенями свободы, и которая не обладает внешним замкнутым контуром. Наконец, это добавление совершенно излишне, если только отказаться от мысли, во что бы то ни стало, сперва нанести на чертеж многоугольник внешних сил, а затем уже приступить к построению напряжений в стержнях. При построении многоугольников равновесия отдельных узлов внешние силы сами собой постепенно войдут в чертеж диаграммы и расположатся надлежащим образом.

Мы уже видели, что, определив напряжение поводка *4*, нужно построить многоугольник равновесия узла E, в котором сходятся четыре ребра и образуются плоские углы граней II, III, IV, V. Вершине E будет соответствовать некоторый многоугольник равновесия, являющийся проекцией контура грани, взаимной вершине E; вершины этого многоугольника будут (см. фиг. 146) II, III, IV, V. Если условимся обход стержней, сходящихся в узлах, совершать по часовой стрелке, то сначала откладываем силу E_{II} в виде отрезка $III—IV$, затем напряжение поводка *4* в виде отрезка $IV—V$ и замыкаем многоугольник двумя сторонами $V—II$ и $II—III$, направление которых определяется стержнями ED и EC; первый из них окажется растянутым, второй — сжатым.

Переходим к узлу D. В нем имеется плоский угол треугольной грани II, углы VI и VII и еще один плоский угол, который может быть обозначен только цифрой V, потому что при обходе стержней мы должны включить стержень DE, напряжение которого уже отмечено отрезком $II—V$. К нему присоединится отрезок $V—VI$, изображающий силу D_3, и многоугольник замкнется отрезками $VI—VII$ и $VII—II$.

Обращаемся к узлу C. Чтобы иметь возможность построить

сначала известные стороны многоугольника и в то же время обходить стержни узла C по часовой стрелке, необходимо начать построение с вершины $VIII$ в порядке $VIII—IX—III—II$ $VII—I—VIII$. На диаграмме имеются уже напряжения стержней CE и CD; последнее уже раньше изображено отрезком $II—VII$, и потому очевидно, что, как бы себе ни представить грань VII, но соответствующий плоский угол при C не может быть обозначен иной цифрой, кроме этой. К уже нанесенным на диаграмму отрезкам $III—II$ и $II—VII$ присоединен сначала отрезок $IX—III$, потом $VIII—IX$ так, чтобы геометрическую сумму сил, действующих на узел C, отсчитывать от точки $VIII$; затем силовой многоугольник замкнут сторонами $VII—I$ и $I—VIII$.

Переходя к узлу B, замечаем, что на диаграмме уже имеется напряжение $I—VII$ стержня BC, чем предопределено обозначение соответствующего плоского угла при вершине B цифрой VII; наносим отрезок $VII—X$, изображающий силу B_2, и замыкаем стороны $X—XI$, $XI—I$.

В узле A имеется только одна неизвестная сила: напряжение поводка *1*. Откладываем сначала отрезок $XII—VIII$, изображающий силу A_I; далее идут стороны $VIII—I$, $I—XI$, и параллель поводку *1* из точки XI должна пройти через точку XII. Заметной невязки не обнаружено.

Итак, моровские напряжения всех стержней, отмеченные на диаграмме пунктирными отрезками, найдены. Здесь же имеются уже все внешние силы, приложенные в узловых точках, принадлежащих звеньям нашей четырехповодковой группы. Готовая диаграмма сразу дает ответ на вопрос, каково напряжение данного стержня. Напряжение стержня CD, например, может быть определено либо из равновесия узла C, либо из равновесия узла D. Так как проекции ребер и плоских углов мы обходим по направлению часовой стрелки, то при пользовании узлом C мы получаем отрезок $II—VII$, при пользовании узлом D — отрезок $VII—II$, причем направление отрезка указывает направление силы, которую нужно приложить в узле, если этот стержень устранить, чтобы не изменилась картина

напряжений остальных стержней. Таким образом, не только не нужно отыскивать в готовой диаграмме весь многоугольник равновесия узла, чтобы определить величину напряжения данного стержня, но и характер этого напряжения (растяжение или сжатие) определяется немедленно.

Этим до сих пор ограничивалось исследование диаграммы напряжений, поскольку ею в обозначениях Максвелла пользовались для расчета ферм. Там в силу характера предполагаемой нагрузки шарнирные давления и напряжения стержней тождественны. У нас это упрощающее обстоятельство отсутствует. Но оказывается, что *диаграмма моровских напряжений, построенная в обозначениях Максвелла, непосредственно определяет и давления в шарнирах.*

Рассмотрим сначала давления в шарнирах *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Так как поводки *1* и *4* не нагружены силами, то давления в шарнирах *A* и *E* равны напряжениям соответствующих поводков; то же относится и к шарнирам *M* и *N*, давления которых, таким образом, тоже уже привелены в известность. Обращаемся к шарниру *B*. Если устранить поводок *2* со всеми приложенными к нему силами, а действие его заменить силой, приложенной в точке *B* звена *I*, то совместно с поводком исчезнет и грань *X*. Прямая действия искомой силы будет разделять грани *VII* и *XI*; поэтому величина ее должна определяться отрезком *VII*—*XI* нашей диаграммы. И в самом деле, мы убеждаемся, что многоугольник *XI*—*I*—*VII*—*XI* есть многоугольник равновесия сил, приложенных в точке *B* по замене действия поводка *2* на звено *I* силой, которая должна быть шарнирным давлением.

Точно так же, если мы хотим определить давление в шарнире *C*, или действие звена *II* на звено *I*, то, отбросив первое из них со всеми приложенными к нему силами, мы должны ввести соответствующую силу, линия действия которой будет разделять грани *IX* и *VII*, и потому отрезок *IX* —*VII* нашей диаграммы изображает давление звена *II* на звено *I*, передаваемое через шарнир. Вполне аналогично, давление поводка *3* на звено *II*, передаваемое через шарнир *D*, выразится отрезком

V—VII, так как при устранении поводка *3* вместе с силами, к нему приложенными, грани *V* и *VII* станут смежными.

Нам осталось еще определить шарнирные давления в точках K и L, которые относятся к числу внешних сил, действующих на нашу систему; прямые действия их неизвестны, но должны быть отнесены к числу ребер нашего многогранника. Поэтому наносим пока на фиг. 143 прямые k и l по произвольному направлению, с тем только, чтобы не забыть ввести соответствующих граней. Истинные направления этих прямых определятся из нашей диаграммы. В каждой из рассматриваемых трех точек сходятся три грани многогранника; две из них, ребра пересечения которых изображают поводки *2* и *3*, уже отмечены, плоские углы третьих обозначены цифрами *XIII* и *XIV*. Отложив силу K_2 в виде отрезка *X—XIII*, скажем, что *XIII—XI* есть та внешняя сила, которая приложена в шарнире K к нашей системе. Вполне аналогично сила L_3 отложится в виде отрезка *VI—XIV*, а отрезок *XIV—VII* определяет внешнюю силу, приложенную в шарнире L.

Построение диаграммы закончено. В ней многоугольник внешних сил показан сплошной чертой, причем конец каждой силы отмечен стрелкой; моровские напряжения стержней, как величины фиктивные, отмечены пунктиром. Давления в шарнирах, принадлежащих звеньям *I* и *II* цепи, которые по отношению к нормальной цепи, т. е. нашей системе с восемью степенями свободы, не являются внешними силами, отмечены сплошной чертой, но стрелками не отмечены, так как направление стрелок, как и в случае напряжений, будет зависеть от того, к какому из звеньев или поводков будем представлять себе приложенными эти давления.

Ввиду того, что подобная диаграмма с шарнирными давлениями строится здесь впервые, мы не ограничились в ней только обозначением проекций вершин многогранника, чего для чтения ее вполне достаточно, но отметили еще отрезки, которые служат изображениями внешних сил и шарнирных давлений соответствующими буквами.

Мы еще раз обращаем внимание читателя, что не столько важно ясно представлять себе пространственную стержневую систему, проектирующуюся в данную плоскую, нежели правильно разметить плоские углы около каждой вершины. Обращаясь к нашей фиг. 143, мы заметим, что крайне трудно себе представить грани *VII* и *XIII*; ведь у этих граней есть общая точка H, а так как грань *XIII* проходит через ребро KH, лежащее в плоскости грани X, пересекающей грань *VII* по ребру BH, то плоскости граней *VII* и *XIII* не могут сливаться в одну, так как ребро KH не лежит в плоскости грани *VII*. Но мы не видим проекции ребра их пересечения и потому, конечно, крайне затруднены в представлении соответствующего многогранника. Но все же диаграмму удалось построить; результат достигнут, потому что правильно размечены плоские углы. Совершенно ясно, что плоский угол, обозначенный у нас *XIII*, не мог быть обозначен цифрой *VII*, хотя он как будто и принадлежит этой грани по виду чертежа. Ведь тогда отрезок *VII—X* изображал бы силу B_2, а отрезок *X—VII* должен был бы изображать силу K_2, чего явно не может быть.

Само собою разумеется, что, при желании, можно всегда правильно себе представить многогранник; мы только хотим указать, что нет надобности вдаваться в столь сложные пространственные представления; можно правильно довести задачу до конца и без этого. Чтобы правильно представить себе многогранник, нам нужно только заменить полупрямую l другой полупрямой, составляющей ее продолжение. Последняя пересечется с прямой KH и отрезок между точкой ее пересечения и L явится проекцией замыкающего ребра грани *VII*, которая окажется конечной. При этом проекция плоского угла *XIV* увеличится на 180°. Теперь, однако, исчезает ребро пересечения граней *XIII* и *XIV*, которым служила прежняя полупрямая l. Это обстоятельство может нас, однако, не смущать. Эти грани можно представить себе параллельными и уходящими в бесконечность. С этой целью нужно себе вообразить проектируемый многогранник так, чтобы направления ребер KH и LJ не пере-

секались, а означенные две грани были перпендикулярны к кратчайшему расстоянию между ними. Диаграмма наша, однако, ни в чем не претерпит изменений.

Легко уяснить себе, как будет строиться диаграмма напряжений более сложных цепей первого класса. Если бы цепь имела более трех звеньев, так что в точке A вместо поводка *1* примыкало бы двухповодковое звено, то вместо неизвестного напряжения одного стержня здесь оказались бы неизвестными напряжения двух стержней, как то у нас было в шарнире C, и вполне аналогично была бы произведена разметка на грани. Думается, что воспроизводить соответствующий чертеж и строить диаграмму будет совершенно излишне, раз общий принцип выяснен, а комбинации все будут повторяться.

Вместо этого мы займемся рассмотрением случаев, требующих более внимательного к себе отношения, разбирая их применительно все к той же цепи (см. фиг. 143).

Возможно, быть может, возражение со стороны лиц, привыкших внешние силы откладывать в определенном порядке, а затем обходить грани каждого узла в том же порядке, что построение диаграммы обошлось так гладко потому, что мы обходили грани в каждом узле по направлению часовой стрелки и узлы треугольных звеньев — в том же порядке. Между тем это не всегда возможно. Например, если бы вершина D лежала по другую сторону стержня CE, то обход вершин звена *II* пришлось бы совершать против направления движения часовой стрелки, обход же вершин звена *I* — по направлению движения ее. Быть может, тогда не удалось бы построить диаграмму так, чтобы каждое усилие повторялось бы в ней только по разу.

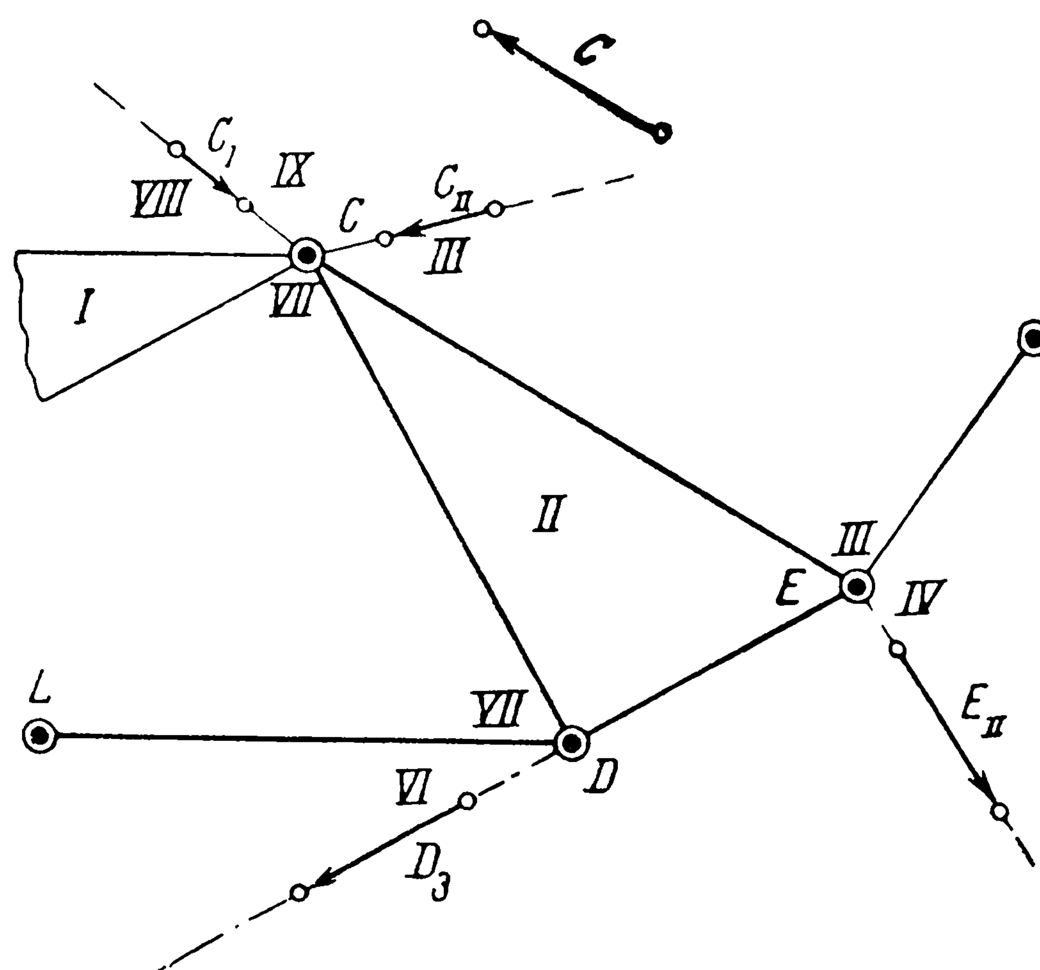
Мы не будем рассматривать нового примера, так как взятый нами пример (см. фиг. 143) позволяет нам показать, что направление обхода вершин треугольных звеньев не играет решительно никакой роли. При этом выяснится и другое обстоятельство, способное вызвать некоторое недоумение.

Допустим же, что с помощью кинематического метода было определено моровское напряжение поводка *3*, вместо поводка *4*.

На самом деле, нам незачем теперь прибегать к этому методу, потому что оно уже имеется у нас на диаграмме в виде отрезка *VI—VII*. Вопрос, следовательно, лишь в том, как произвести построение диаграммы, исходя из этого отрезка. Тогда необходимо начать с многоугольника равновесия узла D, затем перейти к узлу E и, наконец, к узлу C. Очевидно, что обход узлов грани *II* совершится против направления часовой стрелки, обход же узлов грани *I* — по часовой стрелке. Это и есть случай, подвергнутый нами сомнениям. Плоские углы и ребра в каждой из вершин будем обходить попрежнему по направлению движения часовой стрелки; можно было бы, конечно, поступать и обратно. Диаграмма изображена на фиг. 148.

Многоугольник равновесия узла D остается прежний. При переходе к узлу E мы наталкиваемся на затруднение. Нужно обойти стержни и прямые сил в узлах по направлению движения часовой стрелки, откладывая в то же время в том же порядке стороны многоугольника равновесия. С другой же стороны, необходимо, чтобы найти две неизвестные стороны этого многоугольника, сначала отложить известные силы и напряжения. В узле E эти оба условия, на первый взгляд, совместить никак нельзя. Известны напряжение стержня DE и сила вдоль GE и их нужно отложить сначала; но тогда при обходе приходится пропустить стержень CE и вернуться к нему уже движением против направления часовой стрелки, что представляет случай, не предусмотренный правилами Максвелла. Но этот случай возник не потому, что вершины одного треугольника мы обходим по одному направлению, вершины другого — по другому. Он мог бы представиться и при построении диаграммы фиг. 146, если бы только точку G мы там избрали внутри треугольника *II*. Равным образом, легко заметить, что избежать его не удалось бы и при обходе граней против направления движения часовой стрелки. Здесь все дело в том, что неизвестными оказались напряжения стержней, разделенных более чем одним плоским углом, именно двумя такими углами *III* и *IV*.

Выход из этого положения весьма простой. Он показан на фиг. 147; надо только за ребро, соответствующее силе E_{II}, принять другую полупрямую. Теперь между двумя стержнями, напряжения которых должны быть определены построением многоугольника равновесия узла E, имеется только один

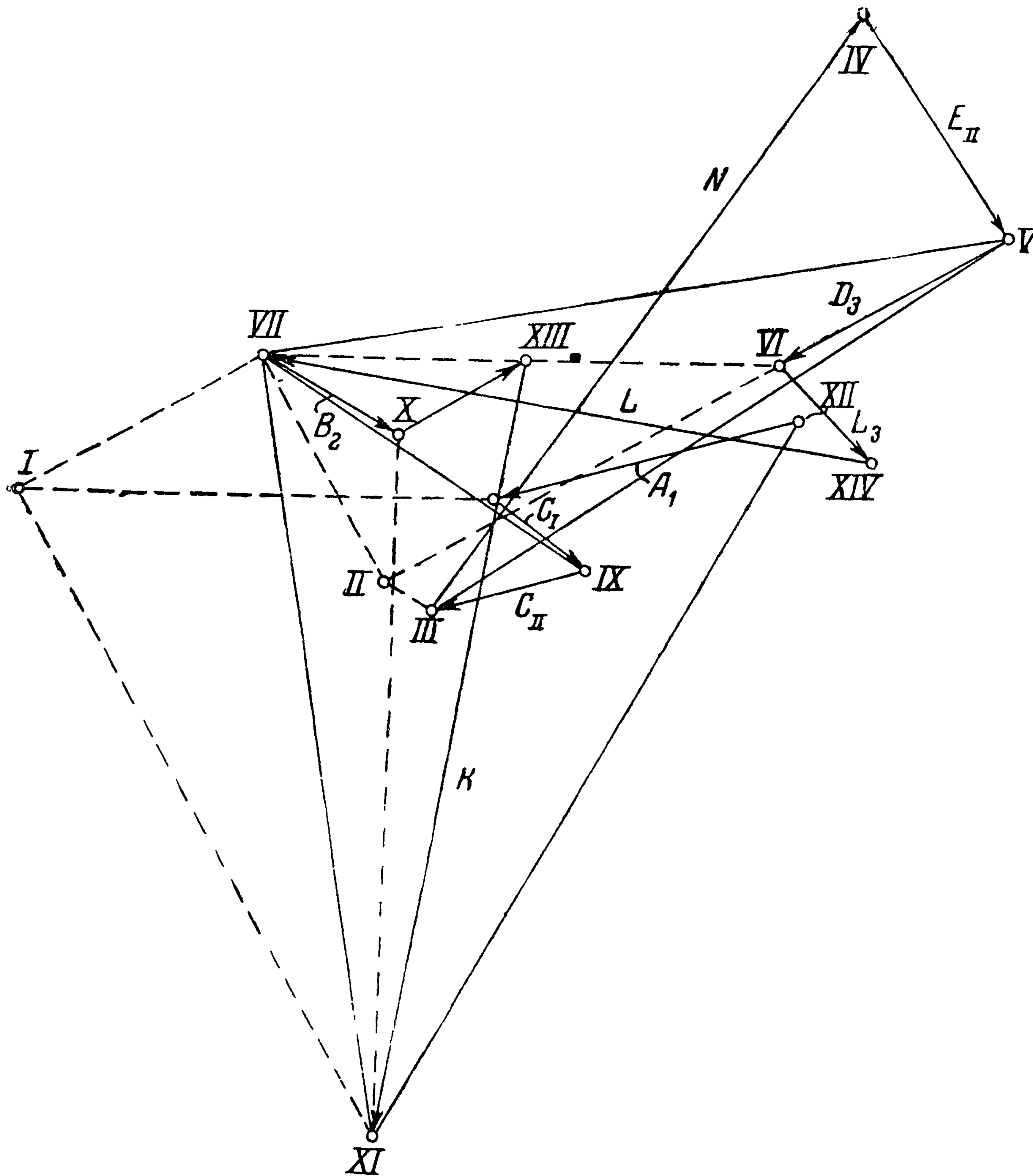


Фиг. 147.

плоский угол III. Диаграмма (см. фиг. 148) построится в дальнейшем без всяких затруднений, по указанному раньше шаблону, и потому описывать это построение будет излишне. В соответствии с изменившимся порядком обхода узлов и многоугольник внешних сил расположится несколько иначе.

Все же указанный прием не всегда приводит к цели. Полупрямую легко заменить ее продолжением, когда имеем дело с внешней нагрузкой узла, но сделать то же самое со стержнем фермы нельзя. Если бы, например, вместо поводка, прикрепленного в точке E, мы прикрепили в той же точке поводок, повернутый относительно первого на 180°, то указанная замена полупрямой E_{II} (см. фиг. 143) полупрямой того же наименования (см. фиг. 147) не привела бы к цели. Нужно было бы

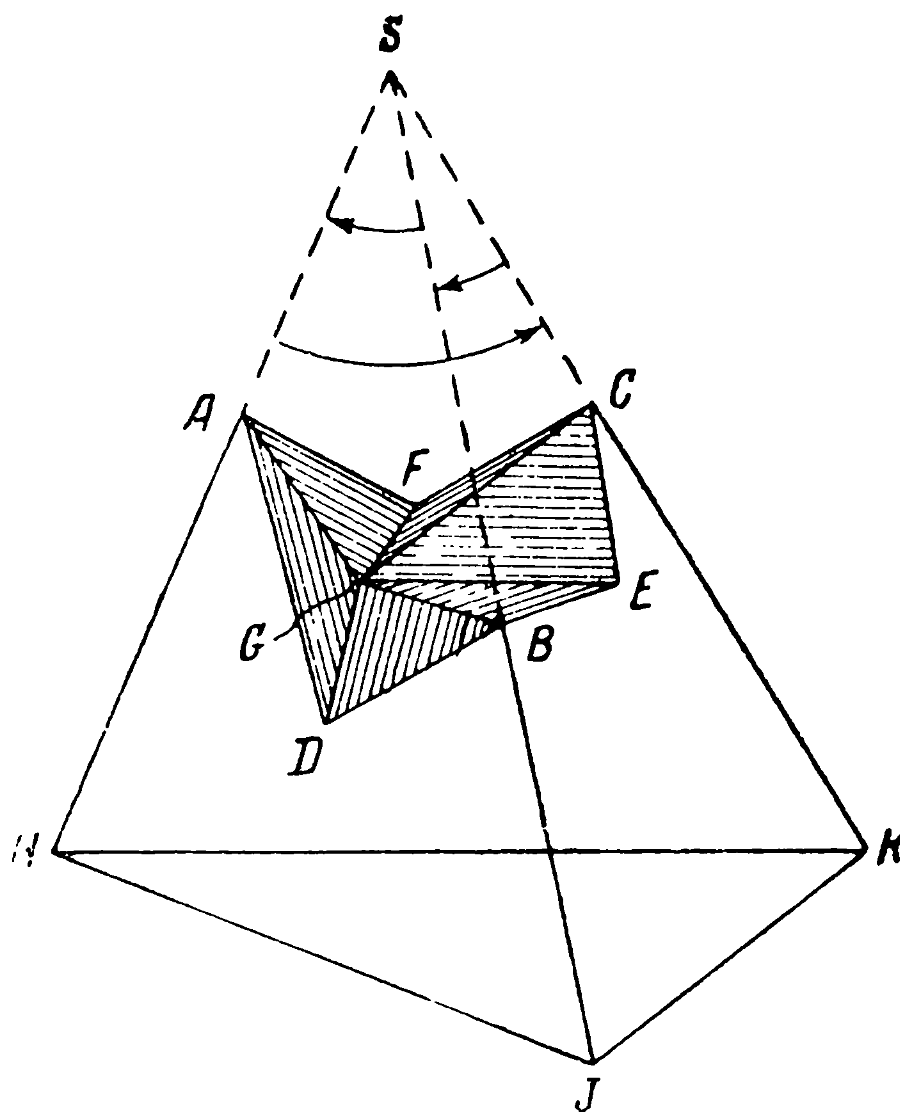
заменить стержень DE его продолжением по другую сторону точки E, что уже совсем изменит форму проектируемого многогранника.



Фиг. 148.

Чтобы радикально обойти затруднения указанного рода, необходимо ввести понятие о гранях, которые мы будем называть **возвратными**. Дело в том, что обход граней и плоских углов в вершине пространственного многогранника должен совершаться в определенном направлении. Но из этого вовсе

не следует, что в проекции многогранника должен иметь место обход непременно либо по часовой, либо против часовой стрелки. Если грани и ребра трехгранного угла S (фиг. 149) мы будем обходить в одном и том же направлении, то обход этот будет охарактеризован показанными на чертеже стрелками, если мы воспроизведем по имеющейся на чертеже проекции пространственный образ этого угла. Между тем на чертеже две стрелки соответствуют вращению около S по часовой стрелке, одна — вращению против последней. Если обход граней, совершаемый в пространстве все по одному направлению, сопровождается на чертеже движением по какой-либо грани в направлении, обратном принятому, то такую грань будем называть **возвратной** по отношению к двум ребрам, ограничивающим ее плоский угол в данной вершине.



Фиг. 149.

В вершине S все двугранные углы между смежными гранями, сходящимися в этой вершине, выпуклые. Но если иметь в виду, что двугранные углы могут быть и вогнутыми, то легко себе представить, что возможны чередование и многократная смена в данной вершине прямого и возвратного обходов. Мы уже и раньше имели дело с проекциями плоских углов, превышающими 180°, как, например, углы XII и V (см. фиг. 143). Такие углы могут образоваться только в многогранниках с вогнутыми вершинами, где не могут не быть вогнутые дву-

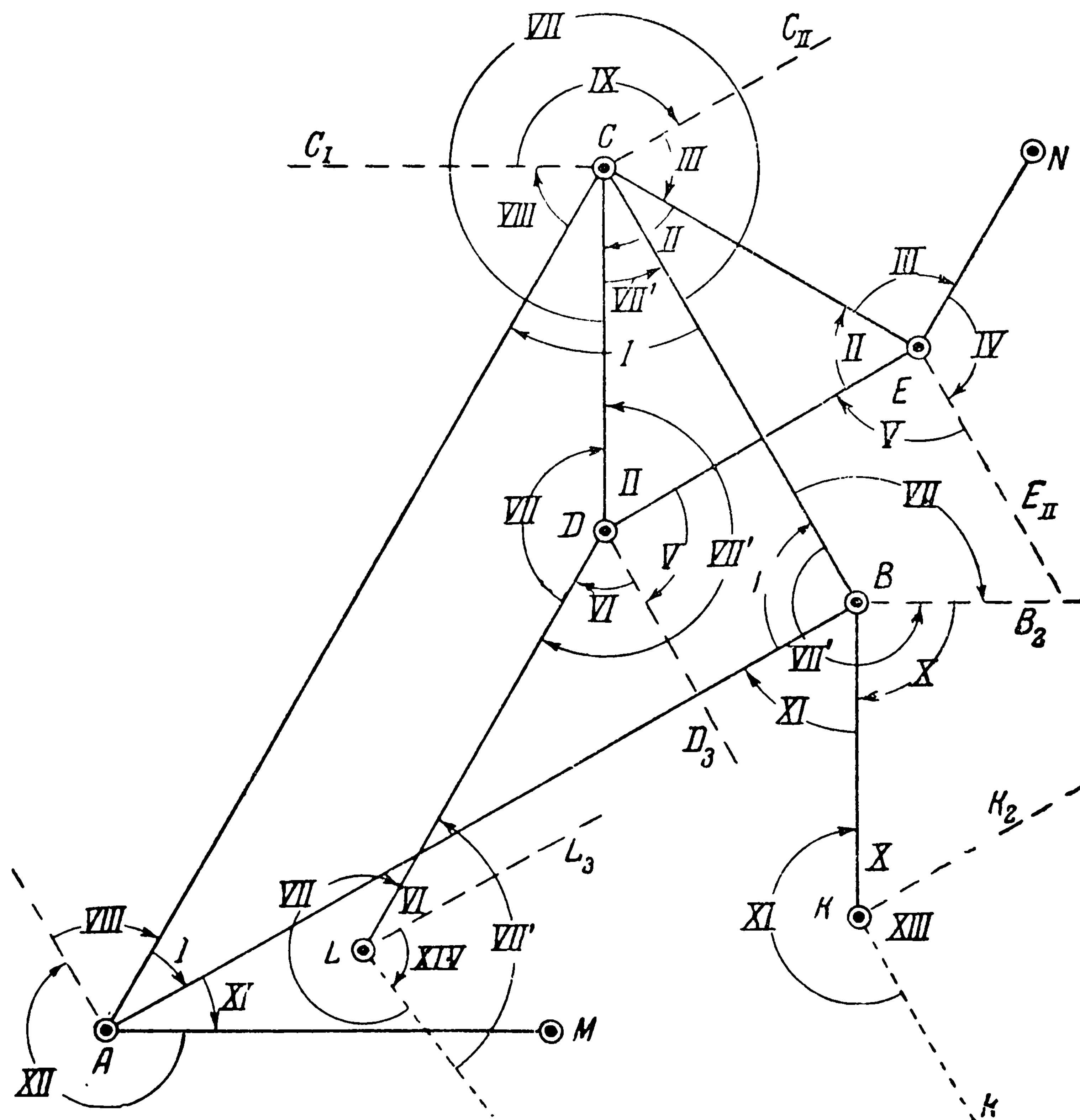
гранные углы. Пример такой вершины изображен на фиг. 149, где срезана вершина трехгранной пирамиды, так что грани оказались обрезанными по ломаной *ADBECFA*. Затем на место выпуклой вершины *S* поставлена вогнутая *G*, в которой сходятся шесть треугольных граней, перекрывающих образовавшееся в пирамиде отверстие. Очевидно, что плоские углы при *D*, *E* и *F* в гранях, оставшихся от пирамиды, могут быть больше 180°, а потому могут быть больше и проекции их на какую-либо плоскость.

Вооружившись этими замечаниями, приступаем к построению диаграммы моровских напряжений и шарнирных давлений в четырехповодковой группе в расположении, указанном на фиг. 150. Хотя размеры звеньев и поводков здесь избраны другие, чем на фиг. 143, но, если нормальная цепь, изображенная на последней, принадлежит механизму, то аналогичное расположение ее могло бы получиться в результате изменения конфигурации механизма, при котором угол *VII* при вершине *C* сначала дошел бы до ноля, а затем стал бы отрицательным. Уже одно это соображение указывает нам, что, вероятно, на фиг. 150 соответствующий плоский угол при вершине *C* нужно будет отсчитывать в обратную сторону. В этом мы убедимся независимо от сравнения с фиг. 56 *.

Итак, допускаем, что напряжение *III—IV* поводка *EN* найдено кинематическим методом; отлагаем соответствующий отрезок на диаграмме напряжений. На фиг. 150 мы предполагаем силы распределенными на узловые точки, причем на чертеж нанесены только прямые действия этих сил, величина же их

* Не следует думать, что введение понятия о возрастных гранях устраняет определенность порядка обхода граней в проекции многогранника. Это следует прежде всего из того, что в пространственной системе грани будут обходиться по порядку, затем же и из того соображения, что если только в проекции грани располагаются по две стороны проекции ребра, то переход от одной грани к другой может совершаться лишь в соответствии с условленным направлением. Возвратное направление получится только для одной из тех граней, которые в проекции располагаются по одну сторону ребра их пересечения.

будет откладываться в диаграмме (см. фиг. 151). Строим многоугольник $III—IV—V—II—III$, соответствующий обходу плоских углов в вершине E, указанному стрелками. Вершина D тоже не представит ничего нового и без затруднений постро-

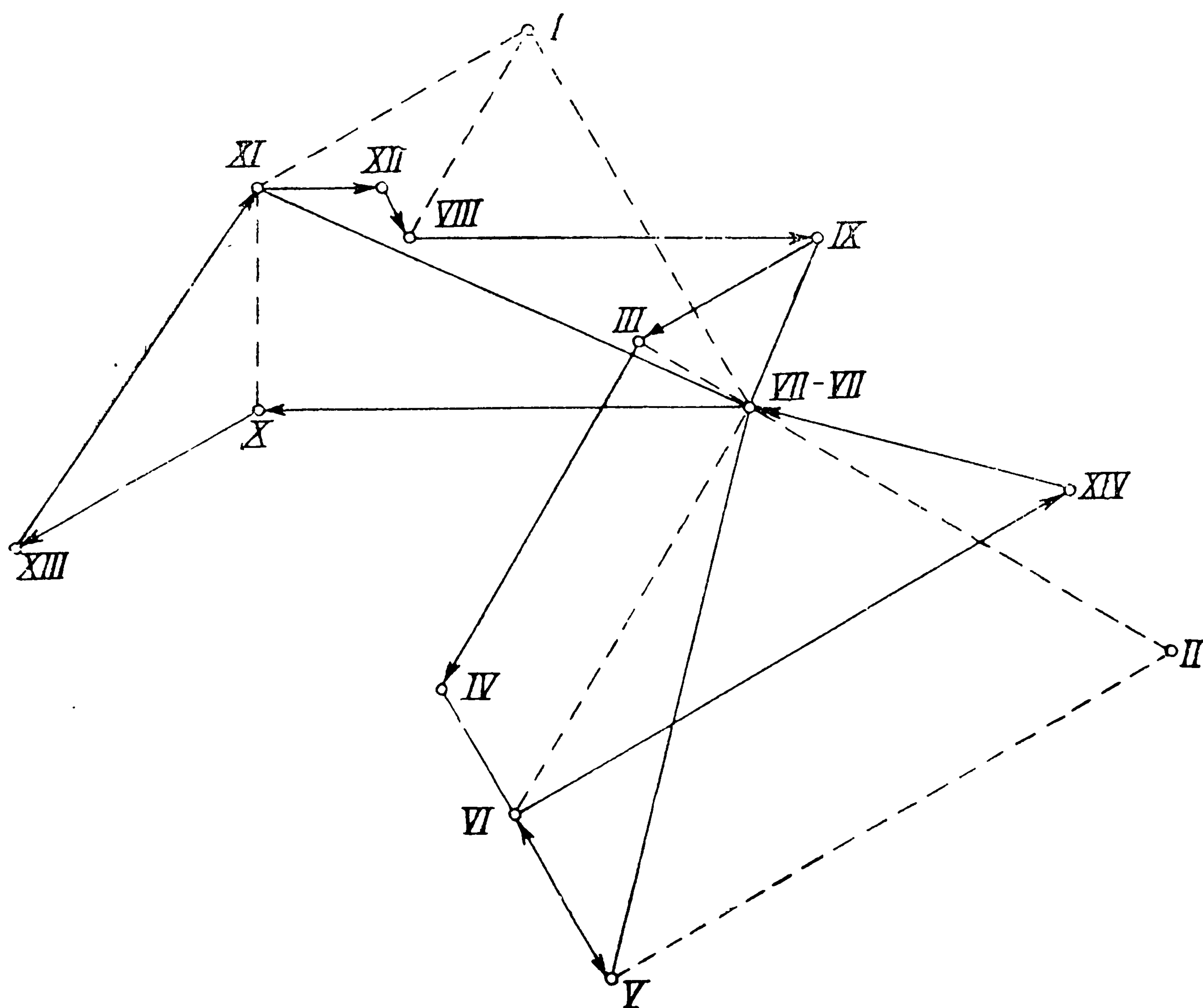


Фиг. 150.

ится многоугольник $II — V — VI — VII — II$. После этого переходим к вершине C.

Чтобы иметь возможность начать обход с вершины $VIII$, наносим сначала вершину IX, так как отрезок $IX—III$ известен, потом вершину $VIII$, так как известен отрезок $VIII—IX$. Теперь, однако, при обходе плоских углов в вершине C

мы наталкиваемся на новое обстоятельство. Углы *VIII—IX—III* проходятся в обычном порядке, дальше идет грань *II*; но плоский угол ее заключен между стержнями *CE* и *CD*, и потому нам приходится пройти мимо стержня *CB*, пропустив его. Дойдя до стержня *CD*, мы, однако, должны захватить еще



Фиг. 151.

два стержня с неизвестными напряжениями *CA* и *CB*. Так как стержень *CA* ограничивает плоский угол *VIII*, с которого мы начали обход, то перейти от стержня *CD* непосредственно к стержню *CA* значило бы закончить обход, не захватив пропущенного стержня *CB*; следовательно, вернуться к последнему можно т о л ь к о н е п о с р е д с т в е н н о после стержня

CD. Таким образом, грань *VII'* оказывается возвратной * относительно ребра *CD*, а обход плоских углов будет совершаться в порядке *VIII—IX—III—II—VII—I—VIII*. Совершенно ясно, что никаким другим способом обход всех без исключения стержней и всех плоских углов не может совершиться. В то же время обойдено затруднение, создавшееся вследствие того, что два стержня *CA* и *CB* с неизвестными еще напряжениями разделены стержнем *CB*, напряжение которого уже приведено в известность.

Но теперь возникает еще вопрос. Мы сказали, что грань *VII'* оказалась возвратной относительно ребра *CD*, а между тем в вершине *D* мы ее возвратной не считали. Очевидно, что это противоречит геометрическому представлению о многограннике. Ясно, что точки грани *VII*, лежащие в смежности с ребром *CD*, могут проектироваться только по одну сторону ребра, потому что ребро составляет границу грани, и точки последней расположены лишь по одну его сторону.

Между тем плоский угол *VII*, у вершины *D*, примыкающий тоже к стержню *CD*, расположен по другую сторону его, сравнительно с плоским углом *VII'* при точке *C*. Это показывает, что и в вершине *D* грань *VII* нужно было считать возвратной, т. е. плоский угол *VII* следовало заменить углом *VII'*. Такая замена, однако, не изменит, как легко убедиться, ***порядка обхода стержней***, следовательно, и порядка сторон многоугольника равновесия. Вполне в соответствии с этим вместо угла *VII'* в вершине *C* можно было бы взять угол *VII*, дополняющий его до 360°, так как от этого порядок обхода стержней, расположенных около вершины *C*, не изменился бы; поэтому порядок сторон многоугольника равновесия остался бы прежний.

---

* Отмечая плоский угол цифрой *VII'*, будем помнить, что грань, которой он принадлежит, есть все та же грань *VII*, содержащая стержень *CD*; поэтому во взаимном многограннике цифрами *VII* и *VII'* должна быть обозначена одна и та же вершина. Штрих в обозначении плоского угла грани *VII* при точке *C* лишь отмечает, что проекция плоского угла должна быть пройдена в направлении, обратном принятому.

Таким образом, *вместо плоского угла возвратной грани можно с тем же успехом, продолжая обход все в одном и том же направлении, взять угол дополнительный до 360°.* У нас различие в том, как мы будем проходить плоский угол грани VII, скажется лишь в наименовании вершины взаимного многогранника. Если мы в обеих вершинах учтем возвратный характер грани, то наименование вершины будет VII'; если в обоих случаях будем совершать обход в прямом направлении, причем в вершине C обход в проекции составит дважды 360°, то наименование вершины будет VII. Если же мы не пожелаем обратить внимание на то, что в вершине D грань не считалась возвратной, а в вершине C считается таковой, то обозначение вершины будет $VII = VII'$.

Что касается полного обхода, содержащего кратное число раз 360°, то он иногда может соответствовать реальному представлению о многогранном угле в данной вершине, если число граней достаточно. При трех гранях (см. фиг. 149) даже обход в 360°, заменяющий возвратное движение по одной грани, не соответствует представлению о реальном объекте. Но если мы целью ставим построение диаграммы, а не составление себе представления о взаимном многограннике, то эта цель может быть достигнута вполне механически как с помощью возвратных граней, так и с заменяющим их прямым обходом, содержащим нередко в полном виде целое число раз по 360°. Поэтому можно рекомендовать не отмечать вовсе штрихом наименование плоского угла грани возвратной, т. е. в нашем случае брать из двух возможных плоских углов в каждой из вершин C и D, а также следующей за ними вершины B тот из двух возможных углов, который покажется удобнее, и обозначить его цифрой VII, независимо от того, остановились ли мы на возвратном обходе или на дополнительном до 360°. Не излишне, однако, будет предупредить, что когда полный обход составляет кратное 360°, то разметка плоских углов в дальнейших вершинах затрудняется и легко впасть в ошибку, ввиду чего многократного обхода вершины следует избегать.

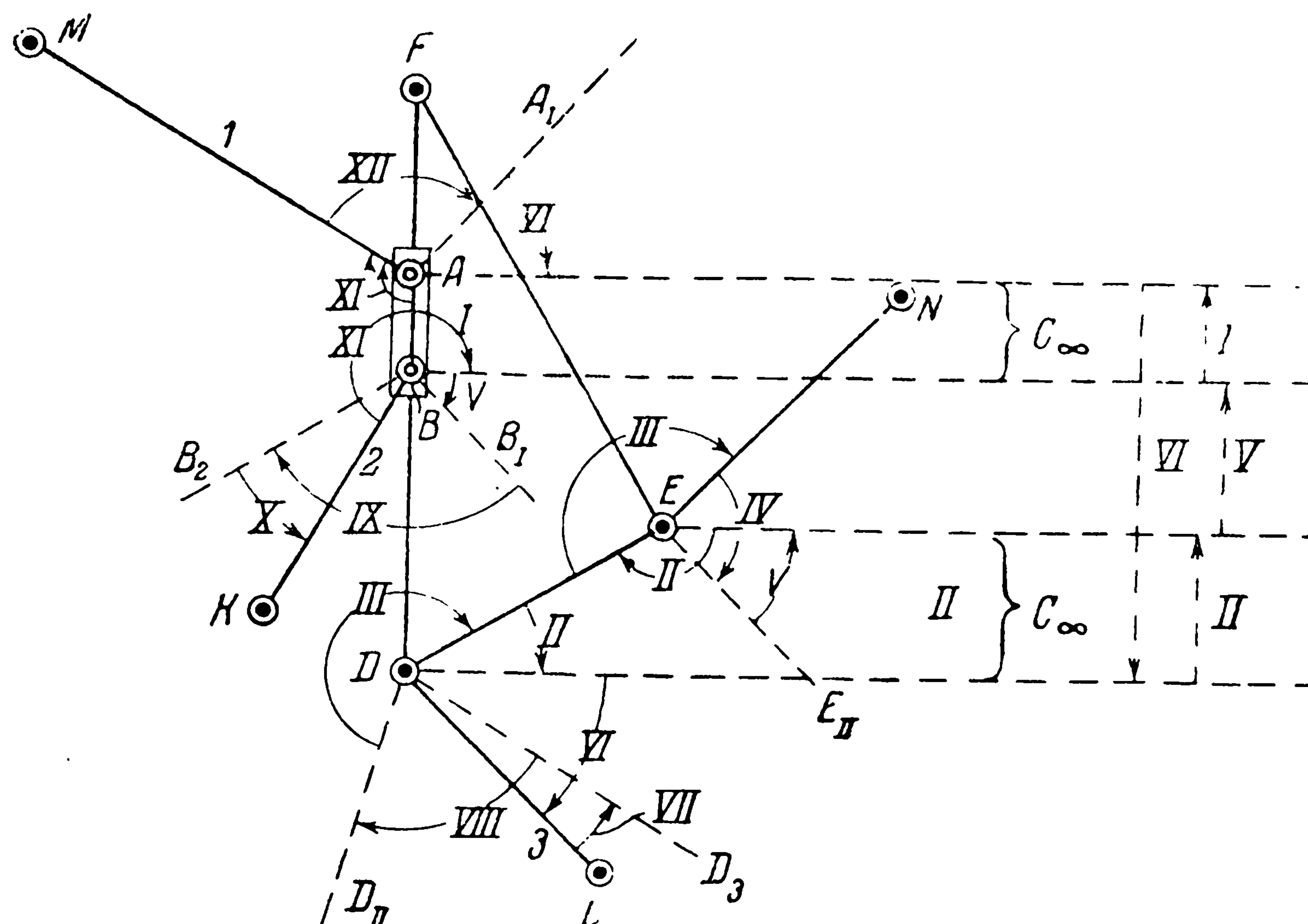
После сделанных указаний дальнейшее построение диаграммы моровских напряжений (фиг. 151) не представит уже затруднений, и мы на нем останавливаться не будем. Некоторые затруднения представит только нахождение в ней отрезка, изображающего давление в шарнире C. Чертеж фиг. 150 не даст нам на это непосредственного ответа; придется рассмотреть многоугольник равновесия узла C. Если мы удалим звено II вместе с силой C_{II}, то от многоугольника равновесия останутся только стороны $VII'—I—VIII—IX$, так что многоугольник получится разомкнутым; замыкающая, т. е. $IX—VII'$, изобразит давление звена II на I, передаваемое через шарнир C. Обозначения на диаграмме, принятые раньше, т. е. многоугольник внешних сил отмечен стрелками в концах последних, моровские напряжения — пунктирной чертой, шарнирные давления — сплошной чертой, но без стрелок.

Мы прибегли к свойствам взаимных многогранников, чтобы облегчить себе нахождение надлежащего порядка построения диаграммы напряжений только, когда дошли до четырехповодковой группы. Очевидно, что и в случае групп двухповодковой и трехповодковой использование свойств взаимных многогранников и введение вытекающих из них обозначений будет только целесообразно. В особенности эти обозначения важны, когда несколько сторон силового многоугольника лежат на одной прямой, где любые другие обозначения окажутся недостаточными. Так, например, на фиг. 159 отмечен отрезок B_2 и всякий сочтет отрезок $XII—XI$ за изображающую его длину. Между тем, сравнив наименование вершин взаимного многогранника с наименованием граней данного (см. фиг. 157), увидим, что B_2 изображается отрезком $X—XI$.

Нам приходится, однако, остановиться еще на особых случаях, когда вершины одного из многогранников удаляются в бесконечность, и думается, что рассмотреть особенности этих случаев будет целесообразнее всего на примере более простом, каким является четырехповодковая цепь, так как сказанного будет достаточно, чтобы иметь возможность разбираться

впоследствии без дальнейших подробных указаний и в случае цепей более сложных.

Рассмотрим же случай, когда шарнир C (см. фиг. 143) удаляется в бесконечность вследствие замены пары вращения поступательной парой. Четырехповодковая цепь такого рода изображена на фиг. 152; звено I прежней цепи преврати-



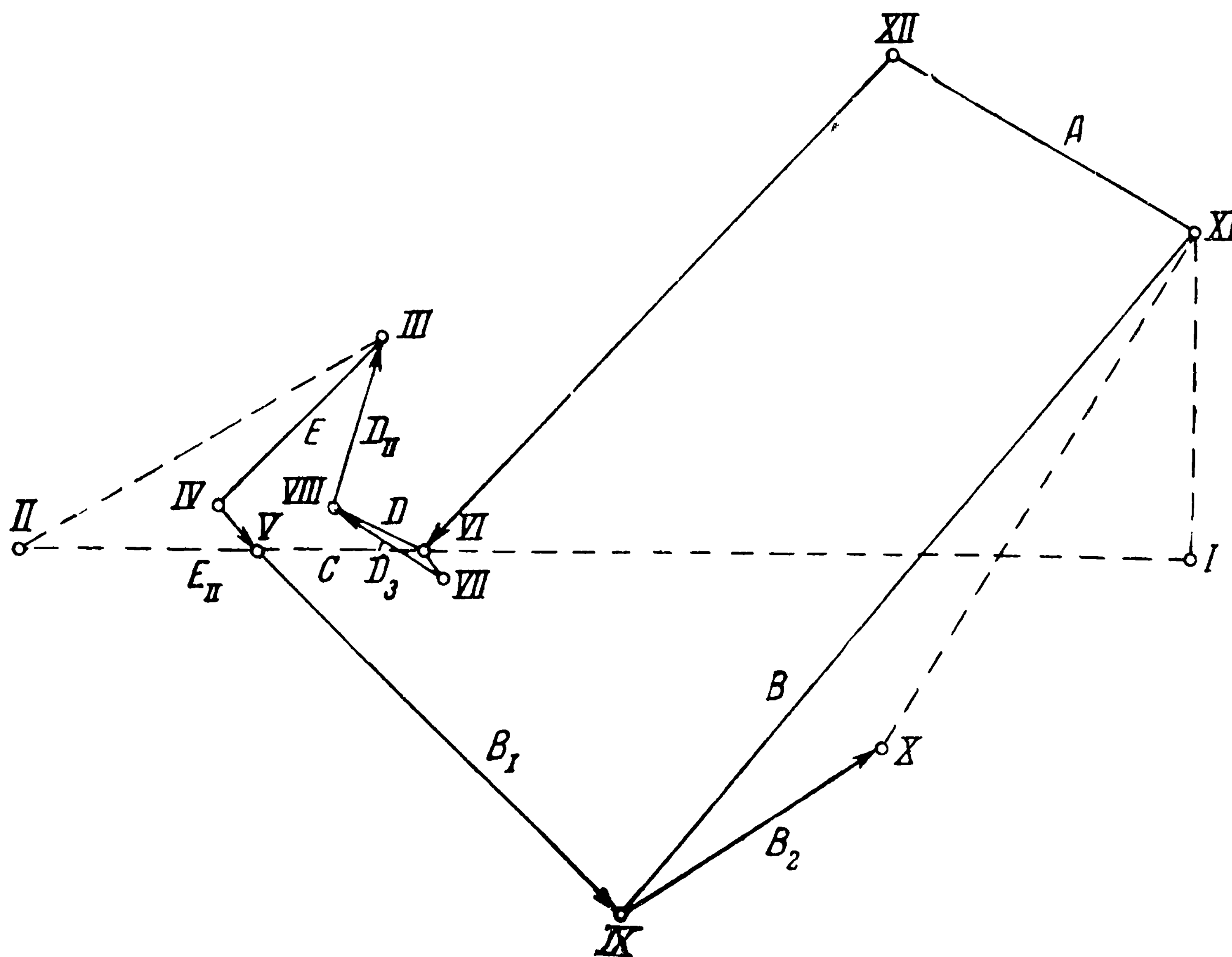
Фиг. 152.

лось в ползушку, двигающуюся по стороне DF треугольного звена DEF, заменяющего прежнее звено II. Нанесем на чертеж воображаемые стержни AC, BC, DC, EC, которые получатся, если уничтожить пару скольжения и перейти к воображаемому, бесконечно удаленному шарниру C. Эти стержни изображены пунктиром и попарно соединены скобкой с обозначением $C\infty$.

Приложенные силы разложены на лежащие в конечной части чертежа шарнирные точки, что, однако, не обязательно. Нагруженными оказались, кроме неподвижных точек K, L, M, N, об определении давлений в которых здесь не будет

вовсе речи, шарнирные A — силой A_I, B — силами B_I и B_2, D — силами D_3 и D_{II}, E — силой E_{II}.

На фиг. 152 показаны только прямые действия этих сил, величины же их отложены на диаграмме фиг. 153, где отмечены и направления. Прежде всего размечены грани I и II на фиг. 152, которым принадлежит общая вершина C, затем приступлено к разметке плоских углов. При этом стержни



Фиг. 153.

FD и FE не учитывались вовсе, потому что точка F не нагружена и потому моровские напряжения их — заведомо ноли; в противном случае необходимо было бы их учитывать, занумеровав треугольник FDE как самостоятельную грань, отличную от грани II, каковой является треугольник DEC, уходящий в бесконечность. При нумерации плоских углов имелось в виду, что кинематическим методом будет предварительно определено

напряжение поводка *4*; каких-либо особенностей, не оговоренных в предыдущем, при разметке плоских углов не оказалось.

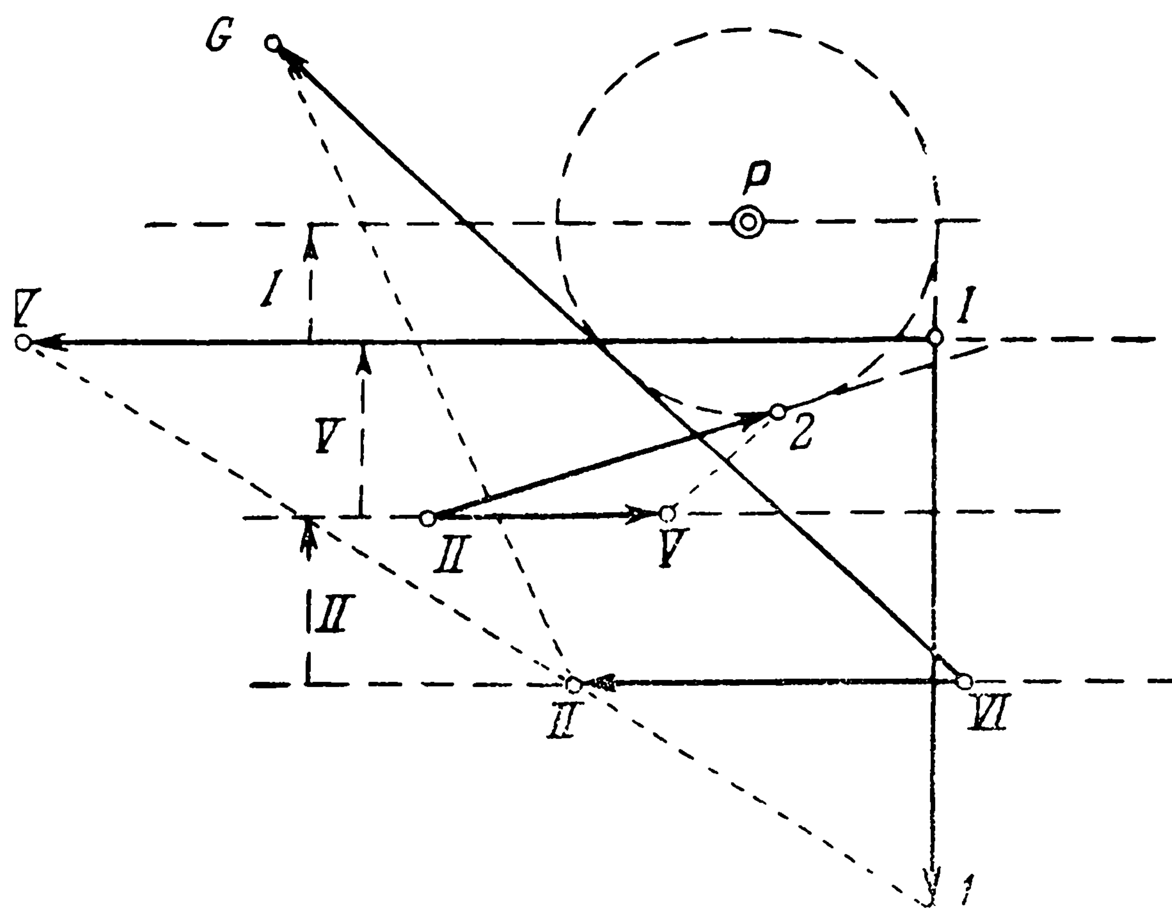
Многоугольник моровских напряжений стержней, сходящихся в узлах D и E, включая и напряжения бесконечно длинных стержней, строится без каких-либо затруднений, которые возникнут лишь при переходе к одному из узлов A и B. В любом из них, если мы не построим раньше многоугольника равновесия бесконечно удаленного узла C, окажется по три неизвестных напряжения, именно стержня AB, поводка и бесконечно длинного стержня. Что же касается многоугольника равновесия узла C, то в нем неизвестны два напряжения двух стержней, образующих ребра грани I, но одного только полигонального метода недостаточно, чтобы их найти.

В самом деле, размечая вместо плоских углов в бесконечно удаленной вершине C расстояния между параллельными, мы из многоугольников равновесия узлов D и E имеем нанесенными на чертеж напряжения $VI—II$ и $II—V$. Не будь отрезки, изображающие напряжения $V—I$ и $I—VI$ параллельными, нам оставалось бы только из точек I и VI провести прямые, соответственно параллельные стержням $V—I$ и $I—VI$ до взаимного пересечения в точке I. В данном же случае прием этот неприменим, потому что вместо пересекающихся прямых окажутся две прямые, сливающиеся всеми своими точками; положение вершины I окажется поэтому н е о п р е д е л е н н ы м.

Это обстоятельство не значит вовсе, что нельзя определить напряжений стержней $V—I$ и $I—VI$; нужно только для этого выполнить дополнительное построение. Очевидно, что в узле C задача сводится к уравновешиванию двух параллельных сил двумя параллельными им, линии действия которых даны. Эта задача, как известно, решается графически с помощью веревочного многоугольника. Мы покажем другой прием решения с помощью приводящей окружности. На фиг. 154 показаны четыре прямые, сходящиеся в точке C, и нанесены силы $VI—II$ и $II—V$. Из центра моментов P на прямой $I—VI$ опишем приводящую окружность. Сила $V—I$ определится из условия, чтобы мо-

мент ее относительно центра *P* по величине был равен, по знаку — обратен сумме моментов сил *VI—II* и *II—V*. На самом деле, определена сила *I—V*, дающая момент и по знаку не отличающийся от указанной суммы моментов.

Пользуясь указанными в теории рычага соотношениями, поворачиваем силы *II—V* и *VI—II* так, чтобы они оказались



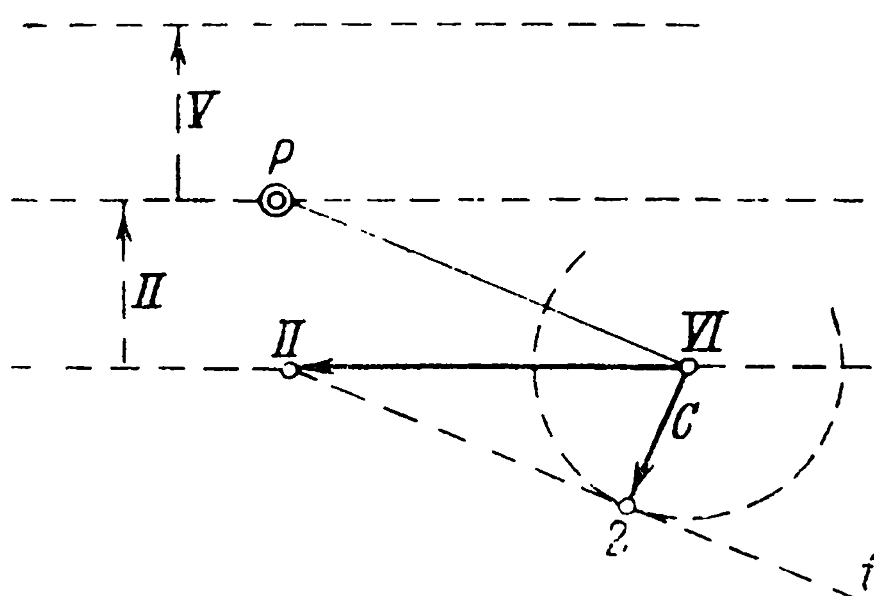
Фиг. 154.

касательными к приводящей окружности. Так получены силы *VI—6* и *II—2*; разность их отложена в виде силы *I—1*, тоже касательной к той же окружности и с точкой приложения *I* на прямой *V—I*; затем сила *I—1* повернута около своей точки приложения до совпадения с направлением последней прямой. Так получена сила *I—V*, представляющая моровское напряжение одноименного с нею бесконечно длинного стержня: последняя, с учетом масштаба чертежа, отложена затем на фиг. 153, причем положение вершины *I* определилось. Так как вершина *VI* уже имелась раньше на диаграмме, то одновременно определилось и напряжение *I—VI*. После этого моровские напряжения стержней, сходящихся в шарнирных точках *A* и *B*, определяются без каких-либо затруднений.

Переходим к определению шарнирных давлений. Здесь, однако, возникает вопрос о том, будут ли последние одинаковы для данной системы, в которой имелась ползушка AB, и для заменившей ее, в которой ползушка AB представляет уже простой стержень и, кроме того, прибавилось еще четыре удаляющихся в бесконечность стержня. На этот вопрос можно дать ответ с общей точки зрения. Кинематически связи обеих систем эквивалентны, а потому, если бы мы захотели опрецелить шарнирные давления кинематическим методом, что вполне возможно, то должны получиться одинаковые шарнирные давления. Можно рассмотреть вопрос и непосредственно. Стержень FD оказывает некоторое давление на ползушку, ползушка — равное и противоположное давление на стержень. Это давление не приложено в какой-либо шарнирной точке, и потому, приступая к определению моровских напряжений, нужно его разнести на узловые точки, каковыми для ползушки являются точки A и B, для жесткого треугольника FDE — точки D и E. Разлагаемое давление перпендикулярно к направлению стержня FD, а потому его составляющие можно выбрать тоже перпендикулярными к этому направлению; тогда две пары составляющих, из которых одна приложена в звене I (ползушке), другая — в звене II, окажутся направленными по параллельным прямым, сходящимся в нашей точке C_∞. Эти составляющие нам неизвестны и определяются в связи с построением диаграммы моровских напряжений. Но, вводя их, мы только заменяем действие кинематической связи, каковой является пара скольжения, действием сил, которые удается определить. Такая замена вполне законна и не повлияет на величину шарнирных давлений. В предыдущем место этих внешних, приложенных в точках A, B, D, E сил занимали напряжения воображаемых бесконечно длинных стержней, что с точки зрения получаемого результата совершенно одинаково, так как приемы определения их тождественны приемам определения внешних сил, заменивших действие ползушки.

Согласно только что сказанному, давление ползушки на

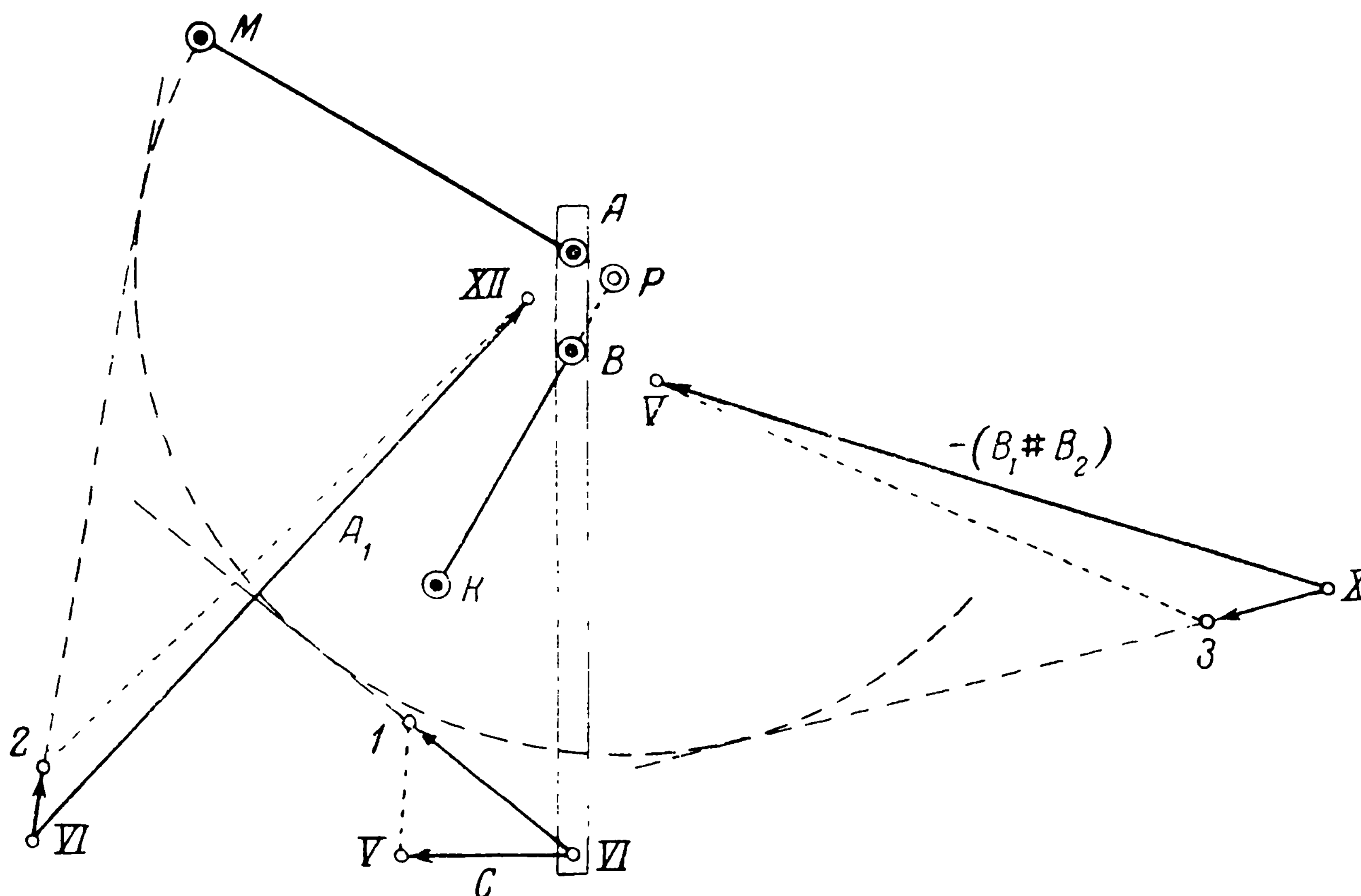
звено II будет равнодействующая сил $V—II$ и $II—VI$ и по величине выразится отрезком $V—VI$. Остается только определить прямую действия этого давления, для чего диаграммы (см. фиг. 153) недостаточно. Надо просто произвести сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны, с помощью веревочного многоугольника или каким-либо другим способом. На фиг. 155 мы это делаем с помощью закона поворота сил в рычаге, исходя из того, что момент равнодействующей относительно точки, лежащей на прямой $II—V$, должен равняться моменту силы $II—VI$. На фиг. 155 взята, однако, сила $VI—II$, потому что при исполнении этой фигуры рассматривалось давление в бесконечно удаленном шарнире C, причем в этом рассмотрении давление стержня на ползушку будет выражаться равнодействующей давлений $VI—II$ и $II—V$; эту известную нам равнодействующую назовем C. Радиусом, равным длине $VI—V$, изображающей силу C, проводим окружность с центром в VI (см. фиг. 155) и из точки II — касательную к этой окружности; затем из VI проводим прямую, параллельную этой касательной до пересечения в P с прямой $II—V$; тогда $P—VI$ будет искомым плечом силы C. Правильность построения следует из того, что относительно центра моментов P сила C получается по правилам поворота силы около ее точки приложения из силы $VI—II$. Остается только плечо $P — VI$ повернуть около P в положение, перпендикулярное к силе $VI—II$; положение силы C, полученное после этого, указано на фиг. 152.



Фиг. 155.

Определение давлений в шарнирных точках A, B, D и E ничем не будет отличаться от ранее рассмотренных случаев: давления эти отмечены на диаграмме фиг. 153.

Правильность определения давления C проверена, кроме того, еще на фиг. 156. Устранено звено II с его поводками, а действие его на ползушку заменено силой C. Последняя в механизме, составленном из стержней MA, AB и BK, в котором M и K — неподвижные точки, должна уравновешивать силу A_I, приложенную к точке A, и равнодействующую сил B_I, B_2,

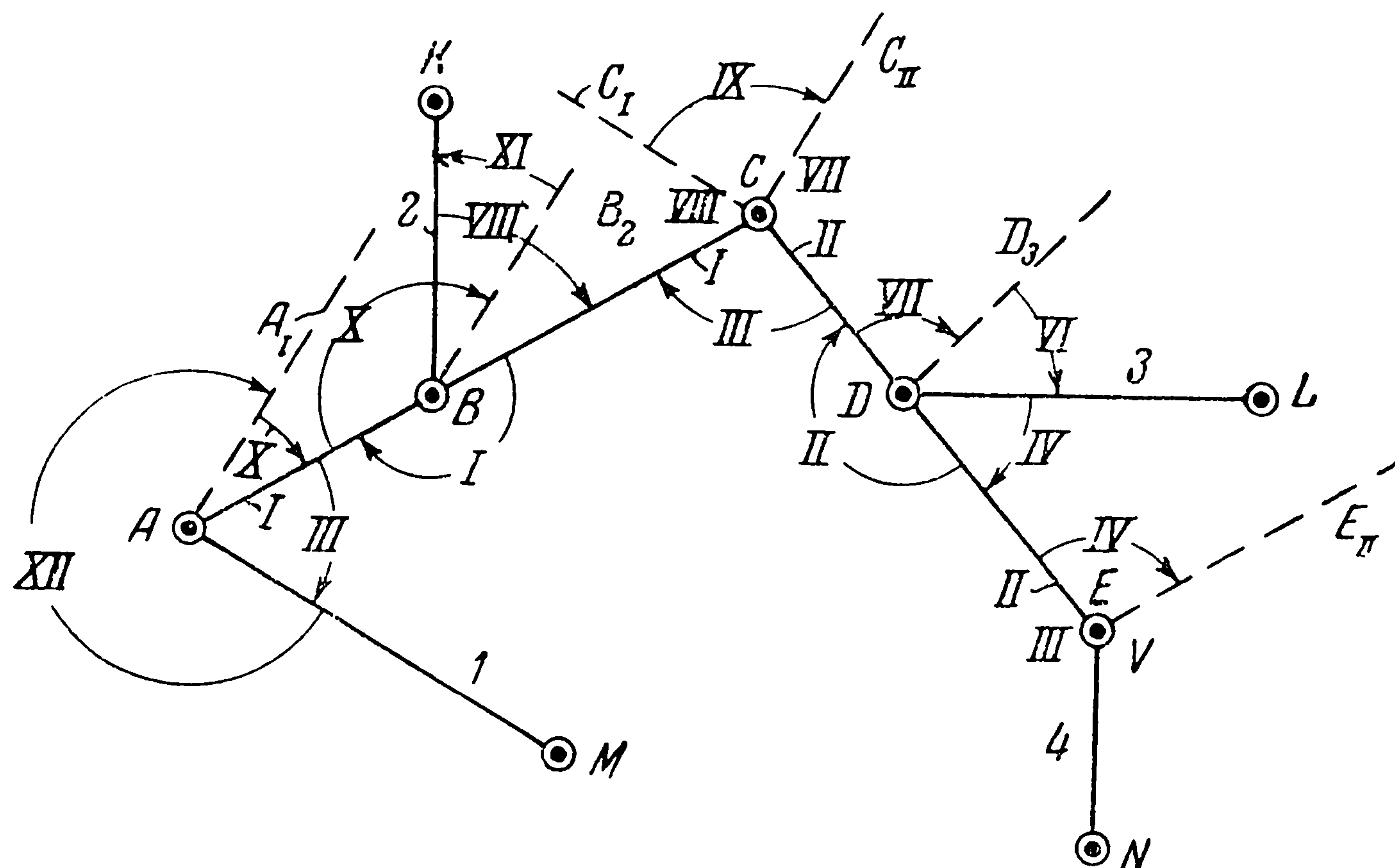


Фиг. 156.

приложенных в точке B. Вместо указанных здесь сил, из соображений удобств чертежа, взяты обратные им по знаку VI—XII и X—V, так что сила C будет последней эквивалента. Мгновенным центром абсолютного движения звена AB служит точка P и нужно определить, будет ли сумма моментов сил, приложенных в A и B, равна моменту силы C. Проводим из центра P приводящую окружность и поворачиваем силы так, чтобы они стали касательными к означенной окружности, по тем же правилам, как и в рычаге; оказывается, что действительно сумма отрезков VI—2 и X—3 равна отрезку VI—1.

Этим мы будем считать исчерпанным вопрос о построении диаграмм Максвелла для нормальных цепей в случае замены пары вращения парой скольжения. Приведенные здесь рассуждения mutatis mutandis будут во всех подобных случаях повторяться.

Переходим к другому случаю, где, наоборот, вершины взаимного многогранника удаляются в бесконечность вследствие



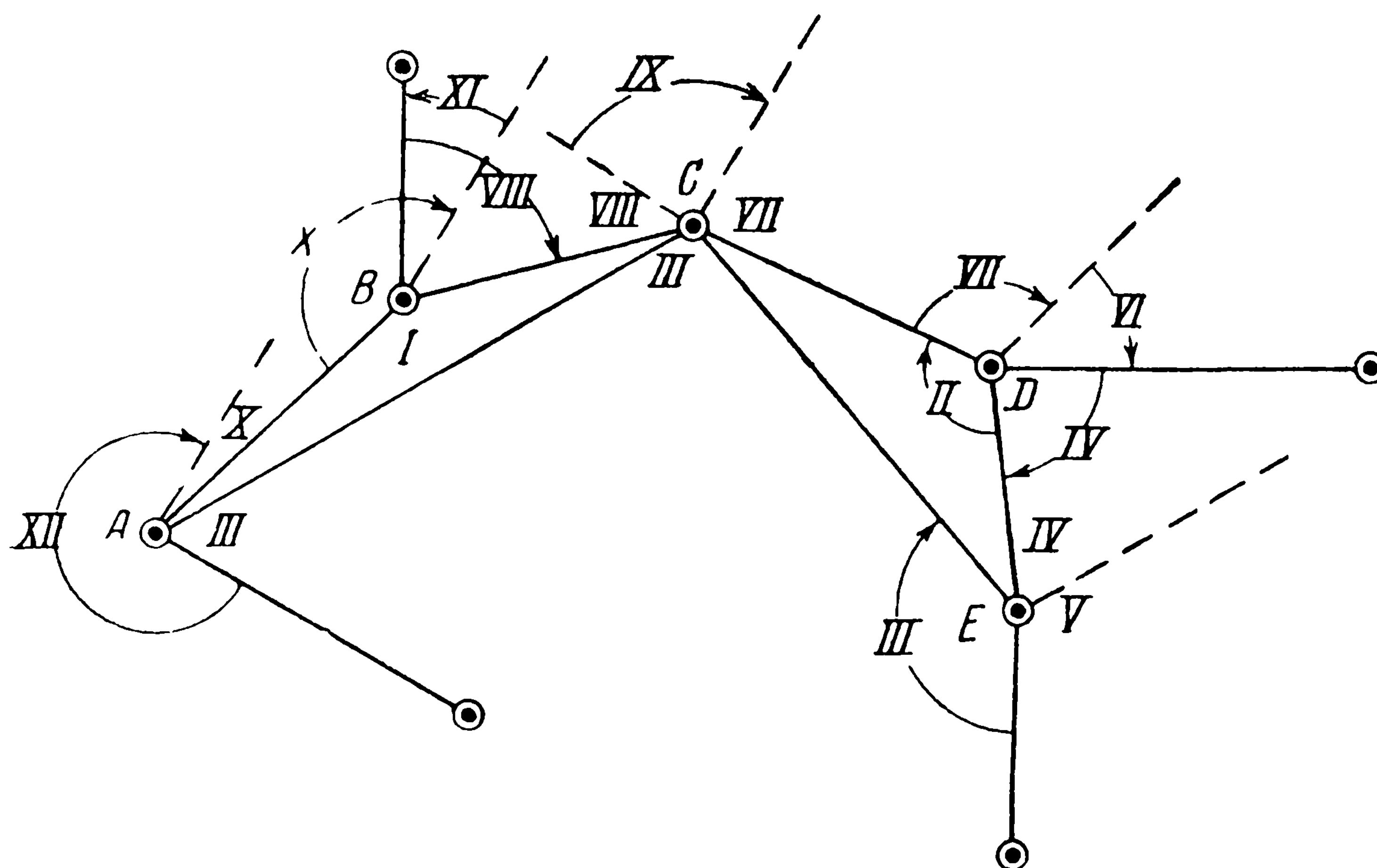
Фиг. 157.

того, что моровские напряжения некоторых стержней бесконечно велики. Последнее обстоятельство не должно вызывать удивления или предположений, что система не осуществима на практике, потому что мы знаем, что моровские напряжения — величины совершенно фиктивные, не имеющие ничего общего с действительными напряжениями, и потому определение их есть лишь подготовительный этапный пункт для нахождения шарнирных давлений.

Упомянутое обстоятельство обнаружится всякий раз, когда три шарнира одного или обоих треугольных звеньев *I* и *II* (см. фиг. 143) расположатся на одной прямой. Тогда сумма двух сторон треугольника окажется равной третьей его стороне; заменяя стороны стержнями, мы придем к случаю

треугольной фермы, напряжения стержней которой будут равны, как известно, бесконечности, если нагрузки узлов могут быть произвольными. Подобного рода случай изображен на фиг. 157.

Чтобы удобнее представить себе, как произведена разметка плоских углов, будем рассматривать систему фиг. 157, как предельный случай системы фиг. 158, в которой углы треуголь-



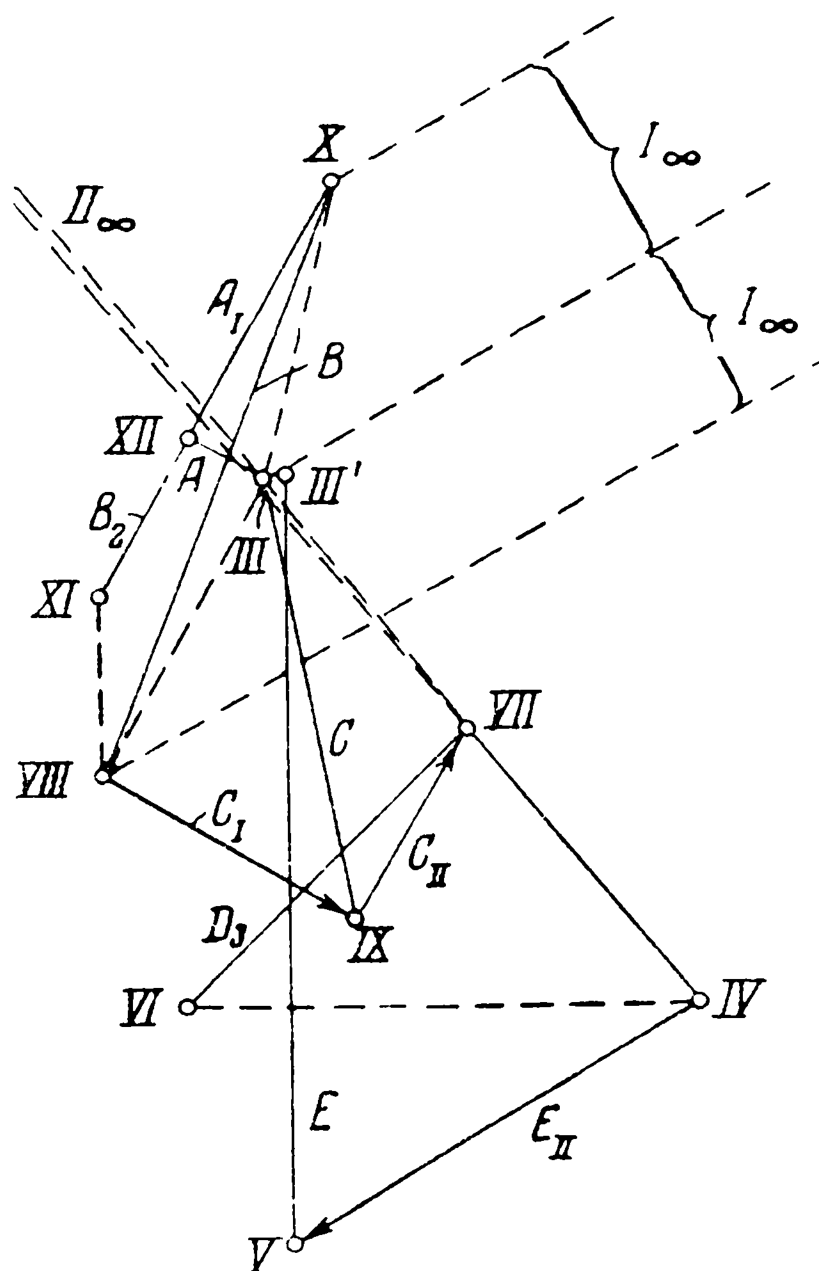
Фиг. 158.

ников *I* и *II* в вершинах *A*, *C* и *E* обратились в ноли, углы же при вершинах *B* и *D* — в 180°. Кинематическим методом представим себе определенным напряжение поводка *1*, причем оно изображается отрезком *III*—*XII* (см. фиг. 159).

Обход проекций плоских углов будем, как и во всех остальных случаях, представлять себе совершающимся по часовой стрелке, если не имеется возвратных граней. Нагружены узлы тех же наименований, как и на фиг. 143. На фиг. 157 отмечены только прямые действия этих нагрузок, величины же их следует искать на фиг. 159. Давлениями в шарнирах *K*, *L*, *M*, *N*, как и в предыдущем случае, не будем интересоваться, потому что

определение их не представит каких-либо особенностей, и потому, как и на фиг. 153, мы не получим замкнутого многоугольника внешних сил, действующих на систему, потому что не все эти силы определены.

Начнем с многоугольника равновесия узла A. Известны силы $III—XII$ и $XII—X$. Неизвестны напряжения двух сливающихся в одну прямую стержней $X—I$ и $I—III$. Эти напряжения, каждое в отдельности, равны бесконечности, но сумма их равна конечной величине, потому что уравновешивает сумму двух конечных сил $III—XII$ и $XII—X$. Вершина I получается (см. фиг. 159) в пересечении двух прямых, параллельных направлению AB и проходящих через точки III и X.



Фиг. 159.

Следует отметить одну особенность. Если бы напряжения сливающихся стержней AB и AC были конечны, то и результирующее напряжение было бы направлено по той же прямой, как и напряжения этих стержней. В случае напряжений бесконечно больших это обстоятельство отсутствует, и результирующее напряжение даже не параллельно своим составляющим: оно выразится отрезком $X—III$. Происходит это оттого, что все прямые, проходящие через конечную точку и имеющие одно и то же направление, сливаются в одну прямую. Если же точка удаляется в бесконечность, то все прямые, пересекающие конечную плоскость чертежа, имеют одно направление,

но не сливаются в одну прямую, а образуют пучок параллельных. Это обстоятельство весьма важно учесть при переходе к следующей узловой точке B.

Известными напряжениями в последней являются $I—X$ и $X—XI$, неизвестными — два напряжения $XI—VIII$ и $VIII—I$, из которых последнее бесконечно велико, так как вершина I лежит в бесконечности. Чтобы получить точку $VIII$, нужно из XI провести прямую, параллельную поводку AB, из I — прямую, параллельную BC. Если бы только точка I находилась в конечной части плоскости чертежа, то этим определилась бы вершина $VIII$ вполне однозначно, и напряжения искомых стержней были бы найдены. Но в данном случае это не так, потому что через бесконечно удаленную точку I можно провести не одну, а целый пучок прямых, параллельных AB. Положение точки $VIII$ не определяется, хотя в узле B, с общей точки зрения, только два неизвестных. Дальнейшее построение диаграммы становится невозможным.

Является вопрос, считать ли невозможность дальнейшего построения диаграммы следствием того, что для подобных случаев нельзя вообще пользоваться соотношением взаимных многогранников, или причина здесь другая. Мы знаем ведь и другие случаи, где нельзя построить диаграммы напряжений, пользуясь *только* соотношением взаимности многогранников. Это соотношение существует, например, для случая цепи фиг. 143, но использовать его для построения диаграммы напряжения мы можем, только определив предварительное напряжение одного из поводков. Вообще же диаграмма в виде Максвелла может быть построена только тогда, когда применим полигональный метод, т. е. можно построить также многоугольник равновесия каждого узла в отдельности, не связывая полигоны в общую диаграмму. Но самое существование максвелловских взаимоотношений отнюдь не обусловлено тем, дает ли нам полигональный метод решение задачи о напряжениях или же нужно пользоваться дополнительными приемами.

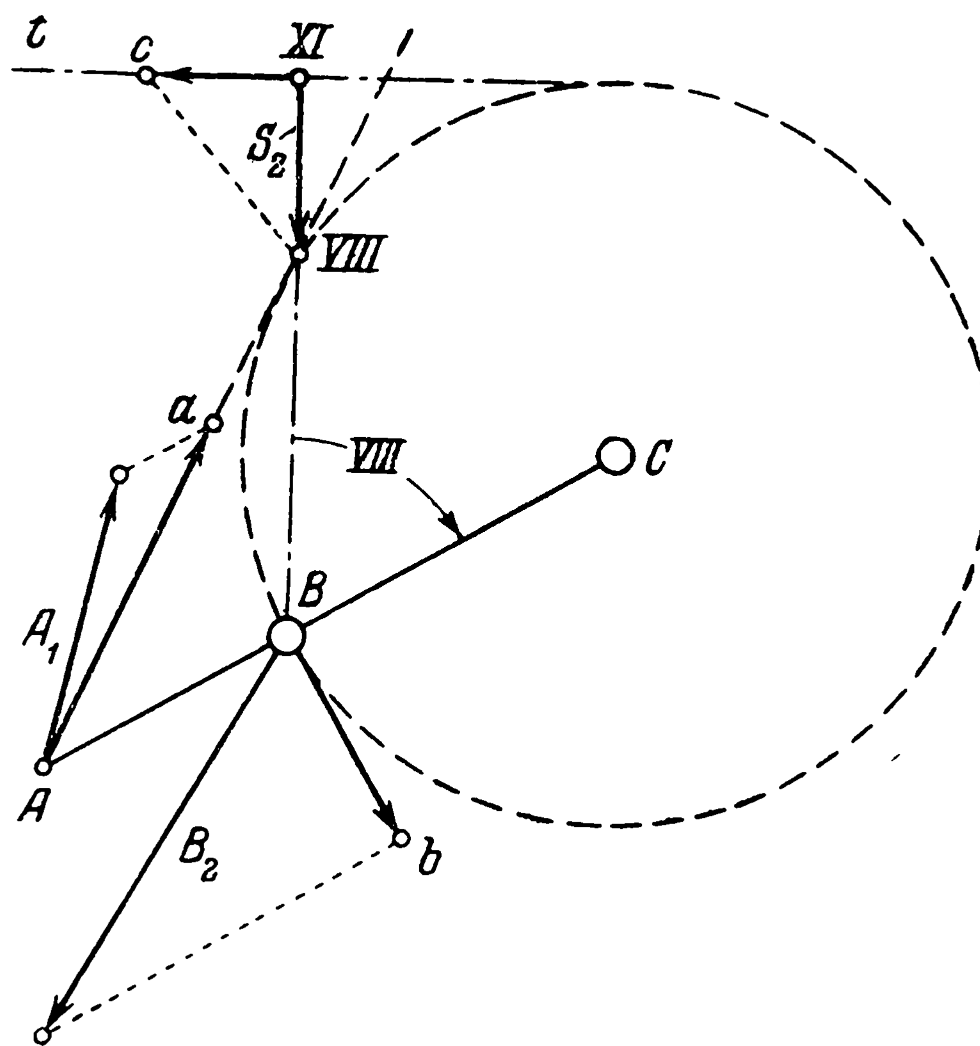
В узле A удаление вершины I в бесконечность не повлекло за собой никаких осложнений, и потому естественно подумать, что в узле B может быть еще какое-либо другое осложнение. Оно вскроется, если мы будем рассматривать вопрос с несколько иной точки зрения. Ведь бесконечно большие напряжения не имеют для нас какого-либо реального значения, важны для нас не сами эти напряжения, а конечная геометрическая сумма двух таких бесконечно больших напряжений. Так и будем же за неизвестное считать эту геометрическую сумму.

Тогда в узле A окажется неизвестное по величине и направлению усилие $X—III$, так как, по указанным причинам, сумма двух напряжений, направленных по оси слившихся стержней, дает результирующую неизвестного направления. Так как неизвестных два: величина и направление напряжения, то полигональный метод применим. При этом можно $X—III$ просто считать за неизвестное моровское напряжение *цельного стержня ABC*, не представляя себе его составленным из трех отдельных стержней. Понятно, что оно не направлено по оси стержня, так как последнее обстоятельство должно иметь место только в стержнях, нагруженных в конечных точках, а здесь нагружен еще средний шарнир B. Но будем ли мы рассматривать стержень ABC за цельный или же составленный из трех стержней, можно на диаграмме вовсе обойтись без пометки о существовании бесконечно удаленной вершины I (см. фиг. 159) и совсем не отмечать плоского угла I (см. фиг. 157) около вершины A, проекция которого равна нолю.

Если мы с той же точки зрения подойдем к шарнирной точке B, то тотчас заметим, что здесь имеется не два, а три неизвестных: величина, направление равнодействующей двух бесконечно больших напряжений и величина напряжения поводка *2*. Вот почему полигональный метод не может дать результата; необходимо сначала число неизвестных уменьшить на одно, тогда только можно будет ее с успехом применить.

Наиболее просто будет дело обстоять, если мы предварительно определим величину моровского напряжения поводка *2*,

т. е. отрезок *XI—VIII* на диаграмме (см. фиг. 159); этим сразу определится положение вершины *VIII*. Можно сделать это с помощью кинематического метода, удалив поводок *2* и пользуясь картиной скоростей оставшейся системы в качестве вспомогательного рычага; тогда придется принять в расчет не только силы, приложенные в точках *A* и *B*, но и в точках *C*, *D* и *E*. Между тем тот же вопрос можно рассматривать при



Фиг. 160.

помощи более простого рычага, нагруженного только первыми двумя силами, воспользовавшись методом приводящей окружности для определения моментов сил, приложенных к стержню *AB* относительно точки *C*. Итак (см. фиг. 160), проводим приводящую окружность с центром в точке *C*, выбрав ее проходящей через точку *B*; поворачиваем по правилам, изложенным в теории рычага, силы A_I и B_2 около точек их приложения до совпадения с направлениями касательных из точек их приложения к приводящей окружности; получаем силы *Aa* и *Bb*, из которых первая, вращающая по направлению часовой стрелки, будет

бо́льшая. Проводим касательную t к окружности, по которой направляем уравновешивающую $XI—C$, точка приложения которой избирается в пересечении с касательной t направления поводка c. Остается только эту уравновешивающую повернуть около точки приложения, до совпадения с направлением последнего, чтобы найти напряжение $XI—VIII$ поводка.

И снова мы замечаем, что бесконечно удаленная вершина I не дала ничего существенного для построения мно́гоугольника равновесия узла B. Надо было прямо искать равнодействующую двух бесконечно больших напряжений, неизвестную по величине и направлению и равную $VIII—X$.

Переходя к узлу C, нужно построить многоугольник равновесия $III—I—VIII—IX—VII—II—III$, в котором неизвестными являются два бесконечно больших напряжения, или, вернее, сумма их. Опять было бы проще вовсе опустить бесконечно удаленные точки I и II, а строить прямо многоугольник $III—VIII—IX—VII—III$, в котором только $VII—III$ неизвестно, и притом по величине и направлению.

Если мы сопоставим результаты, полученные при построении, касающемся звена I или стержня ABC, то легко заметить, что опускание бесконечно удаленных вершин приведет к использованию следующего правила.

Если мы имеем стержень трехшарнирный, в котором шарниры лежат на одной прямой, то нет надобности заменять его тремя воображаемыми стержнями; можно разметку плоских углов сделать, не считаясь вовсе с этим обстоятельством. Нужно только при построении диаграммы помнить, что моровские напряжения (то, что у нас являлось суммой двух бесконечно больших напряжений) нельзя брать направленными по оси такого стержня; направление их будет неизвестно. Кроме того, в среднем узле, где при вырезании узла нужно

через данный стержень провести два сечения (у нас узел B), нужно искать не порознь напряжения в каждом из двух сечений, а их геометрическую сумму, которая будет тоже неизвестна по величине и направлению. Другими словами, плоский угол в 180°, который стержень в таком узле составляет с самим собой (у нас угол I при вершине B), не нужно вводить в построение диаграммы.

Фиг. 161.

Руководствуясь высказанной здесь точкой зрения, мы приступим к построению многоугольника равновесия узла D. Замечаем, что опять число неизвестных слишком велико, именно три: величина и направление суммы напряжений $IV—II$ и $II—VII$, т. е. просто отрезка $IV—VII$, и величина напряжения поводка 3. Поэтому определяем последнее с помощью окружности, приводящей к общему плечу силы, дающие моменты относительно E. Искомое напряжение $VI—IV$ определено построением, показанным на фиг. 161.

Сила D_3, будучи повернута, примет направление Dd. Затем нужно определить действующую в точке C на стержень CE силу; шарнирное давление в точке C будет $III—IX$; к нему присоединяется сила C_{II}, изображенная отрезком $IX—VII$ (см. фиг. 159); равнодействующая этих двух сил будет $III—$

VII, плечо которой относительно E мало. Прямую действия последней силы продолжаем до пересечения с окружностью, где и избрана (см. фиг. 161) точка приложения *III* силы, обозначенной $\overline{C} + \overline{C}_I$; будучи повернута до совпадения с направлением касательной, она дает малую равнодействующую *III—3*. От точки *IV*, лежащей на направлении поводка *3*, по прямой, касательной к окружности, направляем силу *IV—6*, равную сумме сил Dd и *III—3*, вращающую в ту же сторону, как и эти силы. Взята равнодействующая вместо уравновешивающей из соображений удобства чертежа. Повернув силу *IV—6* около ее точки приложения *IV* до совпадения с направлением поводка *3*, получаем силу *IV—VI*, ей эквивалентную; уравновешивающей будет *VI—IV*. Многоугольник равновесия узла D будет *VII—VI—IV—VII*. Если бы мы пользовались бесконечно большими напряжениями, то должны были бы считаться с многоугольником *VII—VI—IV—II—VII*. Очевидно, что от введения вершины *II* никакой пользы не получится.

Переходя к последней вершине E, замечаем, что здесь имеется только единственное неизвестное, напряжение *V—III* поводка *4*. Многоугольник равновесия будет *III—IV—V—III'*; несовпадение точек *III* и *III'* обнаруживает невязку чертежа.

Правильность результата проведенного таким образом построения можем проверить, если определим кинематическим методом совершенно независимо напряжение поводка *4*.

Остается еще определить шарнирные давления. Эти давления определятся, как во всех предыдущих случаях, и будут изображаться отрезками: в шарнире A — отрезком *III—XII*, в шарнире B — отрезком *VIII—X*, в шарнире C — отрезком *III—IX*, в шарнире D — отрезком *IV—VII*, в шарнире E — отрезком *V—III'*.

Мы называем такие напряжения, как *X—III*, *III—VIII*, *VII—III*, которые при одной точке зрения будут результирующими двух бесконечно больших напряжений, при другой — напряжениями, не направленными по оси стержня, тоже моровскими, и не потому, что возможность введения их в расчет

указана Мором, так как диаграмма с такого рода напряжениями здесь рассматривается впервые, а потому, что они так же фиктивны, как и моровские напряжения, и отличаются от них только направлением. В действительности, стержень, нагруженный в среднем шарнире силой, не по его оси направленной, и уравновешивающими силами в концах, которые тоже не будут направлены по его оси, будет работать на изгиб, и под упомянутыми здесь напряжениями следует только разуметь силы, которые придется приложить в данном узле, чтобы заменить действие узла, если обрезать рассматриваемый стержень возле узловой точки.

Следует обратить внимание на особенность в разметке плоских углов, если бесконечно удаленными вершинами в диаграмме не предполагается пользоваться. Особенность эта сказывается в средних шарнирах стержня, как B и D. Если вовсе не отмечать цифрой углы в 180°, обозначенные у нас I и II, то легко впасть в ошибку, именно считать эти углы принадлежащими грани III. Поэтому такие углы либо надо отметить только стрелкой без наименования, либо лучше отметить цифрой, которая не встречается в прочих плоских углах, как это у нас и сделано. При этом нужно помнить, что в диаграмме будет иметься только сумма двух моровских напряжений сечений стержня, лежащих по обе стороны такого шарнира.

Мы предполагали, что три точки стержня A, B, C лежат на одной прямой. Возможно, что они не лежат на одной прямой, но что все же один из углов треугольника, определяемого этими точками, близок к 180°. В этом случае вершины на диаграмме не будут удаляться в бесконечность, но будут лежать нередко весьма далеко за пределами чертежа и определяться в пересечении прямых, образующих между собою малый угол, т. е. определяться мало точно. Во всех этих случаях можно применить только что указанный прием, т. е. обойтись совсем без означенных вершин. Конечно, исключение их создаст дополнительную работу, так как напряжения некоторых поводков придется тогда определять с помощью уравнений

моментов или заменяющей составление и решение их методой приводящей окружности. Эта дополнительная работа неизбежна, если точки в точности лежат на одной прямой.

Мы не будем распространяться о применении свойств взаимных многогранников для построения диаграмм моровских напряжений более сложных цепей первого класса, так как все это будет лишь повторением перечисленных случаев. Что полигональный метод здесь приведет к цели, нам известно из предыдущего; условием является лишь определение кинематическим методом напряжения одного из поводков крайнего звена.

Так как свойства взаимных многогранников могут облегчить построение диаграммы для любой стержневой системы, то нет основания сомневаться в том, что связная диаграмма может быть построена и для любого механизма. Если механизм— первого класса, то, разбив его на нормальные цепи, мы теперь уже сразу будем знать, напряжения каких стержней нужно определить кинематическим методом, чтобы иметь возможность осуществить построение связной диаграммы. Следует отметить, что в таких механизмах легко встретятся стержни не только с тремя, но четырьмя и более шарнирами на одной прямой. Обходятся указанные затруднения совершенно так же, как и в случае системы фиг. 157; нужно только отличать шарниры средние, т. е. такие, где при вырезывании узла стержень приходится пересечь дважды, и конечные, где это обстоятельство не имеет места. Пользоваться бесконечно удаленными вершинами в этом случае будет весьма затруднительно, так как случай четырех шарниров соответствует системе из пяти стержней с бесконечно большими напряжениями; поэтому гораздо рациональнее говорить только о напряжениях конечных одного данного стержня, т. е. без замены его пятью стержнями, но направленных не по его оси *.

При сколько-нибудь сложном механизме с большим числом предельных случаев такие связные диаграммы всего механизма

* Построение для стержня с четырьмя шарнирами на прямой выполнено ниже, для случая цепи фиг. 180.

выходят, однако, запутанными, и легче впасть в случайную ошибку при определении шарнирных давлений. Лично я, за исключением механизмов двухповодковых, всегда предпочту строить отдельную диаграмму для каждой из нормальных цепей, из которых составлен механизм.

Рассматривая определение давлений шарнирных нормальных цепей и механизмов первого класса, мы до сих пор придерживались в общем идей Мора, причем усовершенствование этих идей вытекало, с одной стороны, из уменья разобраться в структуре механизма, с другой — из использования свойств взаимных многогранников. Изложенный способ имеет два больших преимущества. Первое из них то, что мы привели решение задачи к приему, хорошо известному в другой области, в теории ферм, к приему весьма популярному, так что желающий воспользоваться им инженер встречается как бы со старым знакомым. Второе преимущество состоит в крайней ясности получаемой диаграммы, так как в готовой диаграмме любое напряжение может быть почти мгновенно разыскано. Наконец, здесь найдена та область, где теория взаимных многогранников имеет наиболее законное применение. Ведь ферм с шарнирными сочленениями на самом деле не делают, так как узлы в фермах осуществляются жесткими, клепаными, и напряжения, полученные полигональным методом, нуждаются в довольно существенных поправках. Что касается шарнирных давлений, то о них в случае ферм и говорить приходится редко, потому что самих шарниров обычно нет; их заменяют клепаные узлы.

Нельзя, конечно, не пожалеть о том, что, сравнительно с имеющимся в фермах, прием несколько осложнился, с одной стороны, благодаря частым в механизмах предельным случаям, соответствующим удалению вершин многогранников в бесконечность, с другой стороны, — благодаря необходимости иметь дело с возвратными гранями; таким образом, утрачена первоначальная простота его. Казалось бы, на первый взгляд, кроме того, что определение шарнирных давлений

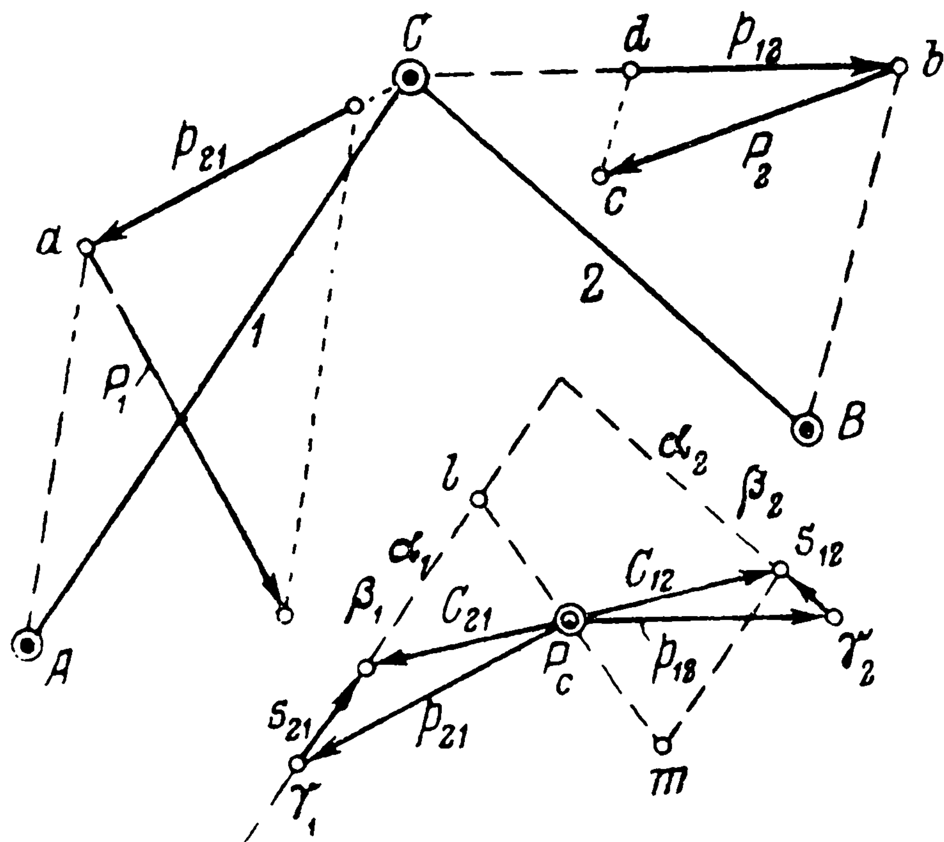
с помощью диаграммы моровских напряжений представляет кружный путь; мы определяем сначала некоторые фиктивные, ненужные нам величины, и только с помощью их искомые давления. К сожалению, более короткого пути к определению шарнирных давлений, повидимому, не существует. Правда, шарнирные давления могут определяться непосредственно с помощью кинематического метода, и если требуется определить давление в каком-либо одном из шарниров, то применение этого метода может оказаться целесообразным и быстрее привести к цели. Но раз только речь идет о нескольких шарнирах, то необходимость строить отдельные картины скоростей, для случаев разъединения каждого из них, составит работу, значительно более сложную, чем построение одной диаграммы моровских напряжений.

Тем не менее нам придется остановиться на кинематическом методе определения шарнирных давлений как на приеме вспомогательном. Мы уже ознакомились со случаями, где построение диаграмм моровских напряжений возможно лишь при предварительном или же попутном определении моровских напряжений одного или нескольких поводков кинематическим методом. Во многих случаях окажется целесообразным определять вместо этого кинематическим методом давления в одном или нескольких шарнирах.

Сущность приема, приводящего к цели в случае применения кинематического метода определения шарнирных давлений, в достаточной мере иллюстрируется на примере двухповодковой группы (см. фиг. 162). Разъединив шарнир C, получим два стержня *1* и *2*, вращающихся около неподвижных точек A и B. Обозначив давление в шарнире C стержня *1* на стержень *2* через C_{12}, давление стержня *2* на стержень *1* — через C_{21}, скажем, что силы C_{12} и C_{21}, заменяющие эти давления, когда шарнир разъединен, должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

Представим себе силу C_{12} разложенной на две составляющих, из которых одна p_{12} проходит через точку приложения b силы

P_2, другая s_{12} совпадает с направлением оси поводка *2*. Так как момент второй из этих составляющих относительно точки B равен нолю, то момент первой из них должен равняться по величине моменту силы P_2. Поэтому силу p_{12} определить проще всего, повернув силу P_2 около точки приложения b по правилам, доказанным для рычага, до совпадения с направлением прямой Cb и изменив знак полученной силы; для уяснения себе построения нужно только помнить, что прямая cd должна быть параллельна прямой Bb. Точно так же разлагаем силу C_{21} на составляющую p_{21} по направлению Ca, и составляющую S_{21} по направлению оси поводка *1*; при этом составляющая p_{21} найдется вполне аналогично тому, как раньше найдена составляющая p_{12}. Что касается составляющих s_{12} и s_{21}, то определение их требует еще особого построения.

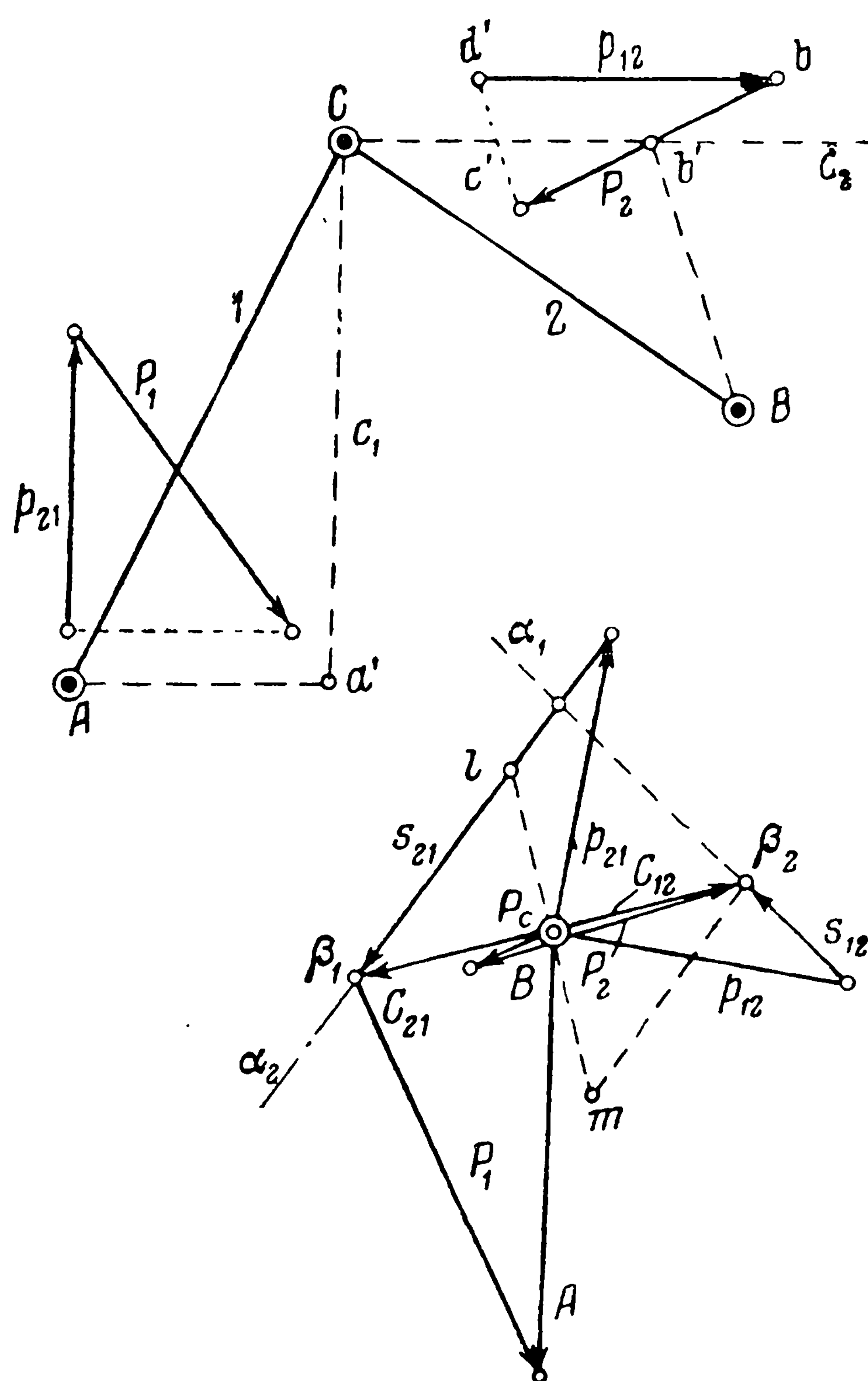


Фиг. 162.

От произвольной точки плоскости P_c откладываем силы p_{12} и p_{21}. Так как отрезки $\gamma_1\beta_1$ и $\gamma_2\beta_2$, изображающие искомые составляющие, неизвестны, то проводим через точки γ_1 и γ_2 прямые α_1 и α_2, соответственно параллельные осям поводков. Положение точек β_1 и β_2, а тем самым и шарнирное давление в точке C определяется из условия, что силы C_{12} и C_{21} по величине равны, по направлению противоположны, т. е. что прямолинейный отрезок $\beta_1\beta_2$ делится пополам в точке P_c. Тогда построение, очевидно, приведется к следующему: берем на прямой α_1 произвольно точку l, проводим прямую lP_c и на ней откладываем отрезок P_cm, равный lP_c,; через точку m проводим прямую, параллельную α_1 до пересечения в точке β_2 с прямой

α_2. Так как точка P_c будет делить пополам отрезки всех прямых, проходящих через нее и заключенных между прямыми α_1 и $m\ \beta_2$, то это имеет место и для отрезка $\beta_1\ \beta_2$, и потому отрезки $P_c\beta_1$ и $P_c\beta_2$ будут искомыми шарнирными давлениями C_{21} и C_{12}.

Изложенное построение может быть сделано более гибким в том смысле, что направления составляющих p_{12} и p_{21} могут быть избираемы произвольно. На фиг. 163 эти направления заданы прямыми c_1 и c_2. Нужно только представить себе, что силы P_1 и P_2, соответственно, перенесены в точки a' и b' пересечения прямых их действия с данными прямыми. При этом нет надобности переносить на чертеже силы в новые точки приложения, а нужно только учесть это обстоятельство при повороте сил около старых точек их приложения. Так, при повороте силы P_2 около b нужно прямую $c'd'$ брать не параллельно Bb, а параллельно Bb'. В нижней части фиг. 163 показано не только нахождение шарнирного давления в точке C, но и в точках A и B. Дело в том, что давление на неподвижную точку A будет равно геометрической сумме сил C_{21} и P_1, а давление на точку опоры B



Фиг. 163.

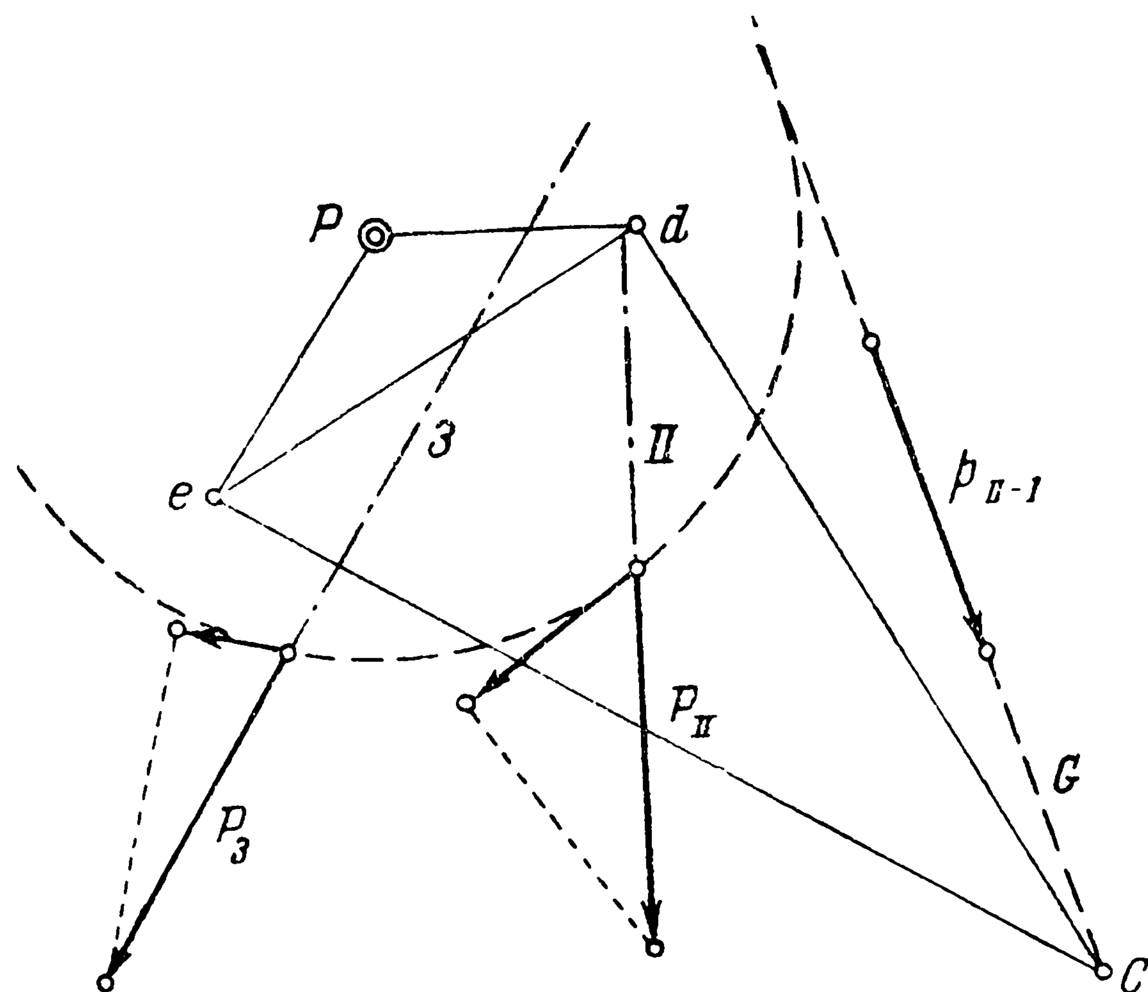
равно сумме сил C_{12} и P_2. Давления двухповодковой группы на точки опоры отмечены, как и раньше, соответственно буквами A и B.

Если мы сравним построение (см. фиг. 163) с определением шарнирных давлений методом предварительного построения диаграммы моровских напряжений (см. фиг. 138), то заметим, что непосредственное определение шарнирных давлений ничем не проще с точки зрения количества чертежной работы. Между тем в данном случае было налицо обстоятельство, вносящее весьма существенное упрощение: не приходилось строить картины скоростей, потому что по разъединении шарнира C система распалась на два рычага.

Более общим явится случай, когда разъединение шарнира вызовет распадение нормальной цепи с неподвижным укреплением свободных концов поводков на два механизма, что, как известно из первой части нашего труда, имеет место для всех таких цепей первого и второго класса. Если разъединяемый шарнир обозначим опять C, то, принимая во внимание равновесие каждой отдельной части, разложим уравновешивающую на две составляющие p и s, из которых одна имеет произвольно избранное направление, вторая же перпендикулярна к скорости точки C, принадлежащей одному из механизмов. Представив себе, что это проделано для каждого из двух механизмов, на которые распалась нормальная цепь, мы придем к построению, ничем не отличающемуся от нижней части фиг. 162. При этом только на место двух рычагов *1* и *2* (см. фиг. 162) станут вспомогательные рычаги, изображающие картины скоростей двух указанных механизмов. Для уяснения сказанного определим указанным приемом шарнирное давление в шарнире C четырехповодковой группы (см. фиг. 143).

Итак, разъединяем шарнир C и строим картину скоростей каждой из частей, на которые нормальная цепь распалась. Картина скоростей звена II и двух его поводков (предполагая свободные концы последних неподвижно закрепленными) изображена на фиг. 164; картина скоростей звена I с его двумя

поводками имеется на фиг. 165. На первую из этих картин наносим прямые, изображающие линии действия сил P_{II} и P_3, отмеченные цифрами II и 3; на вторую также наносим прямые I и 2, изображающие прямые действия сил P_I и P_2. Точки приложения соответствующих сил избираем на приводящих окружностях, также нанесенных на чертеж. После этого

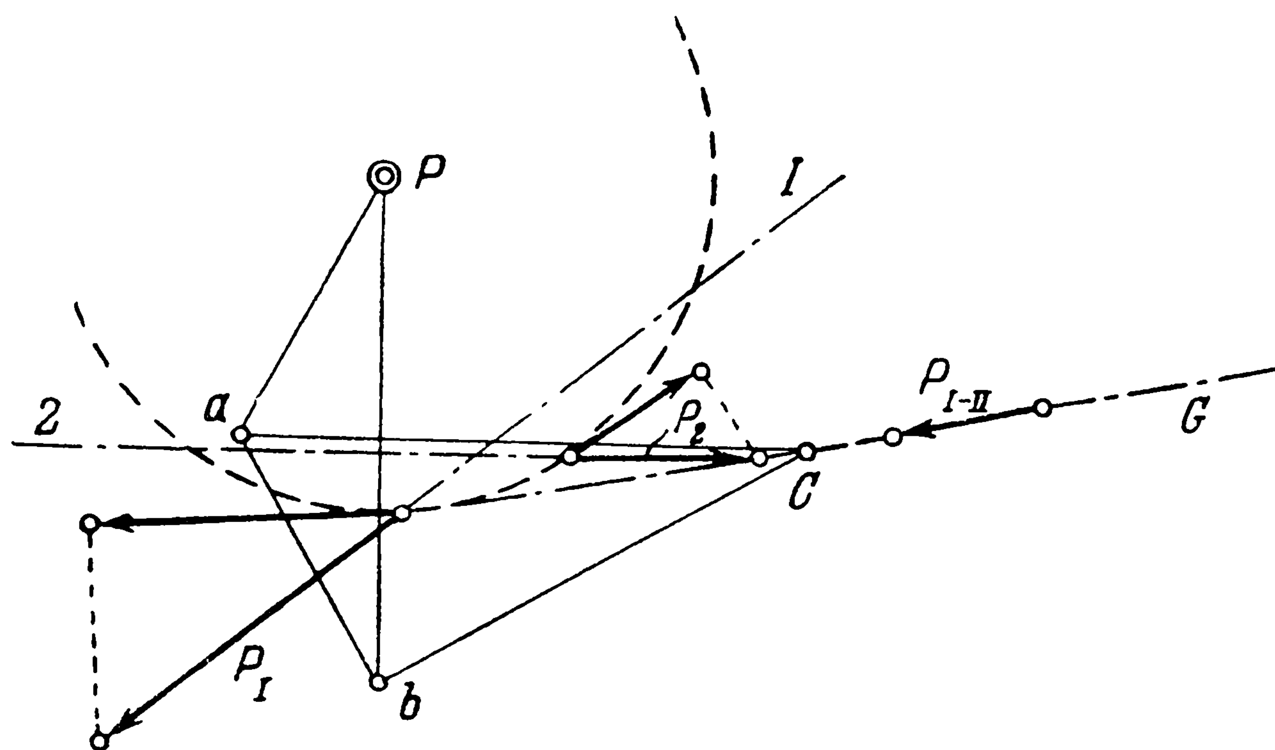


Фиг. 164.

поворотом сил заменяем их силами, направленными по касательным к приводящим окружностям, описанным из полюса вспомогательных рычагов. Далее, каждая из картин скоростей позволяет нам определить составляющую шарнирного давления в точке C, имеющую данное направление; за последнее проще всего избрать направление одной из касательных из изображающей точки C к приводящей окружности; эти прямые обозначены буквами G.

Вместо того чтобы находить уравновешивающую сил P_{II} и P_3, была найдена их равнодействующая P_{II-I}, которая может считаться одной из составляющих шарнирного давления C_{II-I} звена II на звено I. Вторая, неизвестная составляющая

S_{II-I} этого давления должна быть направлена от точки C (см. фиг. 164) к полюсу вспомогательного рычага, так как момент ее относительно последнего должен равняться нолю потому, что момент первой составляющей равен сумме моментов сил P_3 и P_{II}. Сила p_{II-I} отложена от точки P_c (фиг. 166) и через конец ее проведена прямая α_{I}, на которой положение точки β_I не может еще быть определено, за неизвестностью второй составляющей s_{II-I}.



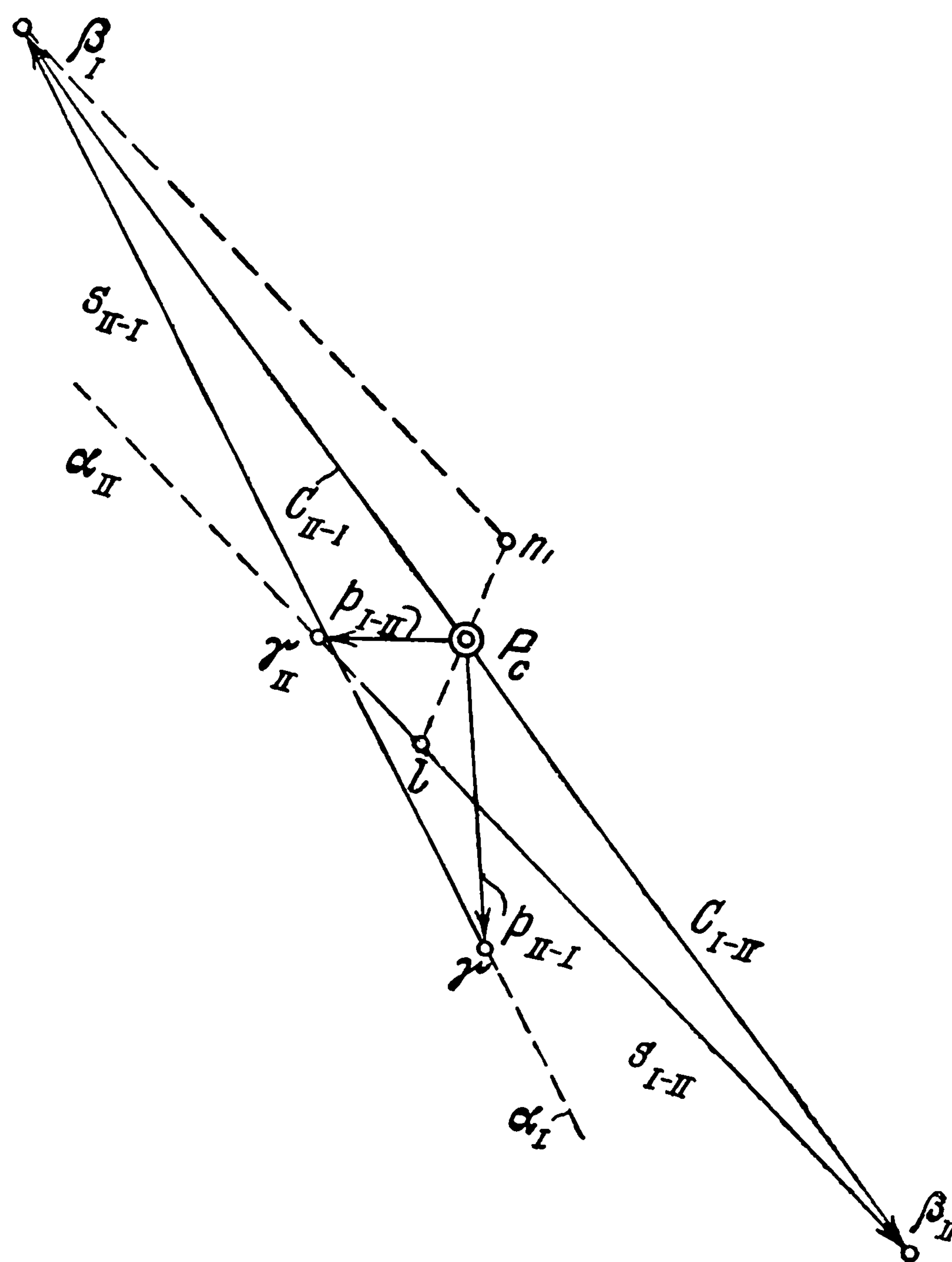
Фиг. 165.

Обращаясь ко второй картине скоростей (см. фиг. 165), скажем, что равнодействующая p_{I-II} сил P_1 и P_2 будет одной из составляющих шарнирного давления C_{I-II}, вторая же неизвестная его составляющая будет направлена от точки C к полюсу рычага; направление ее на фиг. 166 характеризуется прямой α_{II}, проведенной через конец γ_{II} вектора p_{I-II}.

В дальнейшем приходится лишь повторить построение фиг. 162. На прямой α_{II} берем произвольно избранную точку l, проводим через нее прямую в точке P_c и откладываем $P_c m = l P_c$; через точку m проводим прямую, параллельную α_{II} до встречи с α_I в точке β_{II}. Отрезок $P_c\ \beta_I$ изобразит силу C_{II-I}; следует это из того, что прямолинейный отрезок $\beta_I\ \beta_{II}$ точкой P_c делится пополам, и потому найдены искомые две силы C_{II-I} и C_{I-II}, равные по величине, противоположные по направлению

и составленные каждая из двух сил, из которых одна известна по величине и направлению, другая — только по последнему.

Таким образом, мы видим, как построение фиг. 162 применяется к общему случаю цепей первого и второго класса.

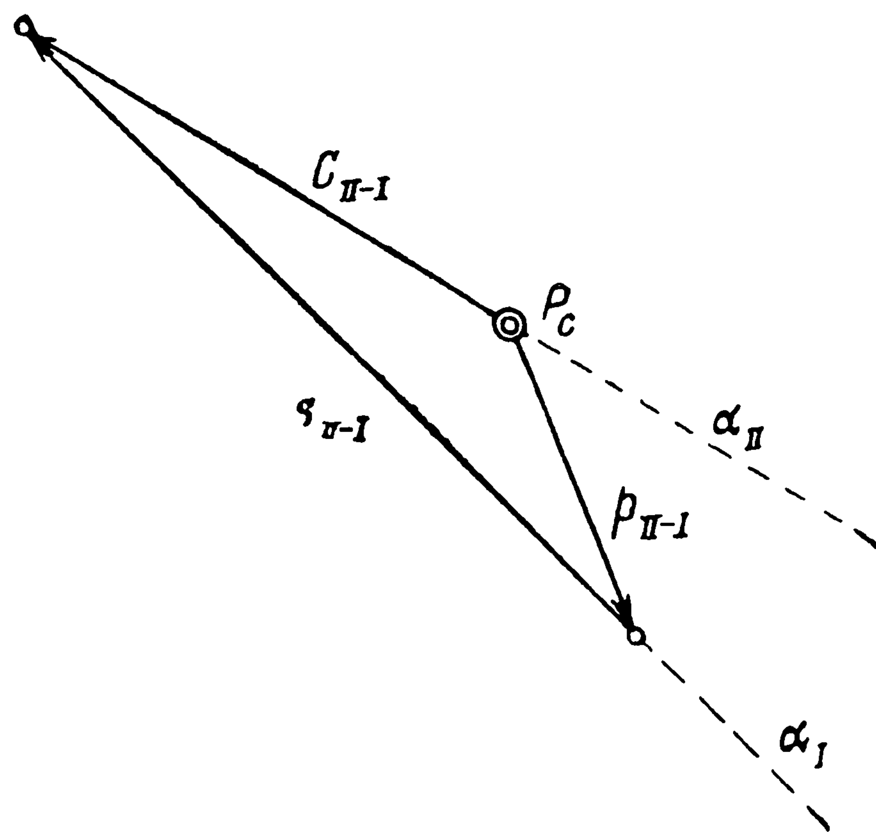


Фиг. 166.

Разница заключается лишь в том, что место двух поводков фиг. 162 займут два более или менее сложных вспомогательных рычага.

При определении шарнирного давления в точке C (см. фиг. 143) все силы были взяты такими, как отмеченные на этой фигуре, за исключением силы P_2, которая взята вдвое меньше (см. фиг. 165). Последнее было сделано потому, что под действием

сил P_I и P_2, первоначально заданных, вспомогательный рычаг (см. фиг. 165) оказался в равновесии, так что сила p_{I-II} обращалась в нуль. Таким образом, не было возможности, удержав прежние значения сил, иллюстрировать общий случай. На фиг. 167 показано построение для случая прежних сил, при обращении в нуль составляющей p_{I-II} давления C_{I-II}. Оно значи-



Фиг. 167.

тельно проще, так как сразу становится известным направление шарнирного давления, которое будет даваться прямой α_{II}.

Шарнирное давление обращается в ноль или приобретает неопределенное значение, если обе составляющие p равны нолю; первый случай имеет место, если прямые α_I и α_{II} имеют разное направление; второй, если направления их совпадают. Бесконечно большие давления получатся при параллельности обеих последних прямых на диаграмме вида фиг. 166.

Сопоставляя только что произведенные построения с фиг. 144, 145, 146, заметим, что непосредственное определение давления только в одном шарнире немногим проще определения с помощью моровских напряжений и метода взаимных многогранников всех шарнирных давлений цепи фиг. 143. Таким

образом, непосредственное определение шарнирных давлений кинематическим методом может играть роль лишь вспомогательного приема там, где определение моровского напряжения поводка окажется сложным, а полигональный метод, сам по себе, не может применяться, если не определить некоторых составляющих кинематическим методом.

В цепях первого класса определение давления в одном из средних шарниров цепи кинематическим методом не играет роли важного вспомогательного приема; проще будет определить моровское напряжение поводка одного из крайних звеньев. Но во всяком случае, опираясь на положение I, можно будет построить диаграмму моровских напряжений, раз только будет известно шарнирное давление между двумя смежными звеньями цепи, но не между средним звеном и его поводком Более существенную пользу получим от указанного приема в цепях второго класса, к которым мы теперь и переходим.

Мы знаем уже, что в исследовании цепи второго класса приходится уделять особое внимание образованиям, названным вилками; знаем также, что в данной цепи второго класса во всяком случае одна вилка, обе ветви которой кончаются двухповодковым звеном, найдется. Распределив нагрузки на узловые точки, предполагая концы поводков неподвижно укрепленными, заметим опять, что нет такого узла, в котором число неизвестных в полигоне равновесия узла меньше трех. Поэтому определяем кинематическим методом напряжение поводка одного из крайних звеньев вилки. Обращаясь к чертежу подобного рода цепи (см. фиг. 98), можно остановиться на одном из поводков звена *1*. После этого, опираясь на положение I, легко убедиться, что в данном ответвлении вилки определятся моровские напряжения всех стержней, из которых представляем себе составленными треугольные звенья, независимо от числа последних, а также напряжения их поводков. Но в бесповодковом звене, к которому вилка примыкает, определятся напряжения только двух стержней, сходящихся в шарнире, к которому примыкает рассматриваемая ветвь вилки. На фиг. 98 мы

определили бы напряжения стержней C_2C_4 и C_2C_5, бесповодкового *5*, но не могли бы определить напряжения стержня C_4C_5, потому что в узле C_4 окажутся неизвестными напряжения трех стержней, именно только что указанного и двух стержней звена 4. Таким образом, необходимо снова прибегнуть к кинематическому методу.

С этой целью можно определить еще напряжение поводка второго крайнего звена *3* той же вилки. Если бы мы поступили таким образом, то напряжения двух стержней звена *3*, сходящихся в шарнире C_4, оказались бы определенными раньше, чем пришлось бы строить многоугольник ровновесия узла C_4 и в последнем неизвестным оказалось бы напряжение только одного стержня C_4C_5. Таким образом, уже в этом узле, далеко до окончания всех построений, получилась бы проверка сделанного. Последнее обстоятельство представляет преимущество указанного метода. Остается только рассмотреть, много ли раз нам придется еще в дальнейшем прибегать к кинематическому методу.

Опираясь на положение I, мы легко заметим, что раз только напряжения трех стержней бесповодкового найдены, то определятся напряжения всех поводков и стержней звеньев, составляющих простую цепь, ведущую от этого бесповодкового к следующему, а также двух стержней последнего; применительно к нашему примеру это будет звено *6* и бесповодковое *9*. Если к этому второму бесповодкому примыкает концевая цепь, кончающаяся двухповодковым звеном, то, очевидно, напряжение третьего стержня определится только, если предварительно кинематическим методом найти напряжение поводка ее крайнего звена, причем опять, при определении напряжения третьего стержня бесповодкового звена, будет произведена проверка.

Однако не всегда обстоятельства сложатся так просто, потому что ко второму бесповодковому может примыкать и более сложное разветвленное образование. Поэтому, чтобы уяснить себе, чтó произойдет в общем случае, придется прибегнуть к известному нам уже из предыдущей главы приему

отбрасывания использованных вилок, чем мы и перейдем на почву отвлеченных рассуждений, не связанных с той или иной конфигурацией чертежа. Итак, первая вилка непременно будет кончаться двумя двухповодковыми, и нужно будет определить кинематической методой напряжения двух поводков, по одному на каждое из крайних звеньев этой вилки. Использовав эту вилку, мы ее отбрасываем, оставив конечным звеном бесповодковое, к которому она примыкала и в котором напряжения стержней, его составляющих, тоже уже известны. После этого рассмотрим следующую вилку. При этом возможны два случая. Или только что оставшееся конечным звеном бесповодковое принадлежит этой второй вилке, либо вторая вилка кончается двумя двухповодковыми, потому что пока имеется только одно конечное бесповодковое звено. Первый из этих случаев нами только что был рассмотрен, причем оказалось, что необходимо определить напряжение одного из поводков конечного двухповодкового звена, которым кончается вторая ветвь вилки. Во втором случае таких звеньев будет два, так как каждый конец вилки будет кончаться двухповодковым, и тогда придется кинематическим методом определить напряжение одного поводка каждого из этих звеньев.

Приступая к рассмотрению третьей вилки, мы можем иметь уже три случая, которые и должны повторяться в дальнейшем. Либо вилка кончается двумя бесповодковыми, и тогда мы переходим к следующему бесповодковому, не применяя вовсе кинематического метода, либо она кончается бесповодковым и двухповодковым и тогда надо применить кинематический метод для определения напряжения одного поводка двухповодкового звена, либо она кончается двумя двухповодковыми, и тогда кинематический метод придется применять дважды. Будем же отбрасывать вилку за вилкой, пока не останется простая цепь, которая будет кончаться либо двумя бесповодковыми, либо двухповодковым и бесповодковым.

Мы видели, что всякий раз, как в вилке встречалось двухповодковое, надо было применять кинематический метод.

Следовательно, при n концах кинематическая метода должна применяться не менее (n — 1)-го раза, если мы устроимся так, что оставшаяся простая цепь будет с одного конца ограничиваться двухповодковым; в противном случае, придется ее применить даже и все n раз. Что касается определения напряжений в оставшейся простой цепи, то здесь уже затруднений не встретится, в чем легко убедиться с помощью положения I. Каждое бесповодковое, по очереди, даст возможность проверки всех предыдущих построений.

Недостаток приема — его громоздкость. Очевидно, что напряжения поводков концевых двухповодковых должны быть найдены не после отбрасывания ряда вилок, а заблаговременно, так как надо отбросить только соответствующий поводок и сохранить все остальные звенья и поводки, получив при этом механизм второго класса. Таким образом, надо будет построить картины скоростей (n — 1)-го механизмов второго класса со сложными разветвлениями, с большим числом звеньев и в (n—1)-м вспомогательном рычаге привести к общему плечу большое число сил. Все это заставляет подумать о том, как бы упростить дело, хотя бы и пожертвовав возможностью столь частых проверок произведенных действий. В этом и не будет столь настоятельной необходимости, если число последних уменьшится.

Во всех случаях, где вилка будет оканчиваться двумя двухповодковыми, все же придется определить попрежнему напряжение поводка одного из последних; непременно так придется поступить с первой вилкой. Применительно к фиг. 98 нужно будет определить кинематической методой напряжение одного поводка звена *I*. Действуя после этого, как и раньше, мы сможем построить многоугольник равновесия узла C_2, но в узле C_4 встречаем три неизвестных, из которых два — напряжения стержней C_4B_4 и C_4C_3. Вместо этих двух неизвестных введем шарнирное давление в C звена *4* на звено *5*; последнее представим себе разложенным на две составляющие, из которых определим кинематической методой т о л ь к о о д н у, вторая

же составляющая определится из многоугольника равновесия, в котором будут служить двумя неизвестными напряжение стержня C_4C_5 и указанная составляющая, известными же будут определенная кинематической методой составляющая и напряжение стержня C_2C_4.

Чтобы воспользоваться кинематической методой, необходимо разъединить шарнир C_4. В силу свойств цепи второго класса, свободные концы поводков которой считаем закрепленными неподвижно, она распадется вследствие этого на две части, из которых каждая представляет механизм. Мы обратимся к тому механизму, который содержит меньшее число звеньев и представляет собой отделенную концевую цепь с конечным звеном *3*. Чтобы восстановить равновесие этой части, нарушенное уничтожением шарнира C_4, приложим в последней точке силу p по заданному направлению, которое не должно только совпадать с направлением прямой, соединяющей на картине скоростей этой части точку, изображающую разъединенный шарнир, с полюсом. Силу p, которая является уравновешивающей сил, приложенных к точкам отделенной от сложной простой концевой цепи, можно рассматривать как составляющую шарнирного давления, приложенного к звену *4*. Вторая же составляющая пойдет именно по направлению, определяемому в картине скоростей изображением разъединенного шарнира и полюсом последней.

Вполне аналогично с тем, что мы имели на фиг. 164 и 165, можно вместо уравновешивающей сил, приложенных к концевой цепи, взять их равнодействующую; тогда уже сила p будет составляющей давления в шарнире отброшенной концевой цепи на бесповодковое, в нашем случае — на звено *5*. Отбросив концевую цепь, мы эту именно составляющую и введем, обозначив ее p; вторая же составляющая s и напряжение стержня C_4C_5 определятся из полигона равновесия узла, как говорилось выше. После того как обе составляющие шарнирного давления определятся, можно заняться определением моровских напряжений стержней отброшенной концевой цепи. Первый

полигон будет содержать шарнирное давление в точке C_4 и два неизвестных напряжения стержней C_4B_4 и C_4C_3. В последнем двухповодковом звене получится проверка.

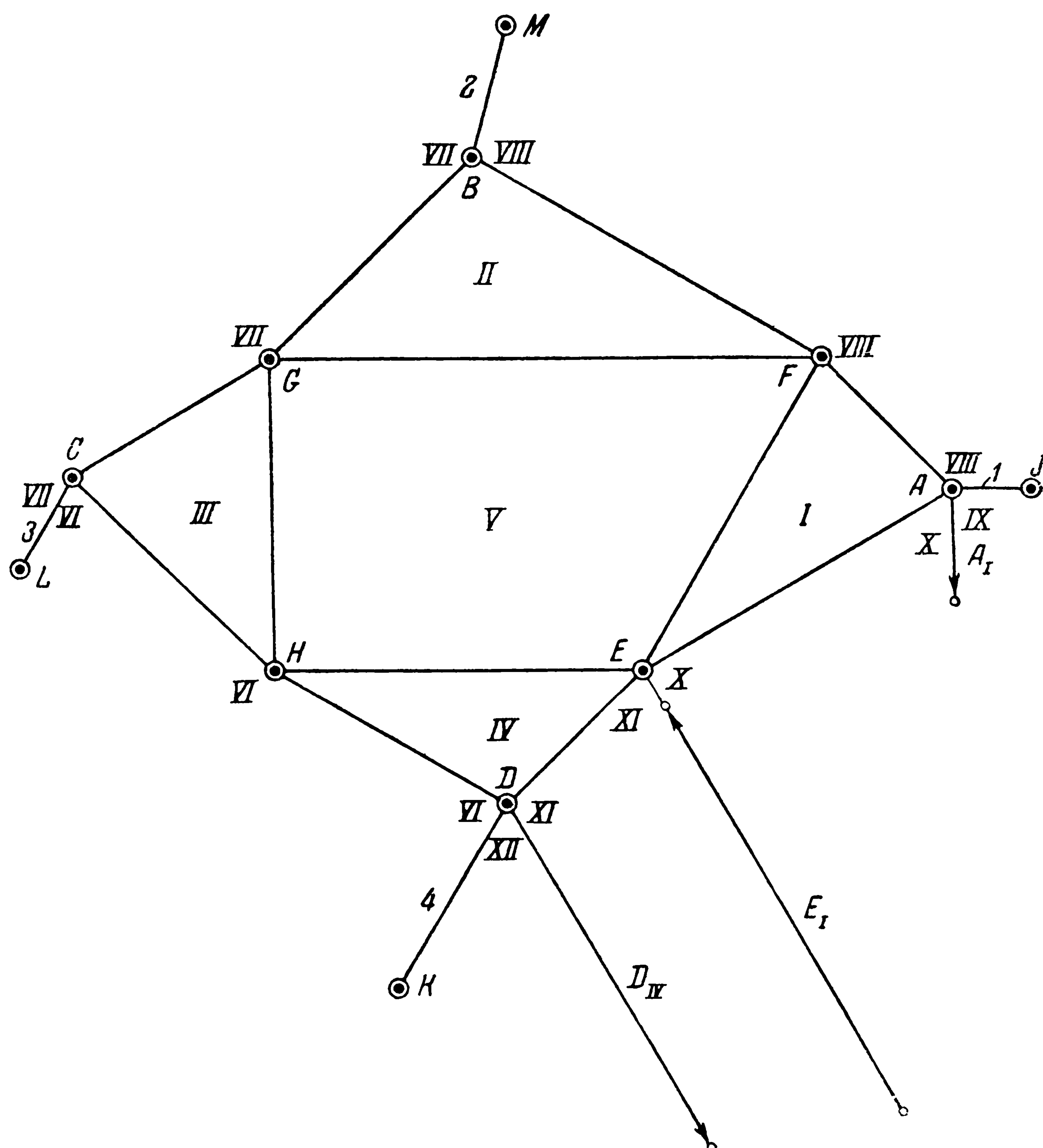
Переход от оставшегося концевым бесповодкового к следующему бесповодковому будет совершаться так же, как и раньше.

Выгоды только что указанного приема очевидны. Вместо того чтобы строить картину скоростей всей цепи и приводить силы в сложном вспомогательном рычаге, мы проделываем это только с небольшой частью цепи, именно с одной ветвью вилки; при этом и число проверок не уменьшается; проверка лишь переходит из узла, в котором ветвь вилки примыкает к бесповодковому, в один из узлов конечного звена вилки, в котором прикреплен поводок. Прежний громоздкий прием приходится применять только тогда, когда нельзя избежать вилки с двумя двухповодковыми звеньями на концах. Упрощенный прием применится, когда только одна ветвь вилки оканчивается двухповодковым звеном. Кинематическая метода не понадобится вовсе, если оба конечных звена вилки бесповодковые.

Этим можно считать исчерпанным вопрос об определении моровских напряжений в цепях второго класса. О дальнейшем определении шарнирных давлений, о применении к ним принципа взаимных многогранников не найдется сказать чего-либо нового.

Переходим к случаю цепей и механизмов третьего класса, причем остановимся сначала на первом, основном типе этих цепей, в котором все звенья одноповодковые.

Мы уже знаем, что напряжение любого поводка может быть найдено кинематической методой, если устранить соответствующий поводок и вообразить себе неподвижными концы остальных поводков. При этом придется строить картину скоростей механизма третьего класса. Такое построение само по себе несколько сложно, но к тому же определение напряжения одного только поводка недостаточно, чтобы затем можно было пользоваться полигональной методой. Так, например, если мы определим напряжение поводка MB (см. фиг. 168), то для тре-



Фиг. 168.

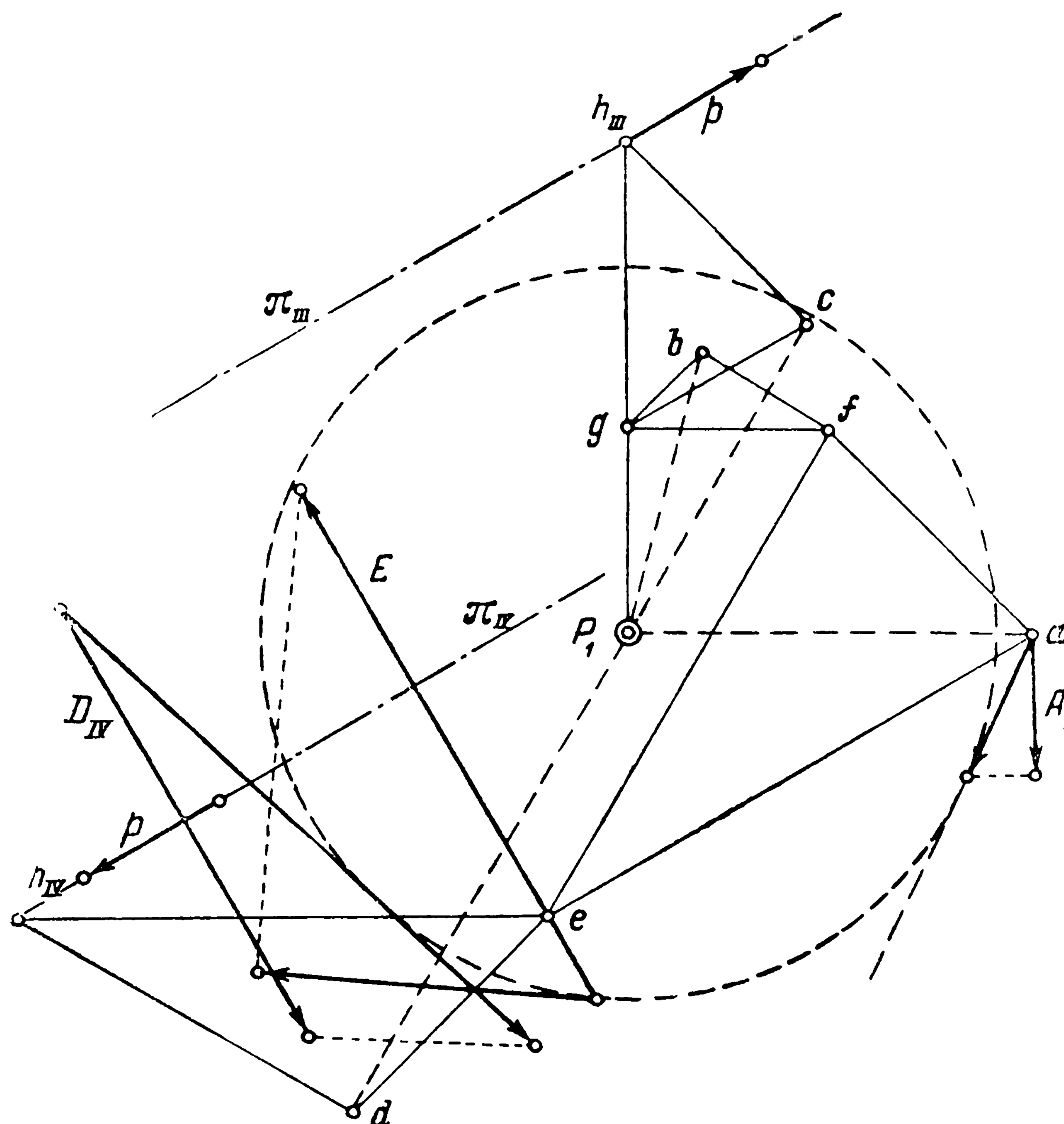
угольника II окажутся известными напряжения стержней, примыкающих к нему в вершине B и состоящих из одного только поводка; в каждой же из двух других вершин F и G окажутся неизвестными напряжения всех примыкающих в них стержней, чего, согласно положению I, недостаточно, чтобы определить

напряжения всех стержней треугольника *II*; определятся напряжения лишь стержней *BG* и *BF*, напряжение же стержня *GF* останется неизвестным. Поэтому кинематическую методу придется применять дважды: нужно будет определить еще напряжение поводка, соседнего с треугольником *II* звена, например звена *III*; тогда определятся напряжения стержней *CG* и *CH* и в узле *G* останутся неизвестными только напряжения двух стержней, которые и определятся из многоугольника равновесия узла. Далее, применяя положение I, легко убедиться, что напряжения всех остальных стержней последовательно найдутся, независимо от числа звеньев замкнутой цепи.

Итак, если мы будем пользоваться кинематическим методом, как раньше, удаляя по одному поводку и превращая систему в механизм тем, что свободные концы остальных поводков воображаем неподвижными, то придется построить дважды картину скоростей механизма третьего класса. Ввиду некоторой сложности построения таких картин скоростей следует кинематическую методу применять в несколько ином виде, преобразуя цепь, пристегнутую к неизменяемой основе, в систему с двумя степенями свободы. Мы упомянули уже раньше, что теория вспомогательного рычага применима для определения условий равновесия систем со сколькими угодно степенями свободы. Для случая системы с двумя степенями свободы дело сведется опять к довольно простым графическим построениям.

Для построения диаграммы моровских напряжений достаточно будет определить давление в шарнире между двумя звеньями нормальной цепи третьего класса исследуемого типа. Для случая цепи фиг. 168 зададимся целью определить кинематической методой шарнирное давление в точке *H* между звеньями *III* и *IV*. Если эта задача будет решена, то, применяя положение I, легко убедиться, что моровские напряжения всех стержней найдутся полигональной методой, и притом независимо от числа звеньев цепи. Относительно нагрузки цепи предположено, что звено *IV* нагружено силой D_{IV}, приложенной в шарнирной точке *D*; нагрузка же звена *I* привелась к двум силам

A_I и E_I, приложенным в точках A и E. Так как шарнир H разъединен, то придется отличать две точки H: принадлежащую звену III и звену IV, которые соответственно будем обозначать H_{III} и H_{IV}.



Фиг. 169.

Считая концы поводков неподвижными, заметим, что положение одной из точек H определяет положение всей системы, так как вся система распадается на ряд двух поводковых групп, состоящих каждая из звена цепи и его поводка. Если это так, то виртуальное перемещение и виртуальная скорость одной из точек H могут быть избраны совершенно произвольно не только по величине, но и по направлению. На фиг. 169 скорость

точки H_{III} отложена в виде отрезка $P_1\, h_{III}$, после чего картина скоростей строится, как для ряда двухповодковых групп, расположенных в последовательном порядке. Последним определяется изображение h_{IV} точки H_{IV}. Наносим прямые, изображающие линии действия сил, приложенных к точкам цепи, но точек приложения сил во вспомогательном рычаге пока не отмечаем.

Три данные силы, действующие по указанным прямым, должны уравновешиваться двумя равными, имеющими противоположное направление силам, приложенным в точках h_{III} и h_{IV} и изображающим искомые шарнирные давления в точке H, соответственно приложенные к звеньям III и IV. Эти искомые давления разлагаем на две составляющие, избирая направление одной пары равных и противоположно направленных составляющих произвольно, вторую же пару таких же составляющих направляем по прямой $h_{III}\, h_{IV}$. Первую пару составляющих будем обозначать буквой p, вторую буквой s. Прямые действия сил p названы соответственно π_{III} и π_{IV}. Так как равные и противоположные силы s, направленные по одной прямой, взаимно уравновешиваются, то для равновесия рычага фиг. 169 необходимо, чтобы момент пары сил p был по величине равен, по знаку противоположен сумме моментов относительно полюса P_1 остальных сил, приложенных к этому рычагу, прямые действия которых уже намечены. Проводим приводящую окружность радиусом, равным плечу упомянутой пары, т. е. расстоянию между прямыми π_{III} и π_{IV}, направление которых было избрано произвольно. Приведенная к этой окружности сила, уравновешивающая остальные силы (у нас их три), приложенные к вспомогательному рычагу, будет равна силе p, так как тогда момент ее относительно полюса P_1 рычага будет равен моменту пары сил p.

Точки приложения данных сил на изображениях прямых действия избираем после того, как нанесена на чертеж вспомогательная окружность, так как их следует выбирать или на последней или вне ее, но не внутри, если желательно избежать двойного поворота сил. Результат поворота каждой из сил по-

казан на чертеже, после чего остается только сложить силы, приведенные к общему плечу, принимая во внимание знак их момента относительно P_1. Так определилась величина сил пары p, p и направление ее вращения.

Но для системы с двумя степенями свободы возможно построить не один вспомогательный рычаг, а несколько существенно различных, и для равновесия системы необходимо, чтобы каждый из них находился в равновесии под действием приложенных к системе сил, направленных по изображениям их прямых действий в системе. Чтобы получить вспомогательный рычаг, существенно отличный * от первого, нужно задаться иным направлением скорости точки H_{III}, чем первоначально принятое. На фиг. 170 картина скоростей была построена, исходя из скорости точки H_{IV}, направление которой было принято иное, чем на фиг. 169. Так как направления скоростей во второй картине отличны от направлений их в первой, то вообще и направление относительной скорости точек H_{III} и H_{IV}, изображаемой отрезком $h_{III}\,h_{IV}$, будет иное. Поэтому вторые составляющие s искомого шарнирного давления не будут, в общем случае, уже направлены по одной прямой, но образуют пару сил. Точками приложения сил этой пары, конечно, служат точки h_{III} и h_{IV} второго вспомогательного рычага, а направление их определяется прямой через точки h_{III} и h_{IV} первого. Приложив ко второму вспомогательному рычагу данные силы, затем две силы p, определенные с помощью первого, приводим всю эту систему сил к окружности, радиус которой равен расстоянию между прямыми σ_{III} и σ_{IV}, по которым должны направиться искомые силы s. Уравновешивающая системы сил, приложенных ко второму вспомогательному рычагу, даст нам величину сил s, а момент ее относительно полюса P_2 равен моменту пары сил s, s.

---

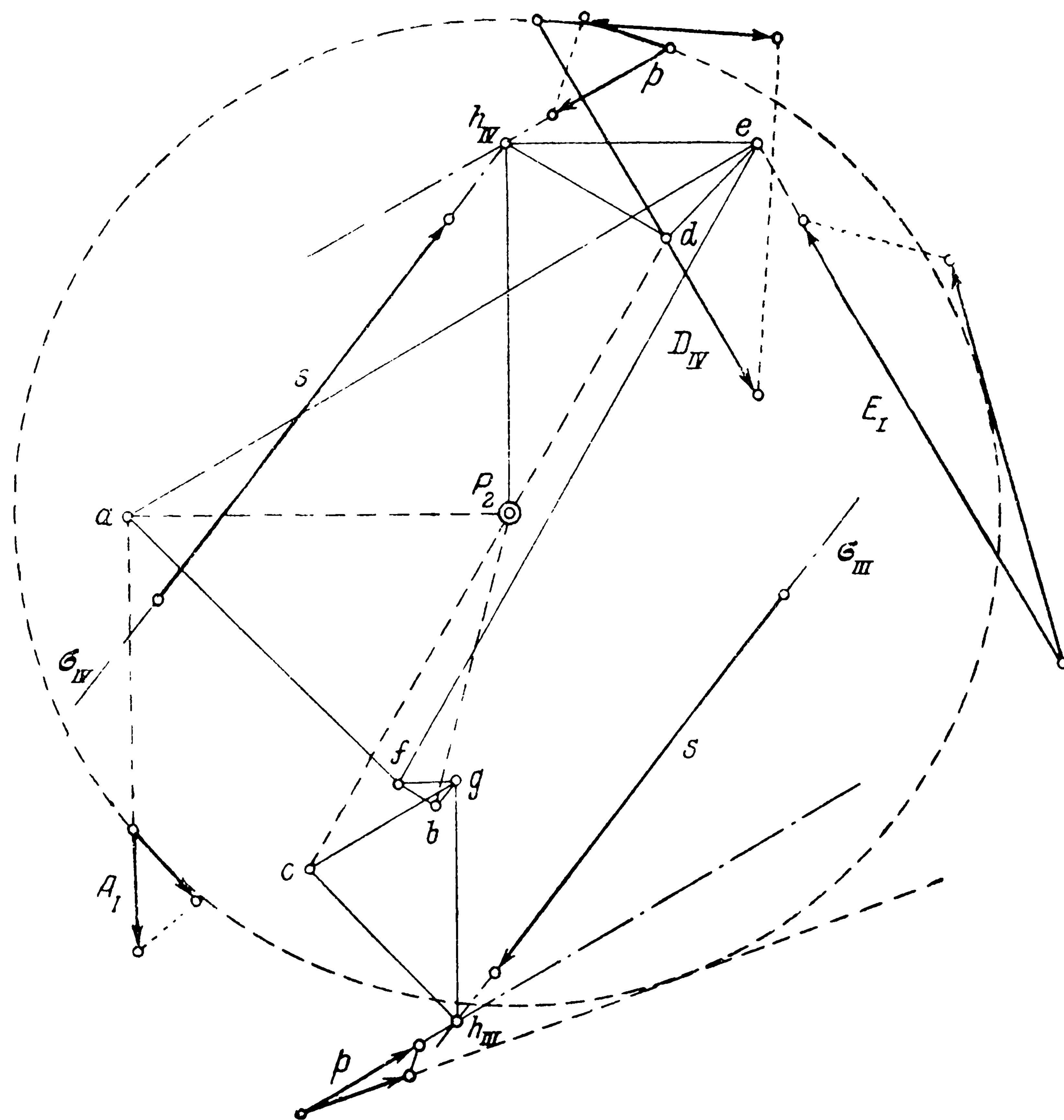
* Подобные между собой картины скоростей, какие получаются для системы с одной степенью свободы, дают начало вспомогательным рычагам, которые мы условились считать тождественными.

После того как составляющие сил шарнирного давления *H* найдены и, следовательно, последнее известно, можно выполнить построение диаграммы моровских напряжений. Разметка на грани показана на фиг. 168 . Предполагая, что обход узлов будет совершаться по часовой стрелке, шарнирное давление *H*, приложенное к звену *III*, следует назвать *V—VI*; отрезок *V—VI* построен (см. фиг. 171), как геометрическая сумма отрезков, изображающих силы *p* и *s*, приложенные к точке H_{III}. Многоугольник равновесия последней точки будет *V—VI—III—V*. Затем последовательно строились многоугольники равновесия узлов *C*, *G*, *B*, *F*, *A*, *E*, *D*, *H*.

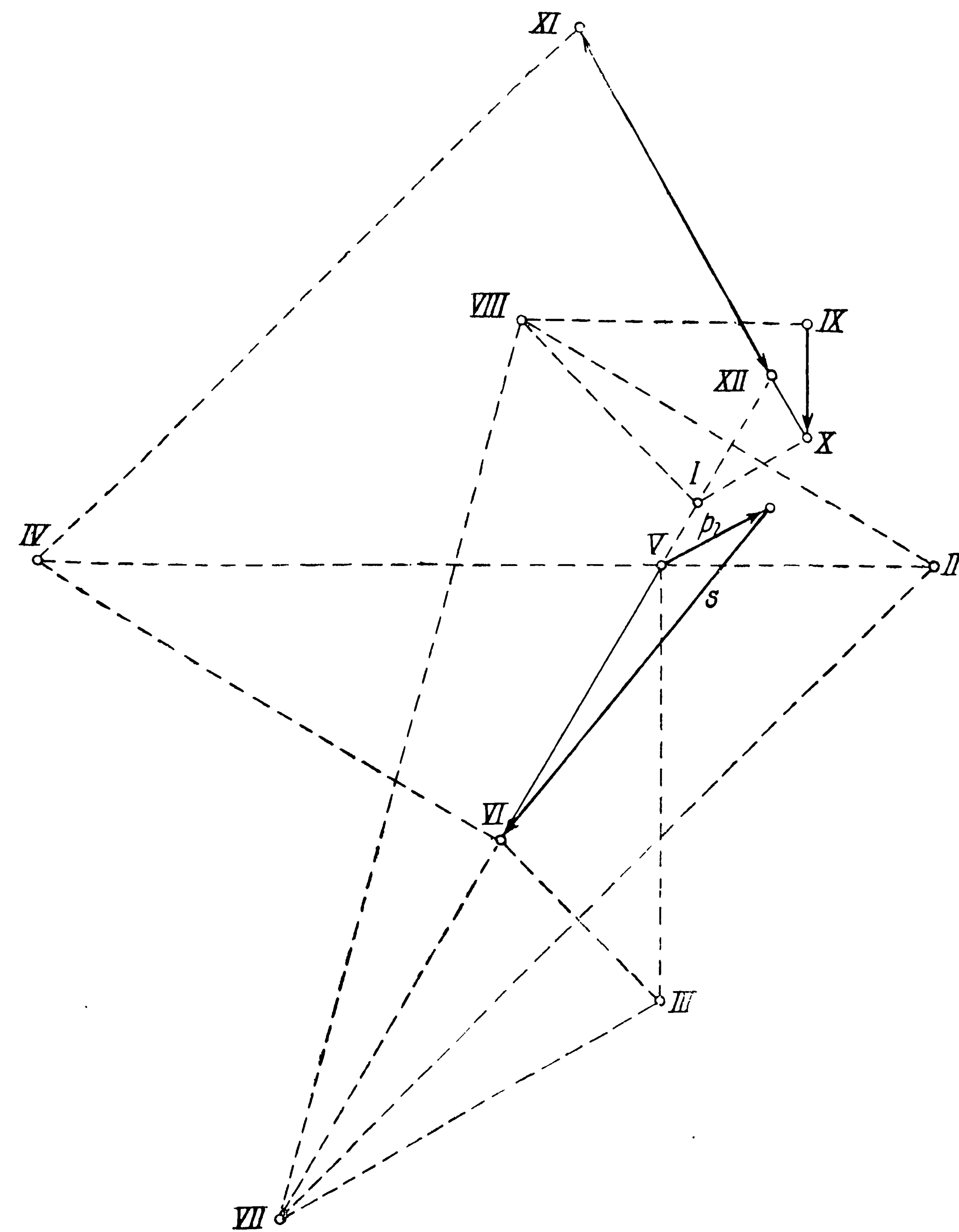
Построение это не нуждается в пояснениях. Укажем лишь, что проверка правильности результата получается весьма полная. Напряжение стержня *HE* определится из равновесия узла *E*, стержня *HD* — из равновесия узла *D*. Так как первыми определились напряжения стержней *HG* и *HC*, то напряжения всех стержней, сходящихся в узле *H*, определены без построения многоугольника равновесия этого последнего узла. Проверкой будет служить, что на этих найденных напряжениях может быть построен замкнутый многоугольник. При построении связной диаграммы, однако, невязка может быть обнаружена гораздо раньше. Первыми (см. фиг. 171) были нанесены на чертеж точки *V* и *VI*; при построении многоугольника равновесия узла *E* нанесется точка *IV*, проверкой будет служить, что отрезок *IV—VI* должен оказаться параллельным стержню *HD*. Заметной невязки не обнаружено.

Так как поводки не были нагружены, то шарнирные давления точек в *A*, *B*, *C*, *D*, *J*, *K*, *L*, *M* равны моровским напряжениям соответствующих поводков. Отрезки, изображающие давления в остальных четырех шарнирах, будут *V—VI*, *V—VII*, *V—VIII*, *V—XI*; прямые, соединяющие указанные вершины, кроме *V—VI*, на чертеже не проведены.

При разметке граней многогранника, за проекцию которого мы считаем цепь третьего класса, следует иметь в виду одну особенность. С т е р ж н и, с о е д и н я ю щ и е м е ж д у



Фиг. 170.



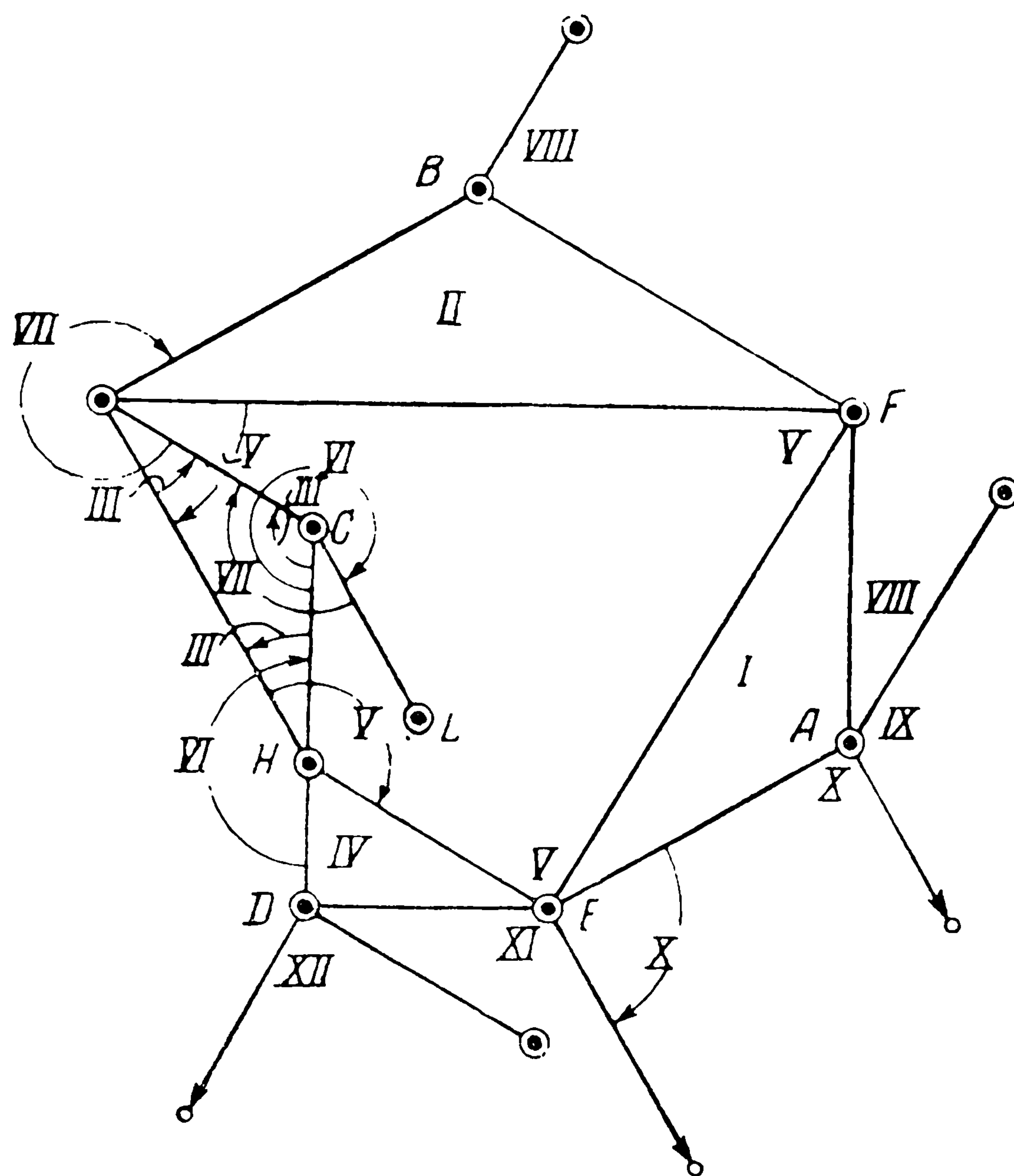
Фиг. 171

собой шарниры, в которых сходятся звенья замкнутой цепи, должны считаться за проекции ребер одной и той же грани. В нашем случае такой гранью является грань V. При избранном нами расположении чертежа почти невозможно было ошибиться в правильной разметке плоских углов, соответствующих этой грани. Но мы можем встретиться и с другими

Фиг. 172.

расположениями, вроде изображенного на фиг. 172. Если плоский угол при вершине E обозначим V, то этой же цифрой обозначится плоский угол при вершине F; после этого легко сделать ошибку и той же цифрой обозначить плоский угол CGF. Результат этой ошибки не замедлит сказаться; плоский угол LCH, очевидно, цифрой V обозначить нельзя уже будет, так как напряжение стержня CL не будет равно нолю при любой данной нагрузке; обозначим его цифрой VI; тогда этой же цифрой

нужно будет обозначить плоский угол *CHE*, а затем и угол *HEF*; но последний был уже обозначен цифрой *V*. Таким образом, сделав круг и вернувшись к первоначальному плоскому углу, мы вынуждены его обозначить уже другой цифрой. Нетрудно убедиться, что, начав неправильную разметку, мы, при



Фиг. 173.

построении, не получим диаграммы, которая может рассматриваться как проекция взаимного многогранника: в ней придется повторять напряжения некоторых стержней. Правильная разметка получится, если примем во внимание выше изложенное правило. Тогда при вершине *G* цифрой *V* отметится не плоский угол *FGC*, а угол *FGH*, а грань *III* должна считаться возвратной относительно ребра *GH*. Правильная разметка плоских углов показана на фиг. 173.

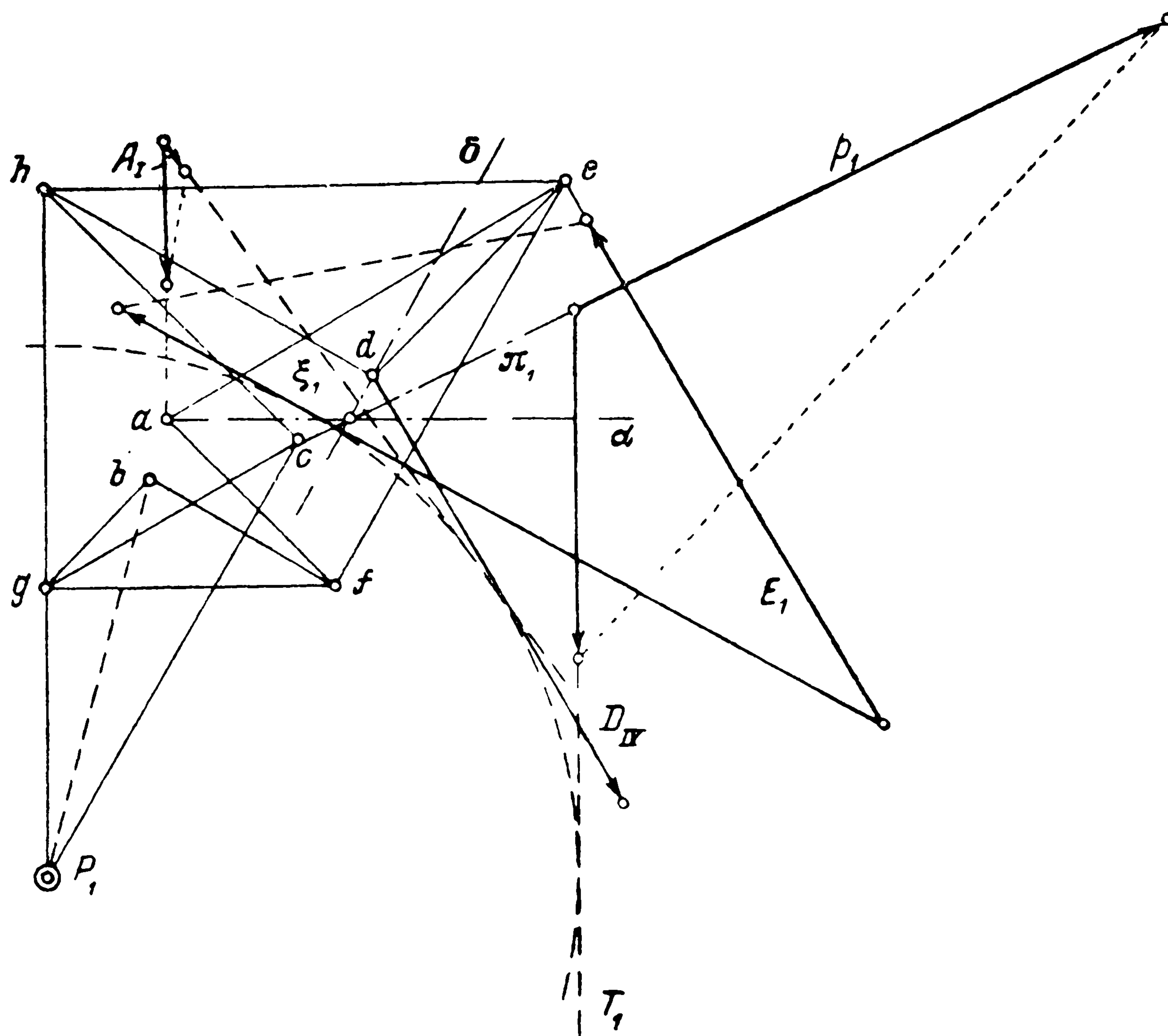
Указанное здесь правило должно применяться и в цепях *четвертого класса*, где звенья цепи образуют несколько замкнутых контуров. Приходится следить именно за тем, чтобы после обхода всех плоских углов конечной грани, возвратившись к первому, не получить для него нового наименования.

В предыдущем мы начали построение моровских напряжений с определения шарнирного давления в точке H. Вследствие разъединения шарнира получилась система с двумя степенями свободы. Мы могли убедиться, что теория вспомогательного рычага позволила нам графическими методами с удобством справиться с решением задачи о равновесии системы с двумя степенями свободы. Решение оказалось значительно проще, чем последовательное определение напряжений двух поводков смежных звеньев; и здесь мы строили две картины скоростей, но это были две картины скоростей системы, состоящей из последовательного ряда двухповодковых групп, которые строятся непосредственно, а там нужно было строить картину скоростей двух механизмов третьего класса, т. е. еще предварительно строить ряд ложных картин скоростей. Таким образом, построение каждой из этих двух картин оказалось бы сложнее, чем построение двух исполненных нами, вместе взятых.

Но раз задача об определении условий равновесия системы с двумя степенями свободы может совершаться с удобством при помощи теории вспомогательного рычага, то почему бы не попытаться, вместо последовательного отбрасывания двух поводков, сделать это одновременно. Ведь и в этом случае, принимая скорости свободных концов остальных поводков равными нолю, получим систему с двумя степенями свободы. Искомыми явятся моровские напряжения двух отброшенных поводков, так что данную систему сил придется уравновесить двумя силами, точки приложения и направления которых даны.

Решение вопроса может быть сведено к решению двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого строим два различных, в указанном нами смысле, вспомогательных рычага для

полученной отбрасыванием двух поводков системы с двумя степенями свободы, наносим на каждый рычаг данные силы и прямые действия искомых. Расстояния последних от полюса рычага равны плечам искомых сил. Написав затем равенство нолю

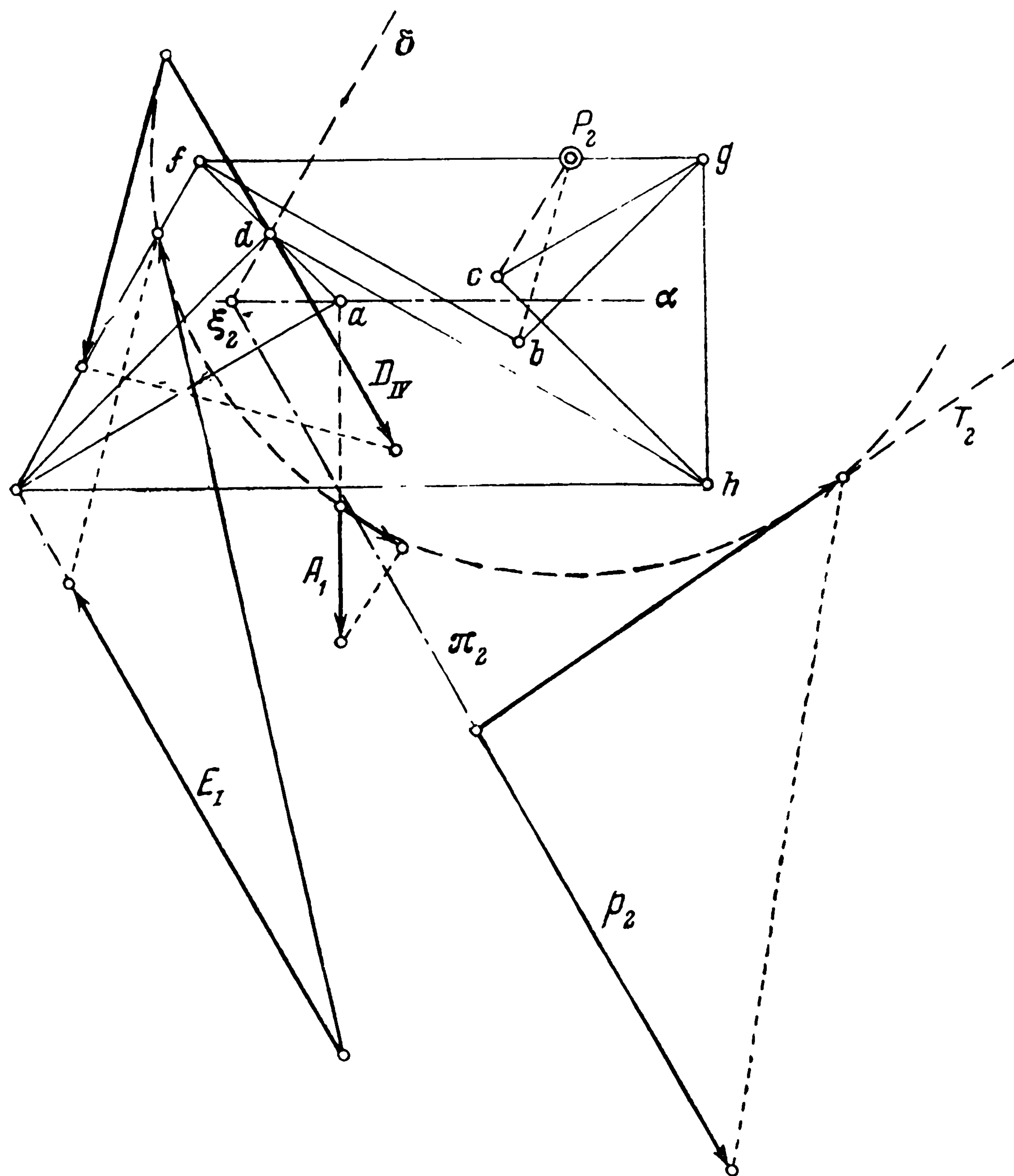


Фиг. 174.

суммы моментов сил относительно полюса каждого из вспомогательных рычагов, в каждом из этих уравнений будем иметь два неизвестных усилия, так как плечи всех сил известны.

Но и чисто графическим путем указанные две силы определяются довольно просто (см. фиг. 174—176). Определим кинематической методой напряжения поводков *1* и *4* все той же цепи фиг. 168, чтобы можно было сравнить результаты с полученными

на фиг. 171, где эти же напряжения определялись полигональной методой.



Фиг. 175.

Весьма существенным является вопрос о том, чем задаться при построении картины скоростей цепи, лишенной двух поводков. Можно было бы задаться скоростью одной из точек A или D, от которых отделены поводки. Но тогда одновременное определение напряжения двух поводков вместо последовательного не будет представлять никаких преимуществ. Если бы мы

отделили только поводок A, то скорость точки D можно было бы выбрать по величине произвольной, по направлению же непременно перпендикулярной к DK. Если отделим и поводок *4*, то можно задаться и иным направлением этой скорости. Но это не повлияет нисколько на порядок построений, как не могло бы на него повлиять изменение направления поводка *4*. И в том и в другом случае картину скоростей придется строить, как для случая цепи второго основного типа третьего класса. Поэтому *необходимо задаться по величине и направлению скоростью шарнирной точки, соединяющей между собой два каких-нибудь звена, не лишенных поводков.*

Фиг. 176.

В нашем случае, так как всех звеньев только четыре, имеется одна только такая точка G. При большем числе звеньев явится возможность выбрать одну из нескольких таких точек. Вообразив себе какое угодно число звеньев, скажем, что тогда построение картины скоростей произведется как для ряда двухповодковых групп. В самом деле, между точкой G и лишенным поводка звеном *1* будет заключаться простая цепь одноповодковых звеньев, и тогда скорости всех точек этой цепи строятся именно, как для ряда двухповодковых групп (см. следствие V предыдущей главы). То же придется сказать и относительно

всех звеньев цепи, располагающейся между точкой G и вторым лишенным поводка звеном IV. Таким образом, будут построены скорости точек H и F; но лишенные своих поводков звенья A и B представляют в свою очередь двухповодковую группу, присоединяющуюся к совокупности остальных.

Итак, задавшись различными направлениями скорости точки G, мы построили две картины скоростей (см. фиг. 174 и 175) для случая, изображенного на фиг. 168. Через точки a и d каждой из них проведены прямые α и δ, по которым должны быть соответственно направлены искомые моровские напряжения S_a и S_d поводков *1* и *4*, нанесена приводящая окружность и избраны точки приложения данных сил на изображениях их прямых действия.

В нашем случае не было сил, приложенных к поводкам; если такие силы имеются, то прежде необходимо для определения моровских напряжений поводков перенести в шарнирах, соединяющих звенья с поводками, эти силы на звенья, как то нами раньше указывалось.

Если представим себе перенесенными в рычаге искомые силы S_a и S_d в точку ξ_1 (см. фиг. 174) пересечения прямых их действия α и δ, то, сложив их здесь по правилу параллелограма, получим некоторую равнодействующую Z. То же покажем на фиг. 175 во втором вспомогательном рычаге, где точкой приложения силы Z является ξ_2. Очевидно, что в обоих случаях сила Z, как геометрическая сумма все тех же двух сил S_a и S_d, получится одна и та же. Эту силу Z легко определить графически, после чего остается только разложить ее на две составляющие по направлению поводков.

Заменив (см. фиг. 174) данные силы силами, направленными по касательным к приводящей окружности, находим их уравновешивающую, направленную по касательной T_1. Силу Z представляем себе разложенной по произвольно заданному направлению π_1 на составляющую p_1, и по направлению $P_1\,\xi_1$ — на составляющую s_1.

Последняя момента относительно точки P_1 не дает, и потому момент силы p_1 должен равняться моменту силы, направленной по касательной T_1. Поэтому сила p_1 определится, если перенести силу, действующую по касательной T_1, в точку пересечения этой касательной с прямой π_1 и повернуть ее, по доказанным для рычага правилам, до совпадения с направлением прямой π_1. Вторая составляющая s_1 остается неизвестной. Вполне аналогично второй вспомогательный рычаг (см. фиг. 175) позволит разложить ту же силу Z на две составляющие, из которых составляющая s_2, направленная по $P_2\,\xi_2$, остается пока неизвестной, а вторая p_2, направлением которой можно задаться в виде прямой π_2, определится вполне аналогичным предыдущему способом. Как в дальнейшем определяется сила Z, почти очевидно. От произвольной точки P (см. фиг. 176) откладываем силы p_1 и p_2 и через концы изображающих их векторов проводим прямые σ_1 и σ_2, направление которых соответственно совпадает с направлением сил s_1 и s_2. Прямые σ_1 и σ_2 пересекутся в некоторой точке ζ, причем отрезок $P\zeta$ будет изображать искомую силу Z. Последнюю разлагаем по направлениям δ и α на искомые составляющие S_d и S_a. Первая из них на оригинале чертежа превышала отрезок $XII—VI$ (см. фиг. 171) на 1,1 мм при длине его в 91 мм, вторая была меньше отрезка $VIII—IX$ на 0,7 мм. Эти ошибки не выходят за пределы обычных невязок чертежа. Следует отметить, что указанный прием может быть применен и в том случае, если точки ξ_1 и ξ_2 окажутся за пределами чертежа, так как направления сил s_1, s_2, p_1 и p_2 все же могут быть проведены.

Остается еще упомянуть о случае, когда все три шарнира треугольного звена лежат на одной прямой. Здесь придется повторить только сказанное по тому же поводу для цепей первого класса. Придется еще дополнительно определять кинематическим методом либо еще некоторые новые давления в шарнирах, либо напряжения некоторых других поводков, кроме двух. В последнем случае следует иметь в виду, что одновременное определение напряжения двух поводков будет проще, чем

определение напряжения одного только поводка, вследствие того, что можно избежать необходимости построения картины скоростей цепи третьего класса, которая заменяется последовательным рядом двухповодковых групп.

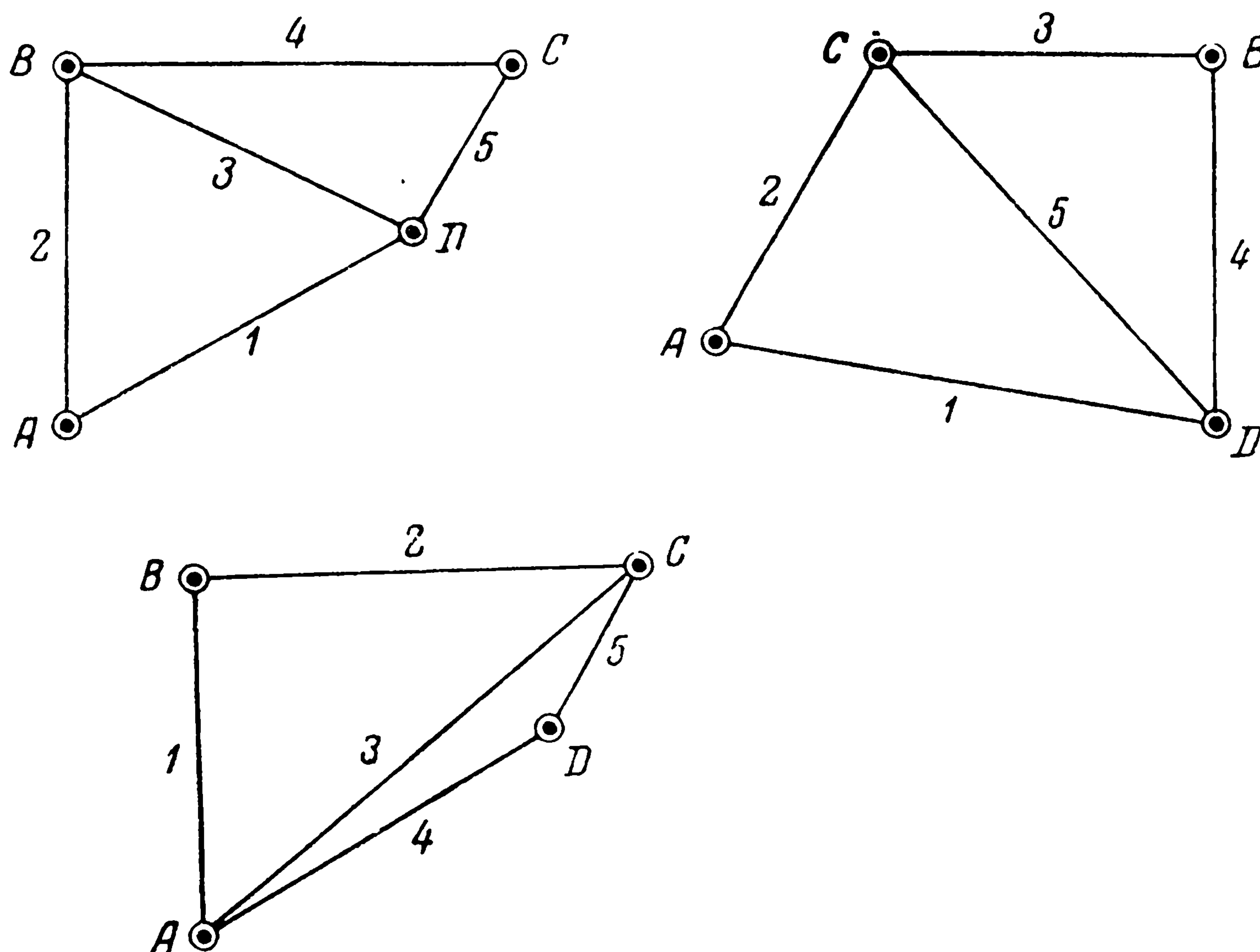
Переходим теперь к случаю цепи третьего класса, но второго основного типа, в котором встречаются бесповодковые и двухповодковые звенья. Здесь мы впервые встречаемся с четырехшарнирными звеньями.

Положение II. Если известны напряжения всех стержней, примыкающих к четырехшарнирному звену в двух из его шарниров, и всех, кроме одного, примыкающих к нему в третьем, то напряжения этого последнего стержня и пяти двухшарнирных стержней, из которых представляем себе составленным четырехшарнирное звено, определятся полигональной методой.

Назовем A и B те шарниры четырехшарнирного звена, в которых примыкают стержни, напряжения которых известны; C — тот шарнир, в котором примыкают такие же стержни и, кроме того, один стержень, напряжение которого неизвестно; D — четвертый шарнир. Могут представиться два случая: шарниры A и B — смежные (см. фиг. 177, слева), т. е. принадлежат одной и той же стороне четырехугольника, или же шарниры — не смежные, т. е. расположены по его диагонали (см. фиг. 177, справа, верх).

В первом из этих случаев можно ввести диагональный стержень как угодно, либо BD, либо AC. Если введем стержень BD, то из многоугольника равновесия узла A определим напряжения стержней *1* и *2*, так как напряжения всех остальных стержней, примыкающих в шарнире A и принадлежащих смежным с нашим звеном звеньям, известны по предположению. В вершине B окажутся неизвестными тоже только напряжения двух стержней *3* и *4*, которые должны определиться полигональной методой. Затем в узле C окажутся неизвестными только напряжения стержней *5* и примыкающего здесь к нашему звену стержня, упомянутого в условии вместе с другими

стержнями, напряжения которых предполагаются известными; полигональной методой эти два напряжения, следовательно, определятся. Если введем стержень AC, то начать надо будет с узла B, затем перейти к узлу A и кончить в узле C, так что только узлы A и B обменяются ролями.



Фиг. 177.

Если узлы A и B в четырехшарнирном звене — не смежные, то диагональный стержень нельзя ввести произвольно, он должен непременно соединять между собой не эти узлы, а два других C и D, так как иначе не найдется узла, в котором меньше трех неизвестных напряжений. Здесь придется сначала построить многоугольники равновесия узлов A и B, причем можно начать с любого из них, а затем только из равновесия узла C определить напряжение в диагональном стержне CD и в другом стержне, примыкающем в узле C, но принадлежащем другому звену.

Так как лишь важно сплошное звено заменить четырехшарнирной фермочкой из пяти стержней, то, конечно, диагональ можно ввести какую угодно, в частности, ту, которая приводит к желательному результату.

Обратимся теперь к чертежу цепи третьего класса второго основного типа (см. фиг. 42, часть *I*). Допустим, что каким бы то ни было образом приведены в известность напряжения всех стержней и поводков звеньев, составляющих простую цепь, к которой принадлежат звенья *A* и *B* и которая с двух сторон ограничивается двухповодковыми четырехшарнирными звеньями. Мы заметим, что все же нельзя будет определить полигональной методой напряжений стержней и поводков остальных звеньев цепи, так как каждое из двух поводковых звеньев составляет преграду, через которую не перейти. Ведь известными окажутся в каждом из них напряжения стержней, примыкающих к четырехшарнирному звену т о л ь к о в о д н о м и з е г о ш а р н и р о в, а этого недостаточно, чтобы определить напряжения пяти стержней, образующих это звено.

Итак, ни определение кинематической методой напряжения одного ли, двух ли поводков или бесповодкового двухшарнирного звена цепи, заключенной между двумя двухповодковыми, ни определение шарнирного давления между двумя звеньями не даст нам возможности пользоваться полигональной методой на дальнейшем протяжении цепи.

Конечно, положение не вполне безвыходное. Можно было бы определить кинематической методой напряжение одного поводка каждого из двухповодковых. Можно это сделать либо одновременно, либо последовательно, причем нетрудно убедиться, что придется строить картины скоростей приемами, изложенными при рассмотрении цепей третьего класса второго основного типа.

В самом деле, если допустить, что в одном из двухповодковых, ограничивающих цепь, содержащую звенья *A* и *B*, известно напряжение поводка, то окажутся известными напряжения стержней, примыкающих не к одной шарнирной точке,

а к двум, а в третьей будет примыкать только один стержень — второй поводок — с неизвестным напряжением. Таким образом, условия положения II выполнены, напряжения всех пяти стержней и второго поводка будут определены полигональной методой. В четвертом шарнире будет примыкать только два стержня следующего треугольного одноповодкового звена или один бесповодкового, и можно будет, основываясь на положении I, беспрепятственно применить полигональную методу до следующего двухповодкового, где снова придется кинематической методой определить напряжение одного поводка.

Мы не вдаемся в большие подробности, потому что громоздкость способа очевидна. Кинематическую методу придется распространять для нахождения напряжения поводка на все звенья цепи и при n двухповодковых применить всего $n-1$ раз, потому что к последнему из них можно будет подойти с двух сторон. При этом каждый раз построение картины скоростей будет сопровождаться применением метода ложных построений.

Ввиду этого укажем прием, позволяющий обойти все указанные неудобства и свести задачу к определению напряжений в ряде двухповодковых механизмов, для которых и будут строиться картины скоростей.

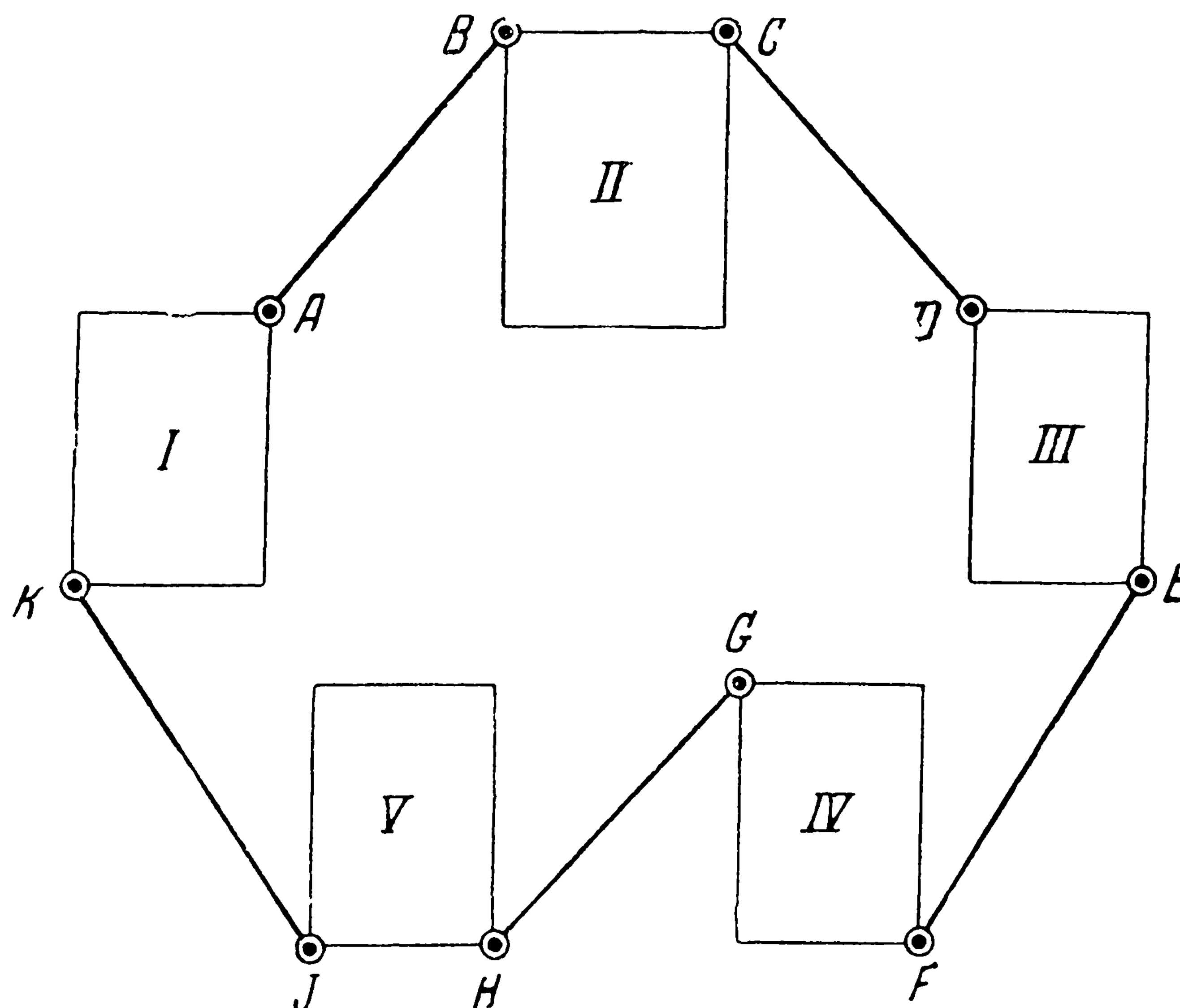
С этой целью рассмотрим сначала, на какие части распадается цепь, если выбросить из нее бесповодковые звенья. Так как в нормальной цепи второго основного типа третьего класса имеется чередование двухповодковых и одноповодковых звеньев, то каждая из n частей, на которые разобьется наша цепь выбрасыванием бесповодковых, будет непременно содержать одно двухповодковое и, кроме того, может содержать еще только одноповодковые. Все эти звенья расположены между собой в порядке простой цепи, так как первоначальная цепь была простой, хотя и замкнутой. Поэтому одноповодковые звенья, если они вообще имеются, образуют цепь одноповодковых, примыкающую к двухповодковому либо с одной стороны, либо с двух.

Общий тип получающегося образования можно видеть на фиг. 43 части I.

Обратим внимание на двухповодковое звено B, предполагая все бесповодковые удаленными. К нему примыкают с обеих сторон части a и b, состоящие из простой цепи одноповодковых звеньев; число этих звеньев с каждой из сторон может дойти до единицы и даже до ноля. Предполагая, при пользовании кинематической методой, свободные концы поводков каждого такого образования, на которые распалась наша цепь по удалении из нее бесповодковых, неподвижными, чтобы не ввести неизвестных нам шарнирных давлений в концах поводков, мы будем всякий раз иметь дело с системой, обладающей одной степенью свободы и образованной из кривошипа и ряда двухповодковых групп. В самом деле, рассматривая один поводок двухповодкового звена B как кривошип, звено B со вторым поводком мы можем рассматривать как двухповодковую группу, присоединенную к этому кривошипу; равным образом, всякое следующее звено частей a и b совместно со своим поводком будет тоже образовывать по двухповодковой группе.

Чтобы проще уяснить себе сущность приема, обратимся к схематическому чертежу (см. фиг. 178), где каждый прямоугольник изображает из себя одну из пяти частей, на которые должна распасться цепь третьего класса с пятью бесповодковыми по удалении последних. Что касается самих бесповодковых и притом двухшарнирных звеньев, то они и изображены в виде таких стержней, соединяющих указанные пять частей. Как уже говорилось, при неподвижных концах поводков каждая из частей, обозначенная прямоугольником, представляет собой двухповодковый механизм. Если нам удастся определить напряжения в соединяющих эти части стержнях, то задача решена, потому что, выкинув эти стержни и заменив действие их силами, приложенными в точках A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, мы приведем задачу к определению шарнирных давлений в ряде двухповодковых механизмов. Итак, займемся вопросом о простейшем способе определения напряжений в бесповодковых звеньях.

Вопрос может быть сведен к решению системы линейных уравнений, содержащих каждое по два неизвестных напряжения. С этой целью выбросим бесповодковые и начертим картины скоростей каждого из механизмов *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, задавшись величиной скорости точки прикрепления двухповодкового звена к тому из его поводков, которые считаем за кривошип.



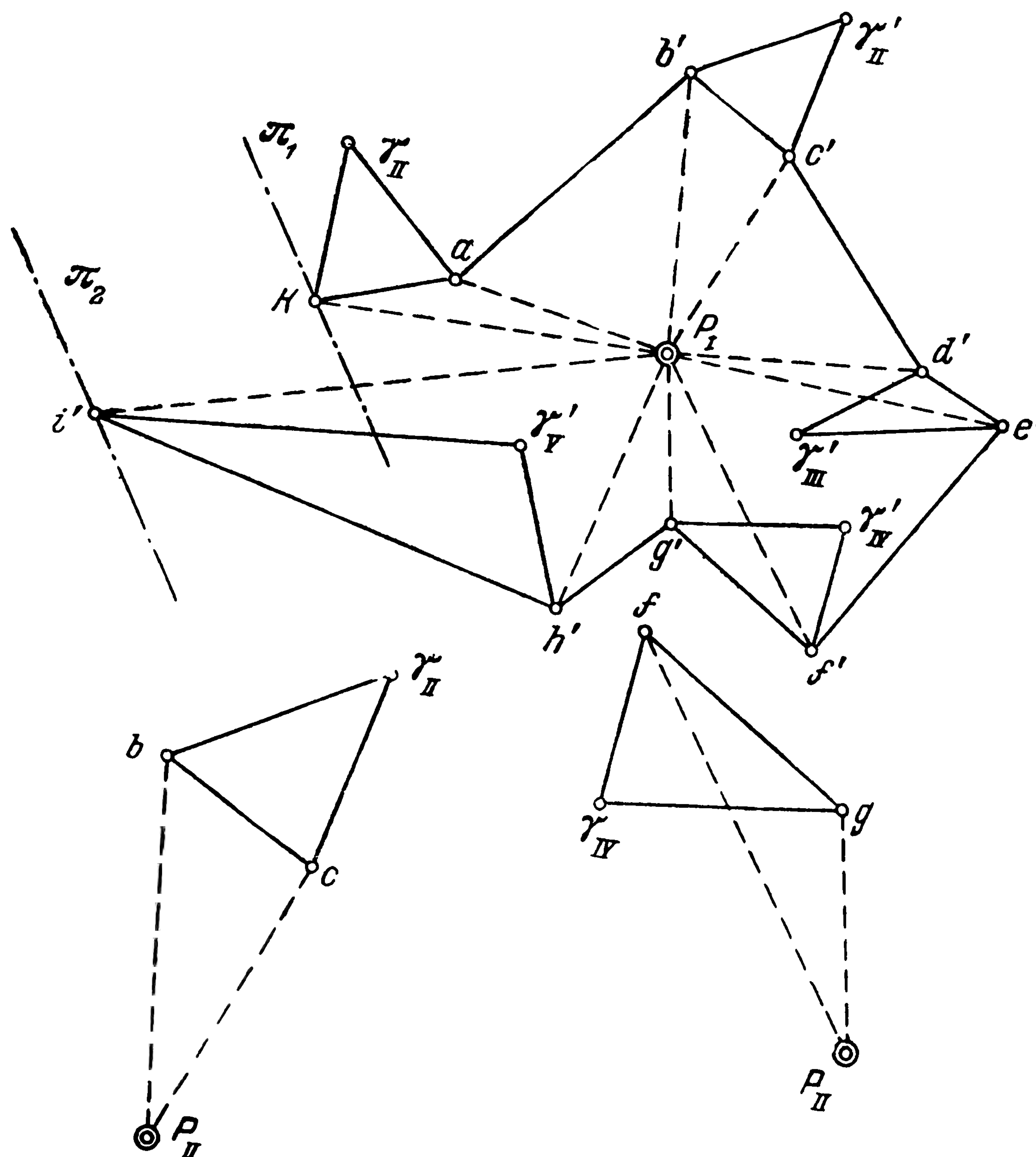
Фиг. 178.

Направление скорости этой точки, очевидно, известно, раз скорость конца поводка принята равной нолю. Таким образом, получим пять картин скоростей, которыми будем пользоваться в качестве вспомогательных рычагов. Если силы, для определения моровских напряжений, были разнесены по узлам системы фиг. 178, то напряжения всех соединительных стержней, связывающих между собой отдельные механизмы, должны быть заменены силами, направление которых совпадает с направлениями соответствующих стержней. Поэтому на каждый из вспомогательных рычагов могут быть нанесены прямые действия

всех сил, как известных, так и двух неизвестных, равных неизвестным напряжениям соединительных стержней; плечи всех сил относительно полюса рычага будут известны. Приравняв в каждом из вспомогательных рычагов нолю сумму моментов сил относительно полюса рычага, получим столько уравнений, сколько у нас получилось отдельных механизмов или же было бесповодковых звеньев в первоначальной цепи третьего класса. В каждое из этих уравнений линейным образом войдут два неизвестных напряжения стержней, соединяющих каждый из механизмов с двумя соседними. Таким образом, при n бесповодковых получится n линейных уравнений с n неизвестными, причем в каждом из них будет иметься налицо только два неизвестных.

Переходим к графическому решению поставленной задачи. С этой целью в каждом из вспомогательных рычагов, число которых равно числу выброшенных одноповодковых, заменяем систему данных сил (методой приводящей окружности или какою-либо другой), одной силою, приложенной в данной точке. Эти силы будем называть R_I, R_{II}, R_{III} и т. д., а точки их приложения обозначим γ_I, γ_{II}, γ_{III} и т. д. После этого приступим к определению кинематической методой напряжения одного из бесповодковых, например стержня KJ. Выбросив из системы (см. фиг. 178) этот стержень, получаем из жесткой системы, какой она была при неподвижности концов ее поводков, опять-таки механизм. Нужно будет построить картину скоростей точек этого механизма, однако, не всех шарнирных точек, а только принадлежащих бесповодковым звеньям, соединяющим между собой части I, II, III, IV, V, и, кроме того, точек γ. Для упрощения задачи следует за точки приложения сил R принимать, если только это не противопоказуется соображениями об удобстве в расположении точек чертежа и точности получаемого результата, изображения все тех же шарнирных точек бесповодковых. Для общности предполагаем, что точки γ выбраны произвольно, и тогда надо будет строить скорости трех точек каждой из частей, на которые распалась бы система,

если выбросить все бесповодковые. Имеющиеся у нас картины скоростей пяти механизмов, на которые система (см. фиг. 178) распадается в последнем случае, позволяют нам построить скорости только этих точек, пропуская все остальные.



Фиг. 179.

На фиг. 179 предполагаются изображенными картины скоростей трех из механизмов, на которые система распалась при удалении бесповодковых, именно частей *I*, *II* и *IV*, причем эти картины скоростей построены соответственно при полюсах P_I, P_{II}, P_{IV}. При этом отмечены изображения не всех точек

каждого механизма, а только трех основных: точки γ и двух точек прикрепления стержней, соединяющих каждый такой механизм с двумя соседними; как уже говорилось, в большинстве случаев будет выгодно слить точку γ с одной из двух последних. Покажем же теперь, как воспользоваться картинами скоростей отдельных частей, чтобы построить картину скоростей указанных характерных точек для системы, образованной из системы, представленной на фиг. 178, удалением о д н о г о т о л ь к о с т е р ж н я *IK*.

Мы уже сказали, что по удалении всех бесповодковых каждая из частей, на которые распалась цепь третьего класса, при неподвижности концов поводков, обладала одной степенью свободы. Направление скорости каждой точки такой части определялось единственным образом, и скорости всех точек могли изменяться для каждого данного положения только пропорционально: поэтому возможные картины скоростей каждой части между собой подобны. Вводя между этими частями соединительные стержни, мы не уничтожаем связей, существующих между точками каждой такой отдельной части. Поэтому, если каждая такая часть, вследствие введения новых связей, не лишится подвижности, то все прежние ограничения последней останутся в силе, и картина скоростей точек этих частей, связанных соединительными стержнями, за исключением *IK*, должны быть подобны тем, которые получились для каждой из них врозь. Так это и будет, так как очевидно, что, вводя указанные стержни, мы не лишим отдельные части подвижности. В части *I* точка *A* описывала некоторую определенную траекторию, в части *II* точка *B* описывала некоторую другую траекторию; если теперь точки *A* и *B* соединим стержнем, то в общем случае между четырьмя координатами точек окажутся три зависимости: два уравнения траекторий и одно соотношение, определяющее постоянство расстояния точек *A* и *B*.

Таким образом, положение одной из точек на своей траектории, например *A*, может быть произвольно задано,

а положение другой определится в зависимости от положения первой. Особым является лишь тот случай, когда стержень AB расположен по общей нормали к обеим траекториям, так как в этом случае он соединяет между собою две точки, расстояние между которыми будет либо максимум, либо минимум, и потому расстояние между любой парой смежных точек будет либо меньше, либо больше длины стержня, но никак не равно ей.

Соединение двух отдельных механизмов стержнем для образования нового механизма составляет один из известных и употребительных приемов образования новых механизмов *, причем известно, что подвижность отдельных соединяемых частей сохраняется, так что подробнее на этом можем не останавливаться. В данном случае мы только многократно употребляем этот прием: сначала из двух отдельных механизмов I и II образуем новый введением стержня AB, затем получившийся механизм соединяем в еще новый механизм с механизмом III введением между ними стержня CD и т. д до механизма V. Стержень IK нельзя ввести, не нарушая подвижности, так как он являлся бы соединительным между точками одного и того же механизма, образованного из соединения отдельных механизмов остальными соединительными частями.

Если в механизме, образованном из системы (см. фиг. 178) выбрасыванием стержня IK, мы зададимся той же скоростью вращения кривошипа части I, которой мы задавались при построении отдельной картины скоростей этой части, то получим и прежнюю картину скоростей при полюсе P_{I}, на которой отмечены (см. фиг. 179) изображающие точки a, k и γ_I. Что касается части II, то здесь получим другую картину скоростей, чем получалась раньше, потому что тогда скорость одной точки задавалась произвольно, теперь же она находится в связи со скоростью точки A части I. Но изображающие точки b', c' и γ'_{II} при полюсе P_I легко найти по картине скоростей, раньше построенной для части II. В самом деле, направление век-

* Burmester. Lehrbuch der Kinematik, H. I, S. 423.

тора $P_I b'$ и вектора $P_{II} b$ должно быть одно и то же, и этим определяется одна прямая, на которой должна лежать точка b'; вторая же найдется, если помнить, что отрезок ab' должен быть параллелен AB. Имея две точки P_I и b', соответствующие точкам P_{II} и b, построим точки c' и γ'_{II}, пользуясь подобием фигур $P_{II} b c \gamma_{II}$ и $P_I b' c' \gamma'_{II}$.

Вполне аналогично перейдем к части III, отдельная картина скоростей которой не показана, затем к части IV, предполагая, что изображение e' точки E найдено. Отдельная картина скоростей точек этой части указана нами при полюсе P_{IV}; по присоединении стержня EF должна получиться подобная картина. Чтобы получить изображающую точку f', проводим через P_I прямую, параллельную $P_{IV} f$, и через e' — прямую, параллельную EF. Картина скоростей части IV, присоединенной к остальным, получилась повернутой на 180° сравнительно с раньше построенной, чего не было для случая части II. Причина этого понятна. Когда строилась картина скоростей механизма независимо от связи с остальными частями, то скорость одной точки по касательной к ее траектории была задана в направлении, прямо противоположном тому, которое будет иметь место при осуществлении связи между частями.

Сказанным, мы считаем, разъяснено, как построить, пользуясь независимо построенными картинами скоростей отдельных систем, картину скоростей важных для нас точек, когда будет установлена связь между частями. Когда и это последнее построение будет окончено, нужно будет приложить в точках $\gamma'_I, \gamma'_{II}, \gamma'_{III} \ldots$ найденные силы $R_I, R_{II}\ R_{III} \ldots$, заменяющие в совокупности систему данных сил, и систему сил R уравновесить силами, заменяющими напряжение выброшенного стержня IK. Уравновешивающая система представится в виде двух равных и противоположно направленных сил, образующих пару и действующих по прямым π_1 и π_2, параллельным стержню IK и проходящим через точки k и i'. С определением сил равнодействующей пары мы уже успели ознакомиться.

Упрощение было бы достигнуто даже, если бы для каждого из бесповодковых пришлось строить такую диаграмму, как на фиг. 179. Но этого не потребуется. Раз только напряжение стержня *IK* определилось, можно будет определить напряжения стержней *AB* и *GH* из картин скоростей, построенных для выделенных частей *I* и *V*. Ведь раньше этими вспомогательными рычагами можно было пользоваться только для составления уравнений, содержащих каждое по два неизвестных. Теперь же одно из этих неизвестных — напряжение стержня *IK* — определено, может быть нанесено на картину вспомогательного рычага, и напряжение стержня *AB* должно в части *I* уравновесить силу R_I, приложенную в γ_I, и силу, заменяющую напряжение стержня *IK* и приложенную в *k*.

Точно так же напряжение стержня *GH* должно уравновесить известное напряжение стержня *IK* и силу R_V на вспомогательном рычаге выделенного механизма *V*. После этого из условий равновесия механизмов *II* и *IV* определятся напряжения стержней *CD* и *FE*. Проверкой будет служить то обстоятельство, что механизм *III* под действием силы R_{III} и напряжений двух стержней *CD* и *FE* должен находиться в равновесии.

Мы сказали уже, что, по определении напряжений бесповодковых звеньев, задача сведется к определению шарнирных давлений в двухповодковом механизме. Пользуясь схемой (см. фиг. 43, части I), легко и подробнее проследить, как будет здесь применяться полигональная метода. Напряжение звена *A* найдено; последнее примыкает к крайнему одноповодковому части *a*, образуя единственный стержень, примыкающий к нему в этом шарнире. В другом шарнире трехповодкового примыкает тоже один только стержень, и притом с неизвестным напряжением, именно поводок; выполнены условия положения I, и напряжения всех стержней этого звена и поводка определятся полигональной методой. Для следующего одноповодкового снова окажутся выполненными условия положения I и т. д. до двухповодкового звена. Через последнее, как мы указывали, перешагнуть не удастся.

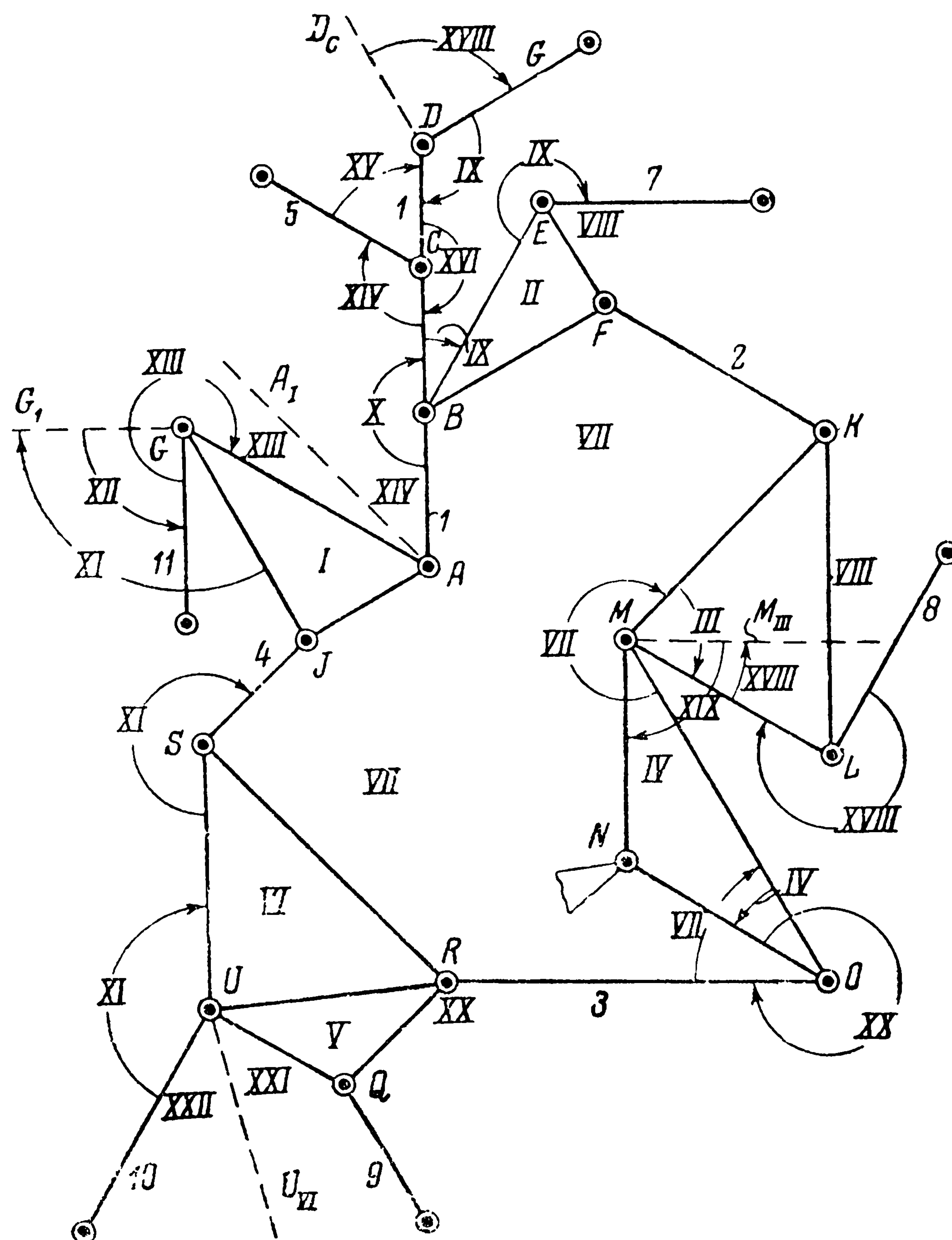
Но теперь обращаемся к части b и определяем напряжения всех стержней, образующих эту часть. После этого окажутся для двухповодкового звена известными напряжения стержней, примыкающих в двух шарнирах и принадлежащих части a и части b; в третьем шарнире неизвестно напряжение только поводка, а этого, согласно положению II, уже достаточно, чтобы определить напряжение всех стержней, составляющих двухповодковое звено и указанного его поводка. Из полигона равновесия четвертого узла определится единственное неизвестное — напряжение второго поводка,— и этот узел будет проверочным.

Мы знаем, что двухповодковое звено может быть заменено шарнирно закрепляемым. Это введет некоторое упрощение; в то время как двухповодковое звено рассматривалось как составленное из кривошипа и двухповодковой группы, шарнирно закрепляемое само является кривошипом.

Изложенные здесь в общем виде соображения иллюстрируем на примере цепи фиг. 180. В этой цепи мы встречаем двухповодковое звено $SUQR$, в котором не имеется более двух шарниров на одной прямой, двухповодковое звено *1*, все четыре шарнира которого лежат на одной прямой, и треугольное звено, шарнирно закрепляемое в N. Три бесповодковых звена обозначены *2*, *3* и *4*. Остальные звенья *I*, *II* и *III* — одноповодковые. При обозначении звеньев цифрами римские цифры были применены только к тем звеньям, которые должны рассматриваться как проекции треугольных граней, так что обозначение этих звеньев совпадает с обозначением граней. Первое из упомянутых нами двухповодковых отмечено двумя цифрами *V* и *VI*, так как, по введении вспомогательного стержня UR, оно должно рассматриваться как проекция двух треугольных граней. Все звенья, состоящие из двухшарнирных стержней, также звено *1*, все шарниры которого расположены на одной прямой, и поводки обозначены арабскими цифрами.

При разметке плоских углов граней обращаем прежде всего внимание на звено *1*, так как здесь впервые мы встречаемся со случаем, где четыре шарнира лежат на одной прямой. Такое

звено может рассматриваться, как проекция четырехугольной грани, разделенной диагональю на две треугольные, подобно звену $V—VI$, но стоящей перпендикулярно к плоскости чертежа.



Фиг. 180.

Этим двум граням во взаимном многограннике будут соответствовать бесконечно удаленные вершины, заключение, к которому мы придем тем же путем, как пришли и в случае треугольного звена, три шарнира которого лежат на одной прямой;

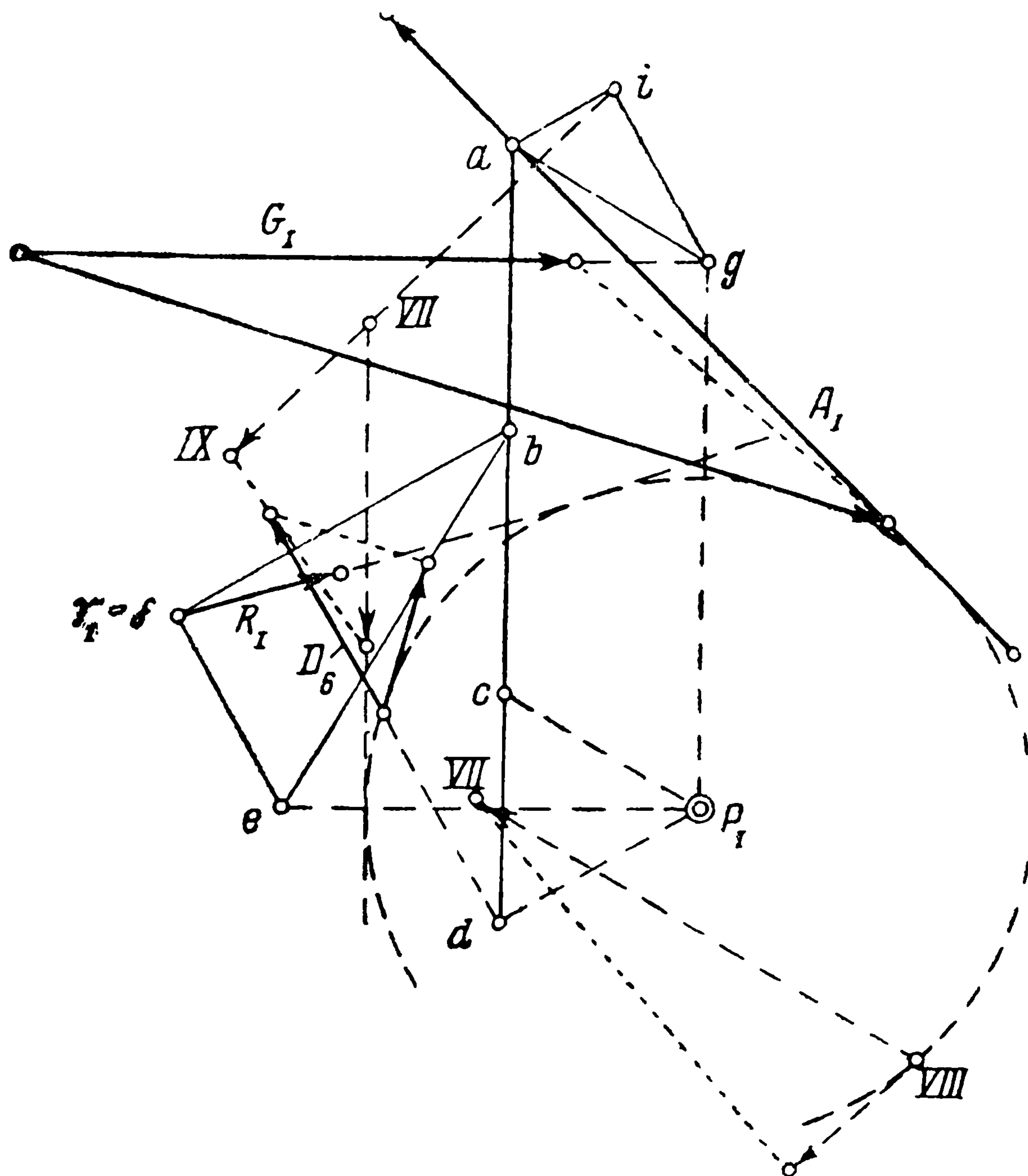
ведь наше звено может рассматриваться, как совокупность двух таких треугольников, вершины которых расположились на одной прямой.

Мы видели, что введение бесконечно удаленных вершин не приносит никакой пользы, что их лучше обойти, применив лишний раз кинематическая метода, без чего все равно не обойтись в таких случаях. Причиной этого обстоятельства являлось то, что конечная равнодействующая двух параллельных и бесконечно больших сил может быть и непараллельна последним, что направление ее поэтому оказывается неизвестным. Все эти соображения приложатся и к нашему случаю. Но как там, чтобы произвести правильную разметку граней, не излишне будет ввести плоские углы граней, которым соответствуют бесконечно удаленные вершины взаимного многогранника, там, где эти углы в проекции равны 180°, т. е. в тех узлах, где стержень располагается по обе стороны узла. Так появились плоские углы *X* и *XVI*, которым во взаимной диаграмме не будет соответствовать вершин, так как последние находятся в бесконечности.

Довольно сложная разметка плоских углов имеет место в вершине *M*, где имеются две возвратные грани. Сила M_{III}, приложенная в точке *M* звена *III* на фиг. 180, не показана; отмечена только ее прямая действия. Точно так же на фиг. 180 отмечены только прямые действия остальных четырех сил; величины же последних можно найти во взаимной диаграмме моровских напряжений (см. фиг. 185) и на фиг. 181, 182 и 183. Так как прямая действия силы M_{III} проходит на чертеже между ребрами грани *III*, то этим вызывается необходимость введения возвратной грани *XVIII*. Возвратный характер грани *IV* вытекает из общего замечания, касающегося всех образований, заключающих в себе замкнутые цепи из звеньев. Именно стержни, образующие те стороны звеньев, которые соединяют два шарнира между соседними звеньями, должны все рассматриваться как ребра одной грани. Такой гранью у нас является грань *VII*, и стержень *MO*, как соединяющий между собой

два таких междузвенных шарнира, должен образовать ребро этой грани.

Легко убедиться, что, не выполняя этого условия, невозможно будет добиться правильной разметки плоских углов. Стрелки

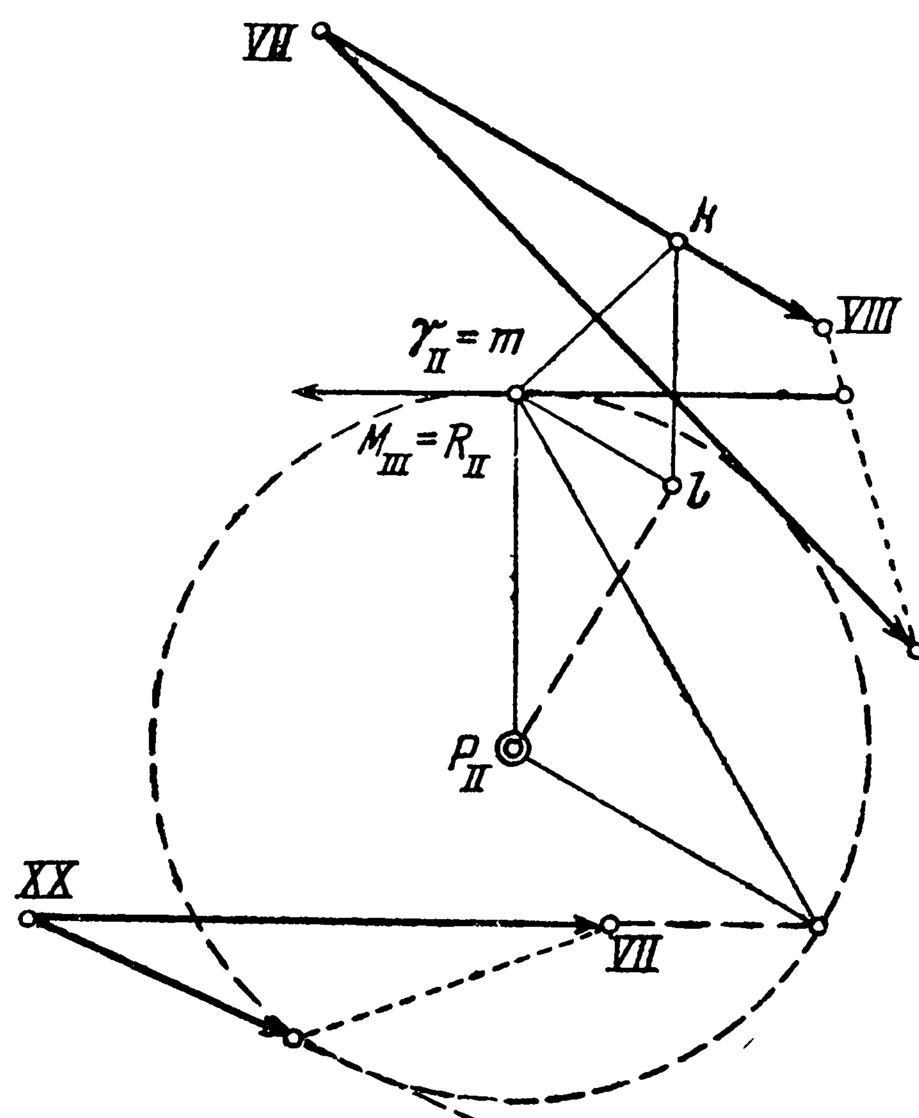


Фиг. 181.

для обозначения последних поставлены лишь в тех местах, где без этого ясность чертежа казалась сомнительной. При разметке граней и плоских углов принималось во внимание, что предварительно будут определены кинематическая метода напряжения бесповодковых *2*, *3* и *4*.

К этому определению и необходимо теперь приступить. Выбросив указанные бесповодковые, считая свободные концы поводков неподвижными, чертим картины скоростей трех двухповодковых механизмов, на которые разбилась наша система.

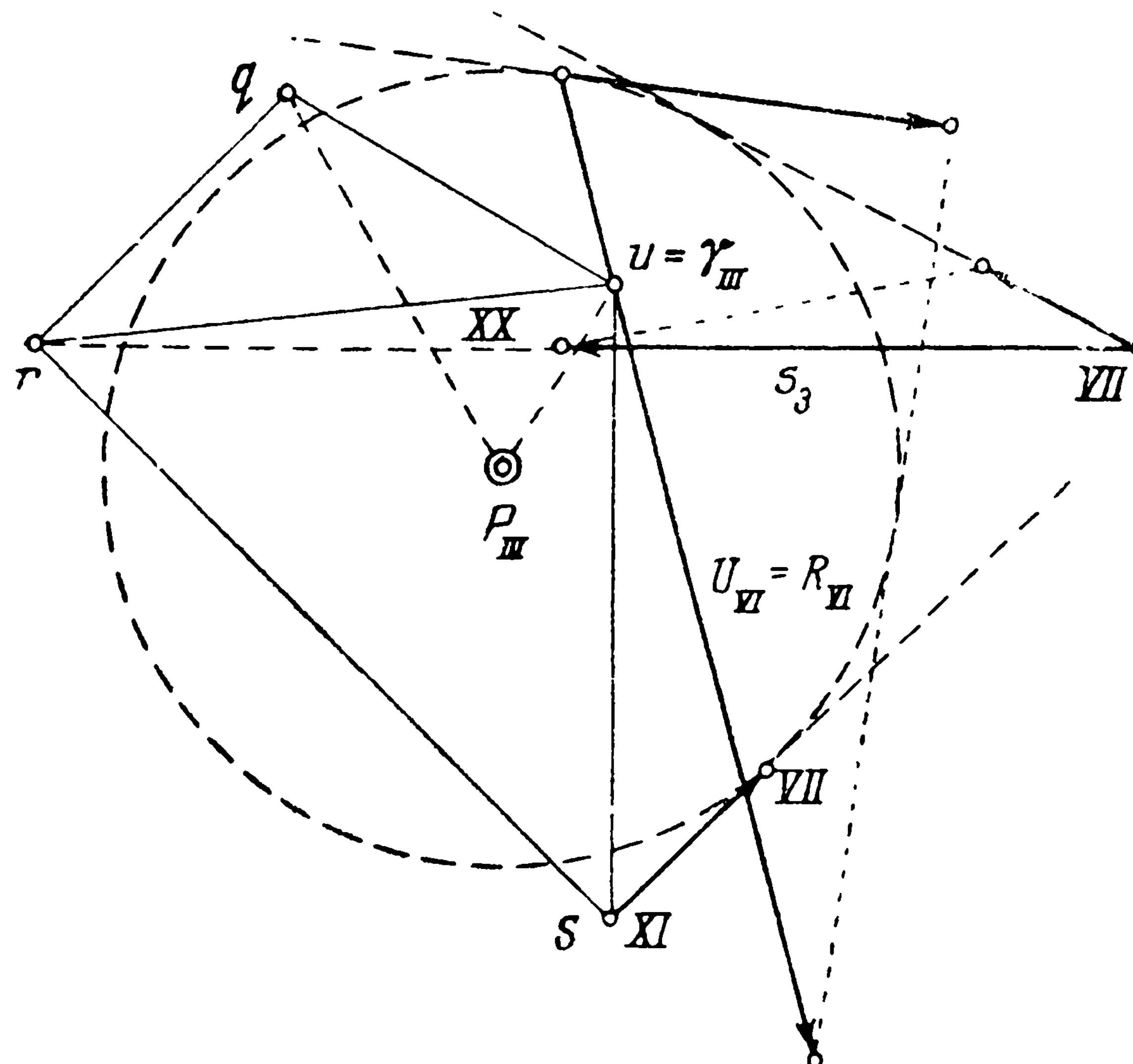
Первый из них содержит прежнее двухповодковое звено *1*; задаемся величиной скорости точки D, которую в виде вектора $P_I d$ (см. фиг. 181) откладываем от полюса P_I; дальнейшее построение не требует пояснений вследствие простоты механизма. Проводим изображения прямых действия трех



Фиг. 182.

приложенных к этому механизму сил A_I, G_I, D_6 и, построив приводящую окружность, откладываем на них векторы, изображающие эти силы, сообразуясь с удобствами чертежа. Совокупность этих трех сил заменяем одной силой R_I, приложенной в точке f и направленной по касательной к приводящей окружности. При этом точку γ_I мы совместили с точкой f. Переходим к механизму, содержащему шарнирное закрепляемое звено IV. Отрезок $P_{II} m$ (см. фиг. 182) изобразит нам скорость точки M звена IV, являющегося кривошипом второго механизма; величиной этой скорости задаемся произвольно.

Построение картины скоростей не требует пояснений. К этому механизму приложена одна только сила M_{III}, прямая действия которой во вспомогательном рычаге пройдет через точку m; поэтому сила M_{III} отождествится с силой R_{II}, а также γ_{II} с точкой m. Вполне аналогично картина скоростей



Фиг. 183.

третьего механизма, содержащего звено V—VI, изображена на фиг. 183, и к этому механизму приложена только одна сила U_{VI}, которая отождествится с силой R_{III}, равно как и точка u с точкой γ_{III}.

Далее выбрасываем только одно бесповодковое звено RO и, пользуясь тремя предыдущими картинами скоростей, строим картину скоростей важных для нас точек системы, полученной из нашей цепи выбрасыванием только этого одного звена (см. фиг. 184). От полюса P_0 откладываем скорости точек f и i, как их дает фиг. 181, но можно было бы отложить и пропорциональные им величины. Направление прямой, проходящей

через полюс, и изображение k точки K, известно из картины скоростей фиг. 182; вторая прямая, проходящая через точки f и k, параллельна прямой FK; в пересечении этих прямых определится точка k; точка m определится из подобия треугольников P_0km (см. фиг. 184) и $P_{II}km$ (см. фиг. 182). Далее определится изображение точки S, так как прямая P_0s (см. фиг. 184) должна быть

Фиг. 184.

параллельна прямой $P_{III}s$ (см. фиг. 183), а прямая is — прямой JS. Точки u и r определятся на основании подобия соответствующей части картины скоростей (см. фиг. 184) такой же картине (см. фиг. 183).

Через точки f, m и u (см. фиг. 184) проводим изображения прямых действия сил R_I, R_{II} и R_{III}. Напряжение стержня RO обозначим S_3. Выбросив этот стержень, мы должны заменить действие его двумя силами S_3, направленными по его оси; на вспомогательном рычаге эти две силы будут приложены в точках

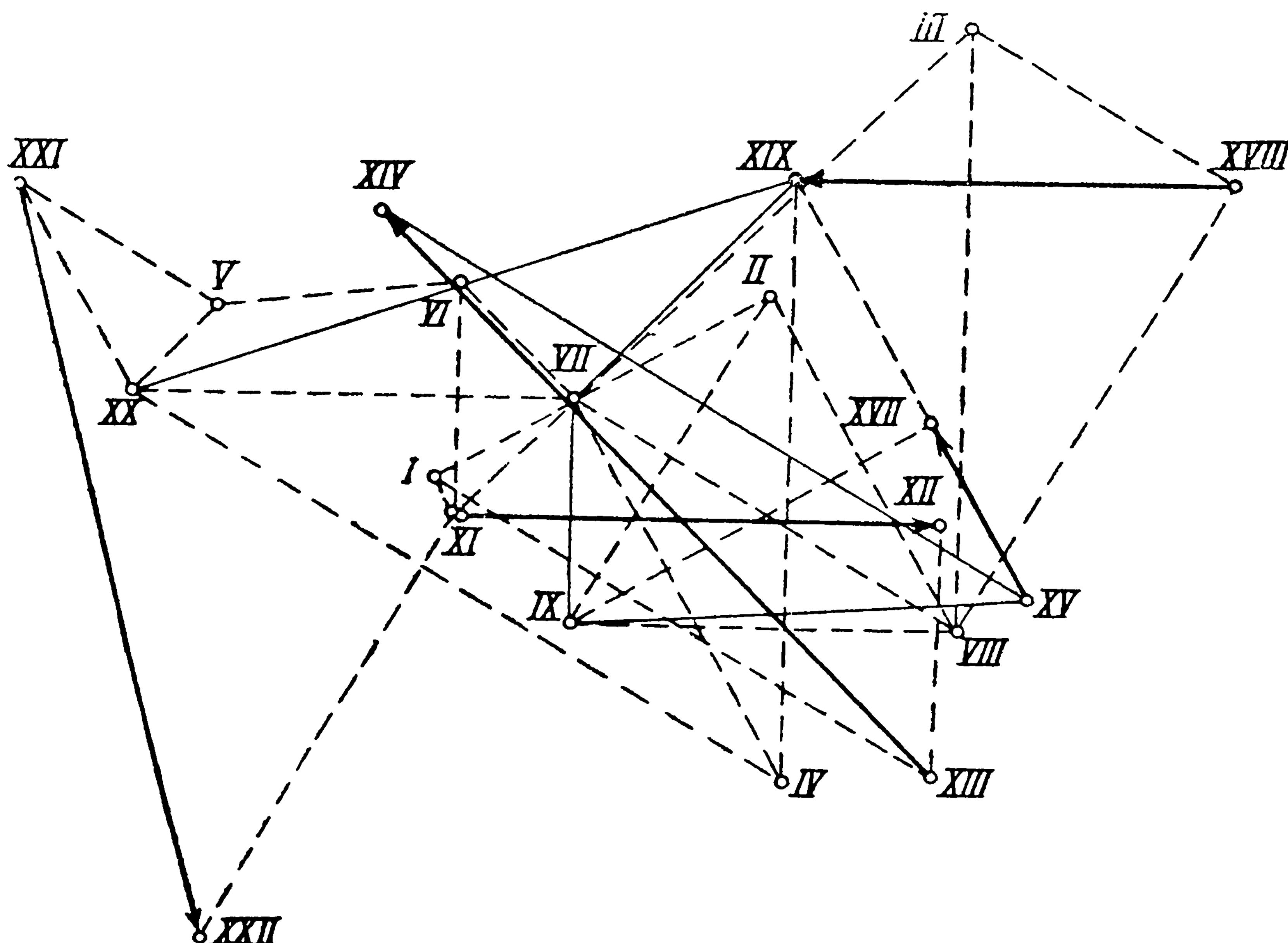
r и *o* и образуют пару. Силы последней и подлежат определению. С этой целью проводим приводящую окружность радиусом, равным плечу искомой пары, так как прямые действия ее сил известны, и заменяем силы R_I, R_{II} и R_{III} одной силой, направленной по касательной к окружности (в отдельности не изображена); величина этой силы и будет S_3; силы пары должны быть направлены так, чтобы пара вращала в сторону, обратную, нежели равнодействующая сил R.

Возвращаемся теперь, для определения напряжений стержней SJ и KF, к фиг. 183 и 182. Проводим через точку *r* изображение прямой действия силы S_3 и через точку *s* — прямую, параллельную стержню SJ, изображающую линию действия приложенной в S силы, заменяющей напряжение стержня SJ. Приводящая окружность избрана касательной к последней прямой, сила S_3 отложена в виде отрезка *VII—XX*, согласно с принятым обозначением граней, сообразно притом с удобствами чертежа. В этих же обозначениях искомая сила изобразится отрезком *XI—VII*, причем она должна уравновесить силы R_{III} и *VII—XX*. Переходим к фиг. 182. Приводящую окружность избираем касательной к силе R_{II}, напряжение стержня OR заменяем силой *XX—VII*, равной S_3. Искомое напряжение стержня FK выразится отрезком *VII—VIII*, направленным по прямой, проходящей через точку *k* и параллельной стержню. Чтобы получить величину этого отрезка, проводим через точку *VII* касательную к приводящей окружности, откладываем по ней от точки *VII* величину уравновешивающей сил *XX—VII* и R_{II}; уравновешивающую поворачиваем около точки *VII* до совпадения с направлением искомого отрезка *VII—VIII*.

Напряжения трех бесповодковых найдены. Прежде, однако, чем приступить к построению диаграммы моровских напряжений, можно проверить полученный результат при помощи картины скоростей первого механизма (см. фиг. 181). С этой целью наносим (пунктиром) на последнюю силы *VII—IX* и *VIII—VII*, соответственно заменяющие напряжения стержней JS и FK. Совокупность этих двух сил должна уравновешивать

силу R_I. Заменив их силами, касательными к прежней приводящей окружности, не обнаруживаем заметной невязки.

После этого переходим к построению диаграммы моровских напряжений (фиг. 185). Начинаем с многоугольника равновесия



Фиг. 185.

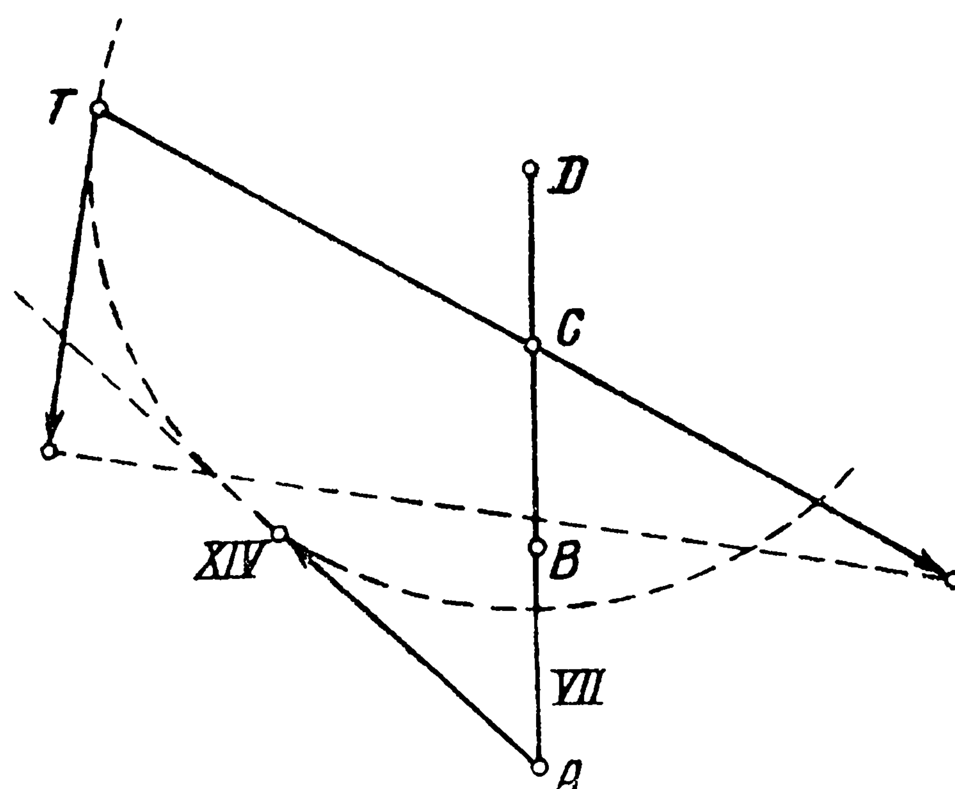
XX—VII—IV узла *O*, в котором напряжение стержня *3* уже известно. К узлу *M* мы перейти не можем, так как в нем имеется три стержня с неизвестными напряжениями; равным образом ничего не даст нам узел *N*. Мы видим, что шарнирно закрепляемое звено представляет такое же препятствие для движения вперед все в одном направлении, как и двухповодковое. Поэтому необходимо подойти к нему еще с другого конца, начав с узла *K*. Так как точка *VII* на диаграмме напряжений уже имеется, то связь диаграммы таким скачком не нарушится, потому что известное нам напряжение стержня **2** придется отложить от этой точки в виде отрезка *VII—VIII*.

Построение многоугольников равновесия узлов K, L и M не представляет каких-либо особенностей, за исключением того, что в узле M все наши построения будут проверены, так как здесь окажется неизвестным напряжение $XIX—IV$ одного только стержня MN. Но точка IV уже нанесена на чертеж при рассмотрении узла O, точка же XIX найдется, если отложить от вершины $XVIII$ многоугольника равновесия узла L отрезок, равный данной силе M_{III}. Таким образом, точки XIX и IV будут нанесены на чертеж прежде, чем приступим к рассмотрению узла M. Проверкой должна служить параллельность отрезка $XIX—IV$ стержню MN. Заметной невязки не обнаружено. Переходим к построению моровских напряжений части, содержащей звено $V—VI$. Начинаем с узла S, переходим к узлам R и к Q и получаем проверку в узле U, так как точки $XXII$ и XI определятся независимо от многоугольника равновесия этого узла. Здесь получена небольшая невязка, указанная на фиг. 185 двумя точками XI; из них лежащая книзу и вправо получается, если требовать, чтобы многоугольник стержней, сходящихся в узле U, был замкнут, другая — если отрезок $XXII—XI$ должен быть параллелен оси поводка *10*.

После этого переходим к части, содержащей звено *1*. Строим многоугольники равновесия узлов F и E. Этим определятся напряжения $IX—II$ и $II—VII$ стержней EB и FB; геометрическая сумма этих отрезков, т. е. отрезок $IX—VII$, представляет собой давление в шарнире B звена II на звено *1*; узел B ничего другого и не даст, так как бесконечно удаленную вершину X мы обходим. Точно так же, построив многоугольники равновесия узлов J и G и нанеся на диаграмму силу A_I в виде отрезка $XIII—XIV$, получаем возможность определить шарнирное давление $VII—XIV$ звена I на звено *1* в шарнире A. Давление в шарнире B случайно оказалось направленным вдоль оси стержня *1*. Вследствие того, что все шарниры звена *1* лежат на одной прямой, полигональная метода недостаточна для определения моровских напряжений поводков *5* и *6*.

Приходится лишний раз применить кинематическая метода

или вообще каким бы то ни было другим способом определить напряжение одного из этих поводков. Так как через точку D проходит три силы, приложенные к звену *1*, именно давление в шарнире B, напряжение поводка *6* и сила D_6, то проще всего исходить из равенства момента давления в шарнире A относительно точки D моменту относительно той же точки шарнирного давления в C, направленного по оси поводка *5*, так как



Фиг. 186.

последний не нагружен. На фиг. 186 отложено давление A в виде отрезка *VII—XIV* и приводящая окружность избрана касательной к прямой действия этого давления. Последнее уравновешено силой, приложенной в точке T по касательной к той же окружности, а затем силой, направленной по прямой TC, параллельной оси поводка *5*. Полученное шарнирное давление C нанесено на диаграмму (см. фиг. 185) в виде отрезка *XIV—XV*. Отложив затем силу D_6 в виде отрезка *XV—XVII*, находим моровское напряжение поводка *XVII—IX*; точка *IX* была нанесена на чертеж еще при построении многоугольника равновесия узла E, и потому параллельность отрезка *XVII—IX* направлению оси поводка *6* даст нам еще одну проверку правильности наших построений. Заметной невязки не обнаружено. Шарнирное давление в D не равно найденному напряжению поводка,

так как последний нагружен силой D_6; оно выразится отрезком *XV—IX*.

Цель построения моровских напряжений составляет определение шарнирных давлений. О некоторых из них мы говорили в предыдущем. Давления в шарнирах ненагруженных поводков равны моровским напряжениям последних; все поводки, кроме *6*, у нас не нагружены. Равным образом, не нагружены у нас бесповодковые двухшарнирные звенья, и давления в шарнирах их также равны моровским напряжениям соответствующих стержней. Что касается давлений в тех шарнирах поводков, которыми цепь пристегивается к точкам устоя или механизма, то оно определяется одинаково для всех классов цепей, и потому у нас даже не указаны все данные для определения этих давлений: нехватает сил, приходящихся на эти узловые точки при распределении нагрузки по узлам. Остается сказать еще о шарнирном давлении в узлах *M* и *N*; на последнюю точку могут всегда вовсе не приттись силы, потому что приложенные к звену *IV* силы можно всегда разнести на две другие шарнирные точки этого звена; у нас таких сил вовсе не предположено. Давление в узле *M* звена *IV* на звено *III* выразится отрезком *XIX—VII*, давление этого же звена на узел *N* — отрезком *XX—XIX*.

Таким образом, определены приемы, позволяющие строить диаграммы моровских напряжений и определять при помощи их шарнирные давления для нормальных цепей, а следовательно, и для механизмов третьего класса.

Переходим к цепям четвертого класса, причем будем рассматривать только изученные типы этих цепей. При этом задача наша значительно облегчится благодаря возможности пользоваться материалами предыдущей главы.

Начнем с общего случая двухкольцевой цепи. Эта цепь, как и все остальные, подлежащие рассмотрению типы, будет содержать только трехшарнирные звенья. Поэтому чего-либо нового в разметке на грани, при построении взаимных диаграмм, не встретится; с особенностями, которые влечет за собой замк-

нутость контура — а таких контуров здесь будет несколько — мы уже знакомы тоже. Таким образом, достаточно будет только рассмотреть в общем виде применение полигонального метода, в связи с кинематическим, без которого здесь, конечно, тоже не обойтись.

Итак, обращаемся к фиг. 116 предыдущей главы. Мы помним, что если в картине скоростей даны прямые, на которых должны лежать изображения точек A и B прикрепления поводков к звеньям того же наименования, то, воображая шарнир между звеньями L и M разъединенным, мы можем построить картину скоростей такого образования, задавшись изображениями точек A и B на одноименных с ними прямых совершенно произвольно. При этом приходилось иметь дело только с построениями картин скоростей цепей первого класса. Если мы пожелали бы пользоваться кинематической методой для определения шарнирного давления между звеньями L и M, то пришлось бы тоже вообразить себе этот шарнир разъединенным. Если концы поводков, которыми цепь присоединяется к точкам устоя или механизма, при пользовании кинематической методой будем считать неподвижными, чтобы не вводить неизвестных нам шарнирных давлений, то прямые A и B пройдут через полюс картины скоростей, будучи параллельны осям соответствующих поводков.

Если мы можем выбрать на этих прямых положения изображений точек A и B произвольно, то это значит, что величины скоростей этих точек могут быть даны независимо. Следовательно, имеется возможность построить две картины скоростей системы с разъединенным шарниром между звеньями L и M, различные между собой, т. е. не подобные. Для этого нужно задаться двумя парами значений скоростей этих точек A и B так, чтобы эти четыре скорости не были между собой пропорциональны. Когда две такие различные картины скоростей построены, то шарнирное давление определится общим приемом, указанным на фиг. 169 и 170 применительно к цепи третьего класса.

После этого все сведется к случаям уже исследованным. Моровские напряжения всех стержней, из которых воображаем себе составленными звенья одноповодковых цепей *12* и *13*, а также их поводков определятся, что следует из положения I. Подобные построения неоднократно рассматривались нами для цепей одноповодковых звеньев. Когда определятся напряжения звеньев цепей *12* и *13*, прилегающих к бесповодковым *VII* и *VIII*, то будет известно шарнирное давление прилегающих к последним звеньев этих цепей; введя соответствующие силы› мы можем цепи *12* и *13* отбросить. Но звенья *VII* и *VIII*, вместе с цепью одноповодковых *II*, если их рассматривать как поводки крайних звеньев последней, образуют цепь первого класса, моровские напряжения во всех стержнях которой мы умеем находить, равно как и шарнирные давления.

Определив давления в шарнирах, связывающих звенья *VII* и *VIII* со смежными с ними одноповодковыми цепей *9* и *10*, можем эту цепь первого класса отбросить и перейти к рассмотрению двух цепей одноповодковых *9* и *10*, для которых повторится сказанное по поводу цепей *12* и *13*. Потом опять идет цепь первого класса, образованная из цепи *8* и бесповодковых *V* и *VI*, рассматриваемых как поводки; затем опять две цепи одноповодковых *6* и *7*, цепь первого класса, составленная из цепи *5* и бесповодковых *III* и *IV*, две цепи одноповодковых *3* и *4* и цепь первого класса, составленная из цепи *2* и бесповодковых *I* и *II*. Когда напряжения во всех упомянутых частях будут найдены, то останется система с двумя степенями свободы, если считать концы поводков неподвижными, состоящая из ряда одноповодковых звеньев. Нагрузки всех звеньев известны, так как будут определены также шарнирные давления звеньев *I* и *II* на крайние звенья цепи одноповодковых *I*.

Дальнейшее построение можно вести, направляясь хотя бы от одного конца оставшейся цепи одноповодковых к другому, исходя из положения I или же имея в виду, что каждое одноповодковое со своим звеном образует двухповодковую группу. Но так как упомянутая система с двумя степенями свободы не

может находиться в равновесии под действием каких угодно сил, то очевидно, что мы должны получить проверку всех предыдущих построений. И действительно, такая проверка получится в последнем узле.

Когда мы подойдем к последнему одноповодковому звену, то из многоугольника равновесия первой его шарнирной точки мы определим напряжения двух стержней, составляющих это звено; из второго, к которому примыкает поводок,— напряжение третьего и поводка; в последней шарнирной точке будут известны как напряжения стержней, так и силы, к ней приложенные, и шарнирное давление, исходящее либо от звена *I*, либо от звена *II*; должна иметься возможность построить замкнутый многоугольник на совокупности указанных сил.

Мы избрали определение кинематическим методом шарнирного давления между звеньями *L* и *M* потому, что этот прием применим независимо от числа одноповодковых в совокупности цепей *12* и *13*. Если имеется всего только одно одноповодковое звено, то разъединяем шарнир между ним и одним из звеньев *VII* или *VIII*; если их нет вовсе, то — шарнир между звеньями *VII* и *VIII*; будет получаться образование все того же типа, как и в случае разъединения шарнира между *L* и *M*, но с меньшим числом звеньев. В первом случае число одноповодковых в одной из цепей *12* или *13* окажется равным нулю, в другой — единице, во втором — в обеих равным нулю; получится не осложнение, а упрощение, сравнительно с выше рассмотренным случаем. Равным образом, и рассуждения, относящиеся к проверке, не пострадают от того, что число звеньев цепи *I* сократится до единицы или до нуля. В первом из этих случаев оставшееся звено и будет последним одноповодковым, во втором, как мы видели в предыдущей главе, вместо цепи *I* следует рассматривать цепь *2*, в которой уж наверно одноповодковое будет в этом случае.

Случаи слияния шарнирных точек, вроде изображенного на фиг. 117, мы трактовать не будем, ввиду того, что не найден

способ их систематического обозрения. Конкретные случаи, в которых автору приходилось разбираться, не представляют каких-либо принципиальных затруднений, но как и случаи, когда три шарнира приходятся на одной прямой, требуют обычно применения кинематического метода лишний раз. Ведь очевидно, что если из трех шарниров два слились, то все эти три шарнира можно рассматривать, как лежащие на одной прямой. Все же шарниры звена в один слиться не могут, так как уже Таубелес в упомянутой нами статье пользуется тем, что при таком сокращении размеров звена до одной шарнирной точки теряется одна степень свободы.

Переходим к случаю многокольцевой цепи, типа фиг. 119. Опять заметим, что, предполагая разъединенным шарнир между звеньями L и M, сумеем построить картину скоростей системы. При этом опять-таки величины скоростей точек A и B можно задавать произвольно. Если задаться двумя парами непропорциональных значений, то построим две картины скоростей, позволяющие определить шарнирное давление между звеньями L и M. Построение картины скоростей будет сложным, потому что войдут цепи третьего класса типа фиг. 120 и четвертого типа фиг. 121 или в более общем виде — фиг. 122. При этом цепи четвертого класса будут типа неизученного, содержащие одно бесповодковое двухшарнирное звено и одно шарнирно закрепляемое. Трудности, возникающие при построении картины скоростей таких цепей, нами, однако, теоретически устранены, хотя практически, без применения смешанных графоаналитических приемов, которые будут изложены впоследствии, они огромны.

Но важно теперь проследить, как к такому сложному образованию (см. фиг. 119) будет применяться полигональный метод после того, как шарнирное давление между звеньями L и M найдено. Следует еще отметить, что при отсутствии достаточного числа одноповодковых между звеньями VII и $VIII$ одно или оба последних, подобно тому, как и в предыдущем случае (см. фиг. 116), могут заменить собой звенья L и M.

Когда шарнирное давление между упомянутыми звеньями будет определено, то для части δ не встретится затруднений, так как не представится ничего нового сравнительно с тем, что имело место на фиг. 116; будут чередоваться цепи первого класса и цепи одноповодковых, распадающиеся на двухповодковые группы. В результате определятся шарнирные давления крайних звеньев части δ на звенья IV и XII. Часть β, после того как часть δ будет отброшена и действие ее на звено IV заменено силой, тоже не представит затруднений, потому что является цепью третьего класса. Поэтому обращаемся к наиболее трудной части γ, более общий тип которой изображен на фиг. 122.

В этом образовании разъединим шарнир между звеньями IX и W и будем определять давление в нем кинематическим методом. При этом скорости концов поводков, которыми образование примыкает к звеньям механизма или к устою, будем считать равными нулю, равно как и скорость шарнирно закрепляемой точки звена IX. Из построения ложной картины скоростей мы знаем, что изображения точек C и D на заданных в картине скоростей прямых того же наименования могут быть задаваемы произвольно. Это приведет к заключению, что величина скоростей точек C и D, опять-таки при разъединенном шарнире между звеньями IX и W, может быть задаваема произвольно.

Избрав две пары значений скоростей, непропорциональных между собой, мы сможем построить две картины скоростей, позволяющие определить искомое шарнирное давление. Отметим еще здесь, что случаи, когда вместо двух звеньев C и D или звеньев A и B предыдущих образований (см. фиг. 116—119) окажется одно, были разобраны в предыдущей главе, причем указано, как видоизменится тогда построение картин скоростей.

Переходим теперь к рассмотрению вопроса о том, применимым ли окажется полигональный метод, после того как искомое шарнирное давление найдено. Легко показать, что дело приведется к образованиям, к которым она оказалась применима, хотя и не в чистом виде, а пополняясь кинематическим

методом, без которого можно обойтись лишь в случае двухповодковых образований. Мы знаем уже, что, считая шарнир между звеньями *IX* и *W* разъединенным, рассматривая звенья *IX* и *XII*, соответственно, как поводки звеньев *U* и *S*, мы будем в примыкающем к звену *T* образовании иметь цепь первого класса. Напряжения всех стержней и поводков ее, равным образом шарнирные давления мы умеем находить. Определив давление звена *XII* на звено *T*, отбрасываем эту цепь и получаем в остатке образование, структура которого тождественна с тем, что мы имели, если разъединить шарнир между звеньями *L* и *M* двухкольцевой цепи (см. фиг. 116). Задача для части γ доведется до конца, как там.

Таким образом, нам удалось перейти через части β и γ, а следовательно найти давления в двух шарнирах, связывающих эти части с частью α. Последняя опять-таки представляет образование, по структуре тождественное с тем, которое получится, если в цепи фиг. 116 разъединить шарнир между звеньями *L* и *M*. Итак, мы дойдем до конца, пользуясь все известными приемами.

Обращаемся к наиболее общему из рассмотренных типов цепей четвертого класса, изображенному на фиг. 128. Опять картины скоростей, которые нами уже строились в предыдущей главе, при условии, однако, что концы поводков, которыми цепь примыкает к точкам механизма или устоя, будут считаться неподвижными, позволят нам определить шарнирное давление в некотором шарнире, обозначенном там *H*. Какие звенья считать за *A* и *B* и где помещается шарнир *H*, указано в предыдущей главе. Определение моровских напряжений и шарнирных давлений опять будет совершаться приемами уже известными, так как придется иметь дело с цепями одноповодковых — переходить через кольца типа β или γ (см. фиг. 119); что же касается междукольцевых диагоналей, то они дадут начало каждая лишь цепи первого класса, как отдельной группе.

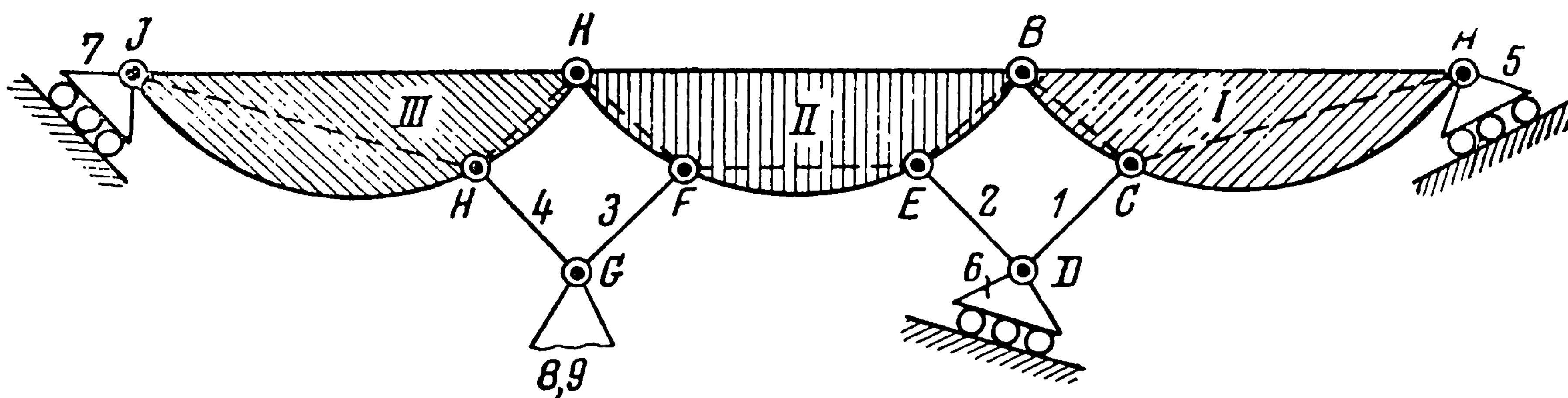
Во всех этих случаях, при первом применении кинематического метода, мы разъединяли шарнир и определяли в нем

давление, потому что применимость этого способа не зависела от числа звеньев цепи одноповодковых, в которой шарнир разъединяется. Но если число этих звеньев не меньше двух, то можно определить также напряжения двух поводков смежных звеньев методом, показанным на фиг. 174, 175, 176. В самом деле, устранив вовсе звенья L и M в цепях фиг. 116 и 119, получим образование того же типа, как и получаемое разъединением шарнира между этими звеньями, только с меньшим числом звеньев. Если мы теперь присоединим устраненные звенья без поводков, но соединим их между собой шарниром, то последнее образование осложнится лишь прибавлением двухповодковой группы, а потому картина скоростей может быть для него построена без затруднений. Так как устранены два поводка, то будем иметь дело опять с системой, обладающей двумя степенями свободы; при этом, по указанному методу, напряжения обоих поводков определятся одновременно. Так как образование будет осложнено сравнительно с ранее рассмотренными только двухповодковой группой, то при построении картины скоростей придется иметь дело с цепями, таких же типов, как и в рассмотренных случаях фиг. 116, 119, 128.

Этим мы считаем исчерпанным статическое исследование цепей четвертого класса известных нам типов и механизмов, в которые они входят как высший элемент. Мы не уделили внимания цепям третьего и четвертого классов с развитыми поводками. Дело в том, что развитой поводок, как известно, представляет собой часть цепи второго класса. Определение давления в шарнире, соединяющем развитой поводок со звеном основного полигона, по существу не будет отличаться от решения той же задачи для случая простого поводка. Только составляющая s, которая в случае простого поводка была направлена по его оси, для случая развитого должна быть направлена к полюсу вспомогательного рычага, изображающего картину скоростей точек развитого поводка, если предположить шарнир между ним и основным полигоном разъединенным,

а свободные концы поводков — неподвижными. Удалением двух развитых поводков так же, как и удалением двух простых, обращаем жесткое соединение цепи с основой в систему с двумя степенями свободы. Что же касается применения к развитым поводкам полигонального метода, то здесь придется лишь повторить сказанное по поводу цепей второго класса.

Примера из практики машиностроения мы не приводим, так как думаем дать примерный расчет практически осуществленного механизма в главе, трактующей построение ускорений



Фиг. 187.

в механизмах первых четырех классов, что даст нам возможность учесть действие масс частей. Здесь мы ограничимся разбором мостового сооружения, заимствованного из «Графической статики сооружений» Мюллера-Бреслау и упомянутого нами вторым в конце первой части настоящего труда. Схема этого сооружения показана на фиг. 187.

Мы замечаем, что это сооружение состоит из трех отдельных фермочек *I*, *II*, *III*, расположение стержней которых не указано. Предполагается, что эти фермочки представляют каждая в отдельности жесткое металлическое образование, составленное из двухшарнирных стержней. Эти три фермочки и образуют многошарнирные звенья мостового сооружения, причем средняя из них обладает четырьмя шарнирами, обе крайние — каждая тремя шарнирами, соединяющими их с соседними частями. Остальные части сооружения состоят из четырех двухшарнирных стержней *1*, *2*, *3* и *4*, трех подвижных опор *5*, *6* и *7* и неподвижной, отмеченной цифрами *8* и *9*.

Первый вопрос, который нам надлежит разрешить, будет ли соединение этих частей между собой и с устоем, *по структуре своей*, жестким и притом статически определимым, или же статически неопределимым, но тоже жестким, так как последнее условие является необходимым для подобного сооружения. Отметим прежде всего, что если мы отделим металлические части от устоя, образованного из быков моста и речного дна, и отделим от него опоры, то образование не будет жестким, так как мы видим в нем два шарнирных четырехугольника без диагоналей. Присоединив сюда подвижные опоры (неподвижная образует одно целое с устоем), получим образование с еще большим числом степеней свободы, так как эти опоры могут вращаться около точек A, D и J совершенно самостоятельно. Итак, металлическое сооружение само по себе не образует жесткой системы. Жесткость, если она вообще получится, будет результатом его соединения с устоем. Каким же способом соединяется оно с устоем? Три тела, соединяющие его с устоем, имеют каждое по две кинематических низших пары: по одной паре вращения и по одной паре скольжения, если отвлечься от несущественных для теории катков. Таким образом, подвижные опоры вполне подходят под понятие о поводке. Кроме того, металлическое сооружение соединяется с устоем еще шарнирно в точке G. Мы знаем уже, что шарнирное соединение с устоем может рассматриваться как частный случай соединения двумя поводками. Таким образом, мы имеем некоторую цепь, соединенную с устоем пятью поводками.

Проще всего убедиться в том, что мы будем иметь дело с жестким и статически определимым образованием *, можно следующим образом. Увеличим число связей на одну, заменив подвижную опору в точке D неподвижной, и компенсируем введение лишней связи устранением одной из данных — стержня *2*.

---

* Вопроса о статической определимости отдельных фермочек *I*, *II* и *III* мы вообще не касаемся, так как структура их не дана.

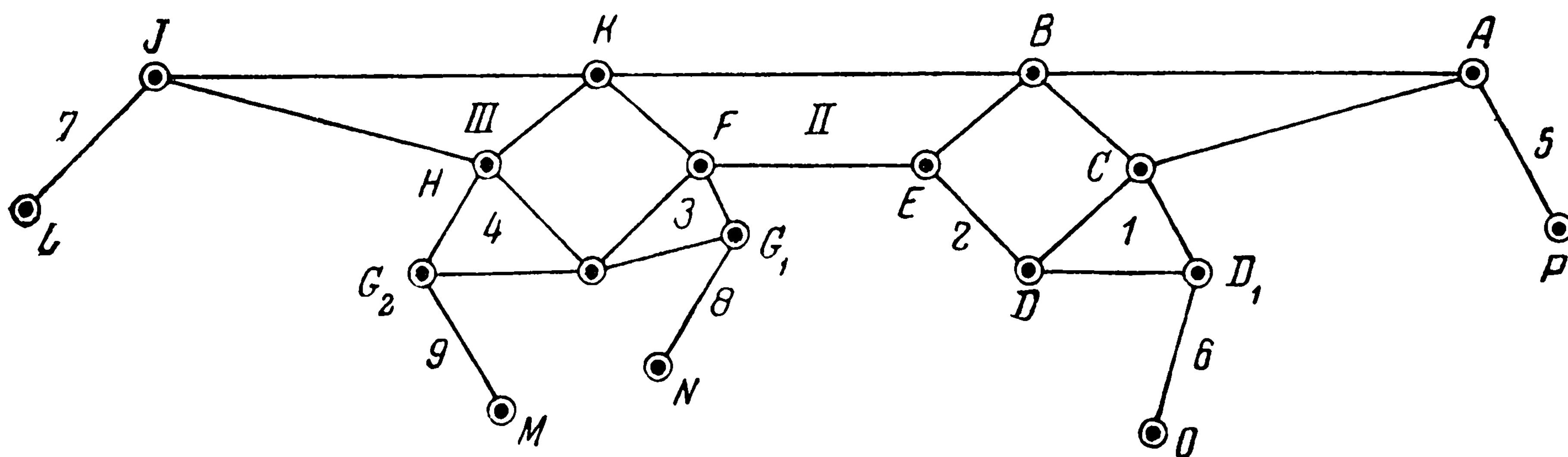
Общее число связей от этого не изменится, и потому, если оно соответствовало тому числу, которое отвечало статической определимости и жесткости образования вначале, то это будет иметь место и теперь. Исследованием тех особых, обычно называемых предельными, случаев, когда одна или несколько связей становятся следствиями других, мы вообще не занимались, так что вопрос идет только о числе связей. Оно-то и сохранилось прежним. Но заменив указанным образом одну связь другой, мы видим перед собою хорошо известную нам систему: крайнее звено *I* соединяется с устоем двумя поводками *5* и *1*, среднее звено *II* — одним поводком *3*, другое крайнее *III* — двумя поводками *4* и *7*. Получилась нормальная трехзвенная цепь первого класса.

Соединение такой цепи с устоем будет, в общем случае, заведомо жестким и статически определимым; если это так, то опять-таки в общем случае и образование данной нам структуры в связи с устоем дает начало жесткому и статически определимому соединению. Мы видим, что для привыкшего к основным элементам, из которых образуются фермы и механизмы. нормальным многоповодковым цепям, в частности для отчетливо помнящего чертеж (см. фиг. 5, часть I) нормальной цепи первого класса, достаточно одного взгляда на фиг. 187, чтобы сказать, что мы имеем дело с сооружением жестким и статически определимым, поскольку статическая определимость не нарушается в отдельных фермочках, а жесткость наличием предельного случая; но чтобы избавиться от последнего, нужно только изменить соотношение размеров частей.

Но если мы не только желаем себе составить понятие о жесткости и статической определимости образования, но и заняться расчетом его, то необходимо решить вопрос о том, к каким нормальным цепям отнести данное образование. А к нормальным цепям, или совокупности их, оно, вне всякого сомнения, относится, так как в связи с устоем, в общем случае, дает начало жесткому и статически определимому образованию. В нашей нормальной цепи, в том виде, как она нам дана, имеется семь

звеньев *I*, *II*, *III* и *1*, *2*, *3*, *4* и пять указанных выше поводков, из которых одна пара соответствует шарнирному закреплению в точке G. Этот подсчет постольку верен, поскольку наша цепь не распадается на простейшие, так как в последнем случае часть перечисленных звеньев может обратиться в поводки отдельных цепей, наслоенных друг на друга.

Убедимся же, что цепь не распадается на простейшие. С этой целью постараемся определить, под какой общий тип



Фиг. 188.

подходит наша цепь. Заметим прежде всего, что в точке G слились три различные точки: шарнирное соединение между звеньями *3* и *4* и точки прикрепления двух поводков, которые поэтому можно, по желанию, отнести либо к звену *3*, либо к звену *4*, либо один к одному из них, другой — к другому; равным образом в точке D слились две различные точки: шарнирное соединение звеньев *1* и *2* и точка присоединения поводка. Так как слияниями шарниров мы не занимались, то для нас важно разъединить эти точки, что и сделано на фиг. 188, причем поводки *8* и *9* отнесены к различным звеньям, потому что легче разбираться в образованиях с трехшарнирными звеньями, чем в происшедших из них, где переносом поводка, за счет последних, образовались четырехшарнирные и двухшарнирные.

Данное образование (см. фиг. 187) получится из нового (см. фиг. 188) слиянием в одну точку точек G_1, G_2 и G, с одной стороны, точек D_1 и D — с другой и заменой поводков *5*, *6*, *7* конечной длины бесконечно длинными. Мы замечаем, что звенья цепи

образуют два замкнутых контура. Поэтому, если цепь не распадается на простейшие, если притом она относится к первому семейству, то это должна быть цепь четвертого класса, а так как контура только два, то в ней может иметься только одна диагональная цепь. Посмотрим, так ли это.

Рассмотрим же одну из замкнутых цепей, состоящую из звеньев *I*, *1*, *2*, *II*. Это была бы цепь третьего класса, если бы каждое ее звено было снабжено поводком. Но поводками снабжены только звенья *I* и *1*, два же остальных звена *2* и *II* не имеют поводков. Мы припомним, что для того, чтобы из цепи третьего класса образовать цепь четвертого, можно два одноповодковых лишить их поводков и затем между этими, лишенными поводков звеньями ввести простую цепь одноповодковых. И цепь одноповодковых имеется налицо. Она состоит из трех звеньев *3*, *4*, *III*. Если бы только шарнир *F* был устроен не между звеньями *3* и *II*, а между звеньями *3* и *2*, то перед нами был бы типичный случай цепи четвертого класса с трехшарнирными звеньями и одной диагональной цепью. Перенос шарнира с этого желательного нам места в другое, во всяком случае, не меняет числа связей системы, и это позволяет нам менее изящным и скорым путем, чем раньше нами указанный, убедиться, что дело идет об образовании, представляющем жесткое и статически определимое соединение с устоем.

Но все же диагональ введена иным образом, чем в изученных нами типах. Что мы не имеем здесь дело с изученным типом, если это вообще цепь четвертого класса, можно было наперед сказать. Мы изучили только типы цепей четвертого класса с трехшарнирными звеньями, а здесь имеется четырехшарнирное звено *II*. Таких звеньев оказалось бы даже два, если бы мы оба поводка *8* и *9* отнесли к одному из звеньев *3* или *4*. Но все же наша цепь достаточно близко подходит к изученным типам, чтобы можно было воспользоваться для ее статического исследования выработанными приемами. Обобщенный ее тип изображен на фиг. 190, где шарниры *K* и *F* изображены точками. Если

разъединить шарнир F и одноповодковое звено раздела шарнирно присоединить к звену *2*, то получится указанный известный нам тип.

Если нормальная цепь, пристегнутая к основе, распадается, то в ней должна иметься более простая нормальная цепь, тоже пристегнутая к основе. Обращаясь к фиг. 190, мы можем убедиться, что такой цепи не имеется. Если бы существовала такая цепь первого или второго класса, то необходимо было бы иметь не меньше двух двухповодковых звеньев, поводками своими пристегнутых к основе. Таких звеньев в цепи (см. фиг. 190) вообще не имеется. Если бы в ней можно было выделить цепь третьего класса первого основного типа (о втором не может быть речи из-за отсутствия все тех же двухповодковых звеньев), то необходимо был бы замкнутый контур из одноповодковых звеньев, чего тоже не имеется. О выделении же цепи четвертого класса не может быть речи, потому что меньше двух замкнутых контуров в такой цепи не может быть, а у нас именно только и имеется два таких контура. Таким образом, мы приходим к убеждению, что цепь наша не распадается на простейшие, причем семейство и класс ее установлены.

Результат получился бы не совсем столь простой, если бы мы захотели оба поводка *8* и *9* отнести к одному звену, например к *3*. Общий тип цепи изобразился бы тогда фиг. 191. Мы видим, что это не была бы цепь первого семейства, так как в ней не осуществляется обходность бесповодковых. В ней оказалось бы только одно звено второго рода, за которое можно было бы принять совокупность бесповодковых II и *2* и цепей одноповодковых, их между собой соединяющих. Второго звена второго рода не имеется, так как нет второго замкнутого контура, в который бы не вошло ни одно из первых двух бесповодковых. Таким образом, цепь принадлежала бы к первому порядку первого класса цепей второго семейства.

Обращаемся к вопросу о том, как вести статическое исследование. Если бы (см. фиг. 190) шарнир F существовал не в звене II, а в звене *2*, то, разъединив этот шарнир, полагалось

бы кинематическим методом определить предварительно в нем давление, причем доказано, что картину скоростей придется строить только для сочетания цепей первого класса. Очевидно, что будет ли шарнир F устроен в звене *II* или же в звене *2*, по разъединении его получится в обоих случаях одно и то же образование, и, следовательно, шарнирное давление может быть без затруднений определено кинематическим методом.

Это замечание относится в полной мере и к цепи фиг. 191. Если мы в ней разъединим шарнир F, то от точки K начнется тоже простая цепь, только она не будет цепью одноповодковых, а разобьется на первую цепь таких звеньев между звеньями *II* и *4*, на цепь первого класса, в которой одним двухповодковым звеном будет *3*, а звено *4* будет рассматриваться как поводок другого, и на вторую цепь одноповодковых, начинающуюся от звена *3*.

Обращаясь теперь к фиг. 188, мы заметим, что, разъединив шарнир F, мы даже не будем иметь дело с общим случаем цепей первого класса, а только с двухповодковыми группами. Нам придется построить, как известно из общего исследования, две картины скоростей, задавшись произвольно величинами скоростей точек A и D_1, лишь бы пары заданных скоростей не были пропорциональны; скорость точки C определится тогда, как для шарнира двухповодковой группы *I*, *1*; к последней примыкает двухповодковая же группа *II*, *2*, потом на такие же группы, как всегда, разбивается концевая цепь одноповодковых; они будут: *III*, *7*; *4*, *9*; *3*, *8*. Так решился бы вопрос об определении шарнирного давления в F, и на основании разработанных нами общих соображений построилась бы затем диаграмма моровских напряжений.

И все же эту общую схему не удастся применить к данной системе фиг. 187. Мы уже говорили, что слияние шарнирных точек может внести некоторые существенные изменения в смысле необходимости заменить выработанные для общего случая приемы другими. Мы сказали, что разобраться в общем виде в случаях слияния шарниров нам не удалось ввиду того, что

не открыт систематический путь исследования этого явления и обозрения возможных случаев. Но когда имеем дело с определенным объектом исследования, то легко бывает усмотреть, в чем должны заключаться эти видоизменения. Так это будет и в случае фиг. 187. Разъединив здесь шарнир F, мы получим не одну систему с двумя степенями свободы, а две раздельных, с одной степенью свободы. В этом легко убедиться, потому что одна из них будет состоять только из звена *3*, вращающегося около точки G, а вторая будет прежняя система, только лишенная стержня *3*. Так представляется это дело ввиду простоты данного образования. Но если бы не усмотрели этого сразу, то убедились бы в этом, желая применить общий прием. Так, если бы, пользуясь тем, что на фиг. 190 оба шарнира K и F находятся в совершенно одинаковых условиях, мы захотели (см. фиг. 187) разъединить шарнир K вместо F, то можно было бы и не заметить сразу изменившихся, вследствие слияния шарниров, условий.

Но строя картину скоростей, задавшись произвольно скоростями точек A и D, как то следовало бы по предыдущему, мы нашли бы сначала скорости точек двухповодковой группы *I*, *1*, потом второй такой группы *II*, *2*, причем не пришлось бы принимать еще во внимание звена *3*, и потому скорость точки F, вследствие совершенно произвольного выбора скоростей A и D, не должна была бы оказаться перпендикулярной к прямой GF, как то следовало бы из неподвижности точки G. Мы убедились бы, что мы дали больше данных, чем можно было дать, не нарушая условий связей, оставшихся по разъединении шарнира K. И в самом деле, система четырех звеньев *I*, *1*, *II*, *2*, снабженных тремя поводками *5*, *6*, *3*, прикрепленными к основе, образует, как известно, механизм третьего класса, а потому в пределах этой системы нельзя задаваться произвольно значениями скоростей двух точек, как мы сделали. Поэтому задаться можно только скоростью одной точки A или D, но не обеих вместе, и затем строить картину скоростей, как для механизма третьего класса, состоящего из лишенной поводка

цепи третьего класса, остальные поводки которой пристегнуты к основе.

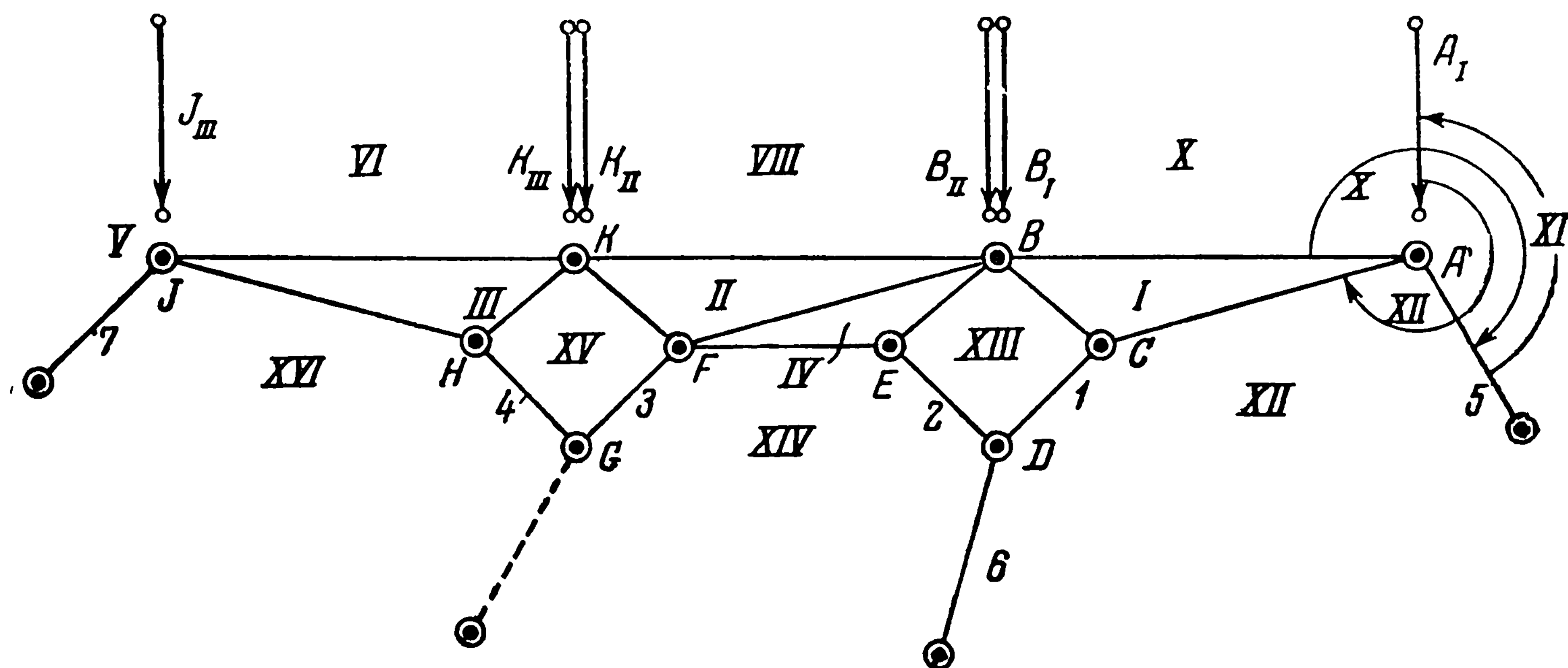
Произвольно же задаться нужно будет величиной скорости уже другой точки, этому механизму не принадлежащей, например точке H. Задаться ею произвольно можно потому, что звено *III* с двумя своими прикрепленными к основе поводками *4* и *7* образует другой механизм, вполне независимый от первого.

Такое видоизменение общего приема, при котором, вместо произвольного задания величины скоростей точек A и D, были бы произвольно заданы величины их для A и H, вносит в построение картин скоростей весьма существенное осложнение. Вместо двухповодковых групп, которыми можно было обойтись для фиг. 188, мы должны иметь дело с цепью третьего класса, построение картины скоростей точек которой значительно сложнее.

Но слияние шарниров не только может внести осложнения, но и упрощения, если учесть его надлежащим образом. Только прием, которым придется тогда пользоваться, не будет уже вытекать систематически из всех наших исследований, все по той же причине, что влияние слияния шарниров систематически не исследовано, а будет приемом случайным, основанным не на данных исследования, а на догадке. Осветив, как систематическим путем решить поставленную задачу, мы для практического ее разрешения все же употребили прием именно последнего типа, так как он дает наиболее быстрое решение. Мы сочли позволительным применение такого приема потому, что рассматриваемая цепь не является ни одним из исследованных нами типов, хотя и подходит довольно близко к одному из них.

Легко заметить, что устранение в данной системе (см. фиг. 187) поводка *6* обратит жесткое соединение с устоем в двухповодковый механизм. Считая поводок *7* за кривошип, мы отметим *4*, *III* как первую двухповодковую группу, *3*, *II* — как вторую, *I*, *5* — как третью, *I*, *2* — как четвертую. Этим обстоятельством пользуется уже Мюллер-Бреслау, предлагая расчет сооружения вести, начиная с постройки линии влияния опоры

D, потому что, по удалении ее, легко строятся мгновенные центры звеньев полученного механизма, которыми он пользуется при построении линии влияния. Что мгновенные центры строятся легко, с нашей точки зрения очевидно, потому что приходится иметь дело с двухповодковым механизмом, в котором это является простой задачей. Для определения реакции опоры в D или, с нашей точки зрения, напряжения поводка 6,

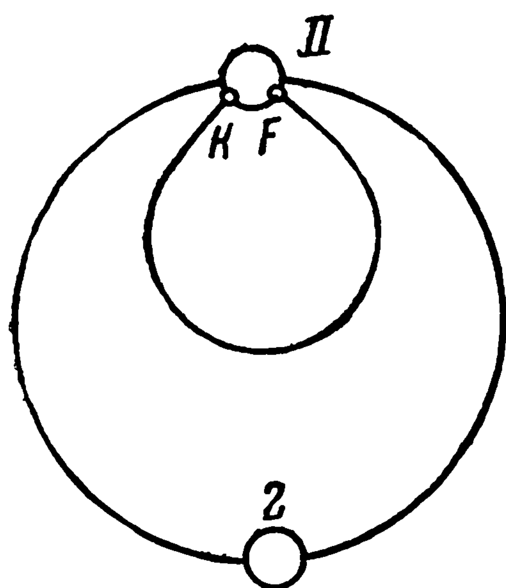


Фиг. 189.

достаточно одной только картины скоростей, а затем является возможность пользоваться полигональным методом, так как приходится дело иметь с двухповодковым механизмом, в котором можно обойтись уже без дальнейшего применения кинематического метода. Указанный здесь прием оказался бы нецелесообразным в цепи исследованного типа фиг. 188.

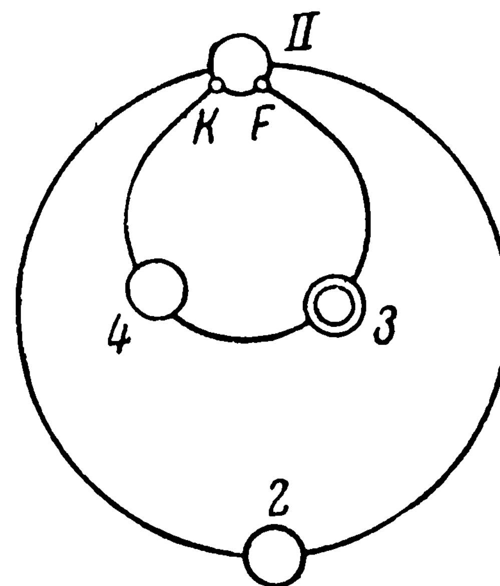
На фиг. 189 наше мостовое сооружение изображено в том виде, в котором его следует представить, чтобы иметь возможность построить диаграмму моровских напряжений и определить из нее шарнирные давления, исходя из принципа взаимных многогранников. Звенья *I*, *II*, *III* предполагаются нагруженными равномерной сплошной нагрузкой, которая изображена уже распределенной на узлы. При этом в узлах B и K

не следует смешивать сил, приложенных к звеньям *I* или *II*, *II* или *III*, так как от переноса сил на другое звено или же на шарнирный болт существенно изменятся шарнирные давления. Поэтому, схематически, действующие по одной прямой силы B_I и B_{II} показаны, хотя и близкими, но параллельными; то же относится и к силам K_{II} и K_{III}. Такое схематическое изображение тем более важно, что не нужно забыть отметить граней *VII* и *IX*, между ними лежащих; соответствующие им вершины в проекции взаимного многогранника весьма существенны при определении шарнирных давлений.



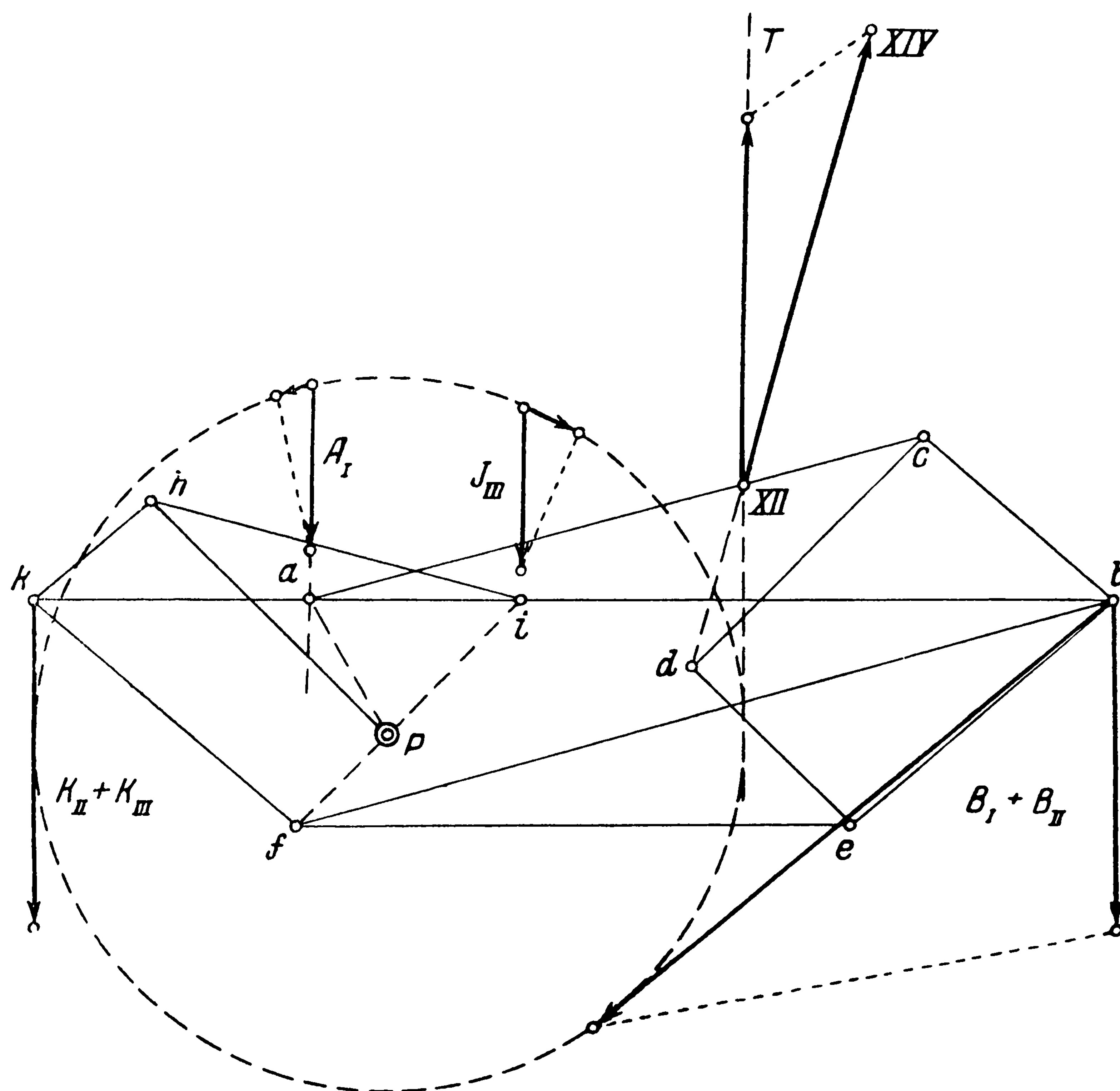
Фиг. 190.

Следует отметить, что место подвижных опор или же прямых действия их неизвестных реакций на фиг. 188 занимают поводки *5*, *6* и *7*. Напряжения этих поводков будут соответствовать реакциям опор и не будут зависеть от длины этих поводков, почему и возможно на место бесконечно длинных поводков поставить поводки конечной длины. В точке *G* пунктиром показано, что не должно забыть о прямой действия приложенной здесь реакции неподвижной опоры, направление которой, однако, неизвестно. Можно было бы и здесь показать два поводка, как угодно направленных, но образующих между собой конечный угол; это соответствовало бы разложению неизвестной опорной реакции на два заданных направления; мы этого не делаем, потому что нет в этом надобности, а между тем направления можно выбрать легко мало удачными с точки зрения чертежа. В самой разметке на грани не встречается чего-либо особенного. Разметка плоских углов около *A* получилась сложной только потому, что сила A_I изображена выше узла;



Фиг. 191.

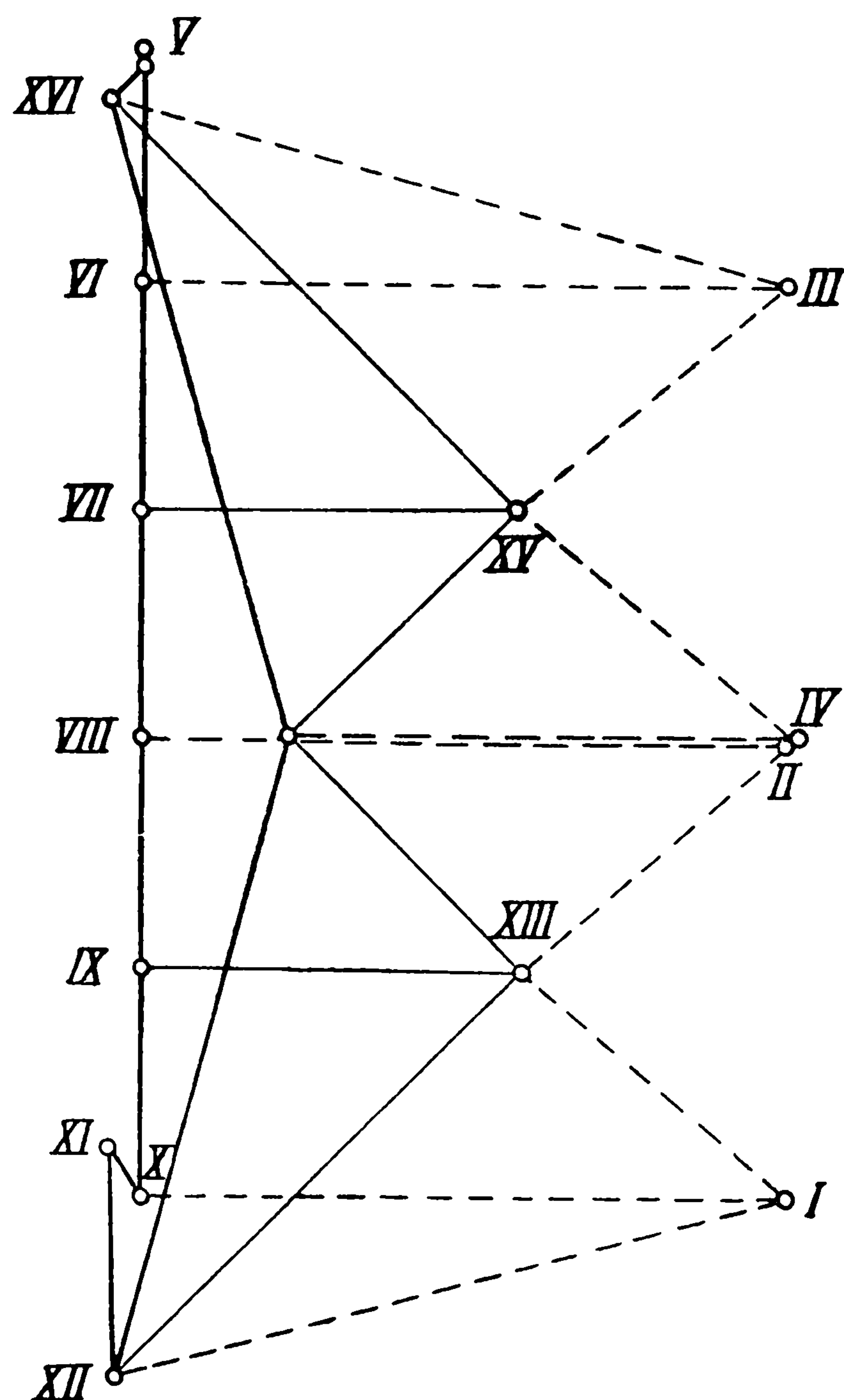
будь она изображена ниже, разметка была бы совершенно простой. Четырехшарнирное звено *II* заменено, как и полагается, фермочкой из пяти стержней и дает начало двум граням *II* и *IV*.



Фиг. 192.

На фиг. 192 построена картина скоростей упомянутого двухповодкового механизма, как обычно, так, чтобы изображающие отрезки были параллельны изображаемым, а векторы скоростей — повернуты на прямой угол. При этом задавалась скорость точки J. Через изображающие точки k, a, i, b проводим вертикальные прямые, изображающие линии действия приложенных сил, избираем приводящую окружность касательной к прямой

действия сил, приложенных в узле K. Эти две силы, как действующие во вспомогательном рычаге по одной и той же прямой, могут быть сложены в одну; то же относится к нагрузке узла B. За точки приложения этих сил выбираем k и b, так как они лежат вне приводящей окружности; точки же приложения сил A_I и J_{III} избираем на приводящей окружности.



Фиг. 193.

Все эти силы поворачиваем около их точек приложения, не изменяя их моментов относительно полюса рычага, до совпадения с касательными к приводящей окружности и уравновешиваем одной силой, направленной по касательной T к последней. Через d проводим прямую, изображающую линию действия силы, заменяющей давление поводка 6 в шарнире D, направленное по его оси, так как поводок не нагружен. Эта прямая пересечет касательную T в точке XII, которую принимаем за точку приложения уравновешивающей. Повернув последнюю, с сохранением ее момента, около точки приложения, получаем искомое напряжение поводка, или реакцию опоры D в виде отрезка $XII - XIV$. Это те ее обозначения, которыми реакция должна быть отмечена на взаимной диаграмме напряжений.

Переходим теперь к построению последней (фиг. 193). Многоугольники равновесия будем строить для узлов в следую-

щем порядке: D, C, A, E, B, F, K, H, J. При этом будем внешние силы вводить по мере того, как будем переходить к узлам, к которым они приложены. Обход узлов совершается по часовой стрелке, если нет возвратных граней. Таким образом, мы не строим предварительно многоугольника внешних сил, в число которых нужно включить и реакции опор, но, в соответствии с указанными нами общими приемами, реакции опор определяем из диаграммы моровских напряжений, так что многоугольник внешних сил окажется построенным постепенно.

Закончив построение диаграммы моровских напряжений, которое легко проследить по чертежу, пользуясь сделанными нами указаниями, вносим в эту диаграмму шарнирные давления. Шарнирные давления в J, D и A равны моровским напряжениям поводков, так как последние не нагружены, и соответственно изобразятся отрезками *XVI—V*, *XII—XIV*, *X—XI*. Так как двухшарнирные стержни *1*, *2*, *3*, *4* тоже не нагружены, то давления в шарнирах H, F, E, C тоже будут равны моровским напряжениям этих стержней и выразятся соответственно отрезками *XV—XVI*, *XIV—XV*, *XIII—XIV*, *XII—XIII*. Давление в шарнире G выразится отрезком *XIV—XVI*, так как прямая, изображенная пунктиром (см. фиг. 189), является проекцией ребра, заключенного между гранями *XIV* и *XVI*. Давления в шарнирах K и B выразятся соответственно отрезками *VII—XV* и *IX—XIII*, так как при разъединении этих шарниров грани соответственных обозначений сольются.

Что касается общего вида диаграммы фиг. 193, то она носит явные следы некоторой симметрии; это заставляет думать, что несовпадение прямых *VIII—IV* и *XIV—II* в одну прямую, а точек *IV* и *II*—в одну точку является результатом неточности чертежа, величина которой может быть оценена по невязке в точке *V*. Предусмотреть эту симметрию a priori вряд ли найдется достаточно данных. Даже если предположить, что реакция опоры G будет направлена по прямой симметричной с осью поводка *6*, то все же разные наклоны поводков *5* и *7* нарушают

симметрию фермы, поэтому говорить о необходимости слияния упомянутых точек и прямых можно только предположительно.

Что касается расчета отдельных фермочек, то он может быть произведен, как только определились внешние силы, действующие на них в узлах A, B, K, J, H, F, E, C, из которых неизвестными были шарнирные давления. Нагрузка при этом должна быть распределена на узлы этих фермочек, а последние рассчитаны в зависимости от их структуры, при этом они могут быть и фермочками статически неопределимыми, и это не изменит всех наших предыдущих рассуждений.

Мы избрали в виде примера сооружение, которое не вполне соответствует какому-либо исследованному нами типу, но, до известной степени, близко к одному из них. При этом нам удалось показать, как данные наших предыдущих исследований могут быть распространяемы и с пользой применяемы к типам, близким к исследованным. Но главная цель, которая заставила нас остановиться на этом именно примере, была другая. Быть может читателю, имевшему терпение пройти весь путь наших длинных изысканий, показалось, что автор забрался уже в слишком отвлеченную от практических приложений область, что говорить и столь подробно изучать такие разветвленные цепи, какими являются цепи второго и четвертого класса, пожалуй, и не стоило бы. Приведенный пример с убедительностью показывает, что не в том следует упрекнуть автора, что он зашел в слишком дальние и отвлеченные области, а уже скорее в том, что он слишком рано остановился. Ведь вот же (см. фиг. 187) перед глазами читателя вовсе не такое уже сложное мостовое сооружение, всего только три отдельных фермочки, два быка, два береговых устоя, и уже это — тип, лежащий за пределами исследованной области.

Мы видим, что вопросы о переносе поводков в цепях четвертого класса, о перегруппировках в них диагональных цепей, которыми мы не занимались, вовсе не такие уже оторванные от всех жизненных применений вопросы, а затем также и огромный по своему объему вопрос об образованиях, получаемых из

нормальных цепей слиянием в них шарниров и о их свойствах, об общих приемах приложения к полученным из них фермам и механизмам начал кинематики и статики. Ведь если теория многоповодковых цепей мало плодотворна в том виде, в котором мы ее оставили, в теории ферм, где она скорее имеет случайные применения, то это зависит главным образом от того, что вопрос о слиянии шарниров не разрешен.

В теории механизмов этот вопрос не является особенно существенным; осуществление в них многозвенных шарниров практически настолько трудно, что стараются шарниры расчленить. В фермах этого нет, потому что движения в шарнирах, даже там, где их осуществляют (см. фиг. 187), малые; на самом же деле мы имеем в них подавляющее преобладание клепаных, жестких узлов. Удачное разрешение этого вопроса раскрыло бы, вероятно, довольно широкие перспективы приложениям в теории ферм новых начал, изложенных в нашем труде.

Но если автор ограничил область своих исследований, то думается, что причины на это были достаточно уважительны. Почти невероятным должно показаться, что в отрасли науки, которой не так уже мало занимались в XX веке, оказалась область, к которой близко подходили, но которая все же оставалась неведомой, запечатанной как бы семью печатями. Найдя ключ к этой области в крайне простой мысли о развитии поводка, автор оказался перед огромной задачей. Как человек, вступивший в первобытный лес, он должен был хозяйничать в ней совершенно самовластно и самостоятельно; он не нашел здесь ни проложенных дорог, ни протоптанных тропинок, которые привели его лишь на границу этой области. Но область эта весьма широкая, для успешного изучения ее во всей полноте мало того ключа, идеи развития поводка, которая раскрыла эту область перед глазами наблюдателя, позволила определить ее содержание, разбить ее на участки, подлежащие исследованию. Последних оказалось много, очень много, материалу для исследований с избытком достаточно на целую человеческую жизнь. Но, вероятно, имеются к отдельным участкам

и другие, более удобные подступы, ключ к которым еще не найден. Быть может, найти его суждено и другому поколению людей. Вот то, что автор может противопоставить упреку в этом направлении.

Теперь же, обращаясь к содержанию настоящей главы, отметим, что оно может быть охарактеризовано как приложение к нормальным цепям и, в частности, к образованным из них механизмам двух великих принципов: принципа возможных перемещений и принципа взаимных многогранников Максвелла. Обнаружены в последнем еще некоторые новые соотношения, относящиеся к определению шарнирных давлений, запутанным расположениям граней, случаям, приводимым к предельным. Но ясно видно, что знания одних только общих принципов недостаточно, чтобы успешно применять их в теории механизмов. Приемы применения варьируются, в зависимости от структуры цепей, входящих в состав механизма, от класса и типа их.

Прежде чем применять великие общие принципы, нужно суметь расчленить механизм на те основные элементы, которые в нашем труде впервые указаны: на нормальные многоповодковые цепи, из которых механизмы составлены. Лишь когда это выяснено, становится известным, как именно применить указанные общие принципы к механизму, а также к жесткому соединению, образованному из устоя и одной или ряда наслоений нормальных цепей. Все это с ясностью указывает на ту органическую связь, которая существует между нашей классификацией, основанной на изучении более сложных элементов механизмов, чем доселе известные, и свойствами механизмов, в частности приемов их кинематического, статического и динамического изучения.

Один упрек казался автору более существенным, чем другие, которые могут быть сделаны указанной классификации. Мы изучаем строение механизма, исходя из кривошипа, за который, в общем случае, считаем любое звено, связанное кинематической парой с устоем. Мы сказали, что для определенности кривошипом можно называть то звено механизма, которое

способно совершать полный оборот, а если бы их оказалось несколько, то из них выбрать то, которое вводит движение. В силу особых преимуществ практического осуществления вращательного движения такое звено всегда должно найтись. Но нередко сложный механизм разбивают на отдельные механизмы, хотя бы так, как мы это сделали с механизмом, который получается из жесткого соединения с устоем образования, показанного на фиг. 178, устранением одного соединительного стержня.

Хотя бы вся система заимствовала движение от вращающегося звена, но нельзя утверждать, что каждый из отдельных механизмов, на которые мы разбили систему, будет обладать звеном, совершающим полный оборот. Чтобы не получилось многозначности классификации, в зависимости от того, из какого именно кривошипа исходить, приходится в таких случаях, где такого прямого указания, как звено, совершающее полный оборот и вводящее движение, не имеется, и вообще в могущих представиться в этом смысле затруднительных случаях, прибегнуть к условности. За кривошип условимся в таких сомнительных случаях считать то звено, которое при классификации обнаружит простейшую структуру механизма, позволит разбить его на кривошип и ряд простейших нормальных цепей. Этим устранятся возможные противоречия в классификации. Без условностей вряд ли может существовать какая бы то ни было классификация. Но в нашей классификации имеется только эта одна условность. Все остальное вытекает из сущности изученных образований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Н. Е. ЖУКОВСКИЙ

ОТЗЫВ О СОЧИНЕНИИ Л. В. АССУРА „ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИХ СТРУКТУРЫ И КЛАССИФИКАЦИИ“ *

Автором представлены на защиту I и II части названного сочинения, из которых I часть заключает в себе классификацию механизмов, а II часть посвящается определению скоростей различных точек механизмов и сил, действующих на шарнирах и на звенья механизмов при заданных внешних силах. Основная идея, легшая в исследование Л. В. Ассура, заключается в рассмотрении трехшарнирных звеньев, прикрепленных к трем точкам механизма тремя поводками. Такое звено, будучи прикреплено концами поводков к неподвижной основе, представляет собой жесткое соединение.

Автор предлагает называть его трехповодковой группой, а диаду Сильвестра, состоящую из двух поводков, соединенных шарниром, — двухповодковой группой. Если цепь, составленная из ряда шарнирно-соединенных звеньев, могущих иметь каждое не более трех поводков, обладает тем свойством, что при закреплении концов всех поводков она обращается в жесткую, статически определимую систему, то таковую цепь автор называет нормальной цепью. Он разделяет нормальные

* См. Н. Е. Жуковский. Полное собрание сочинений, т. VII, стр. 289, 1950, изд. ГИТТЛ.

цепи на четыре класса. Цепи первого класса имеют число поводков на два более числа трехшарнирных звеньев и два концевых звена, причем простейший вид цепи будет, если крайние звенья имеют по два поводка, а промежуточные — по одному. Различные виды нормальных цепей первого класса автор получает перестановкой и развитием поводков. Когда к промежуточным звеньям нормальной цепи первого класса присоединяются новые цепи первого класса без одного поводка, то вся система вместе обращается в нормальную цепь, которую автор относит ко второму классу.

К третьему классу он относит замкнутую нормальную цепь, в которой число поводков равно или меньше числа трехшарнирных звеньев. Более сложные случаи нормальных цепей третьего класса получаются возможными без нарушения нормальности цепи перестановками поводков. Соединяя в кольцевой нормальной цепи два промежуточных звена шарниром (замком) и разбивая ее этим на два кольца, мы получаем нормальную цепь четвертого класса.

К четвертому классу автор относит все остальные нормальные цепи, получаемые из замкнутой цепи третьего класса через введение нескольких замковых шарниров или диагональных замыкающих цепей. Указанные четыре класса нормальных цепей автор относит к первому семейству. Кроме этого, он предлагает еще рассматривать нормальные цепи второго семейства, в которых роль трехшарнирных звеньев играют звенья второго рода. Звенья второго рода представляют целые, замкнутые нормальные цепи, в которых отброшены три поводка и которые представляют жесткую трехповодковую группу по введении этих поводков. Цепи, составленные из звеньев второго рода, как из твердых звеньев, автор называет цепями второго семейства. Аналогично можно получать цепи третьего и высших семейств.

Вводя понятие о нормальных цепях, автор предлагает рассматривать всякий механизм, как кривошип, на который последовательно наращиваются нормальные цепи путем соеди-

нения шарнирами концов поводков нормальной цепи с различными точками механизма.

Класс и семейство механизма по терминологии автора определяются наивысшим классом и семейством цепей, наращением которых механизм образован.

Часть I сочинения автора заключает в себе исследование нормальных цепей с помощью: перестановки поводков, развития поводков и подсчета числа обходов, которые можно сделать, переходя от звена к звену и возвращаясь на исходное звено. Последнее исследование соприкасается с теорией комплексов. Изложение автора, к сожалению, очень растянуто и утомительно для чтения. Очень много места занимает доказательство жесткости цепей при закреплении концов поводков, которое могло бы быть получено в более простой форме.

Самая классификация, в особенности по отношению к семействам, не отличается ясностью и едва ли можно считать доказанным, что под нее всякий воображаемый механизм подойдет единственным образом. Но идею установить структуру механизма помощью указания его образования последовательно нарощаемыми цепями надо считать весьма ценной, так как установление этой структуры сейчас же дает нам кинематические и динамические свойства механизма. Это установление нетрудно в осуществленных механизмах, которые в большинстве случаев образованы нормальными цепями первого класса.

Автор показывает, как под его классификацию подводятся кулисы: Стефенсона, Гуча, Савельева и Гейзингера. Раз механизм расчленяется на нормальные цепи, то задача о скоростях всех его точек сводится к задаче об определении скоростей составляющих нормальных цепей по скоростям концов их поводков. Разрешению этой задачи посвящается часть II сочинения автора. В начале ее автор определяет скорости трехповодковой группы. Он указывает решение этой задачи способами Бурместера, Мора и способом определения точек S. На этом последнем способе, по моему мнению, должно бы быть сосредоточено

главное внимание, так как он не только распространяется на нормальные цепи первого и второго классов, как показывает это автор, но и может быть, по моему мнению, применен для определения скоростей точек звеньев нормальных цепей третьего и четвертого классов.

Автор дает решение задачи о скоростях нормальной цепи третьего класса, имеющей простейший вид замкнутой цепи с одним поводком на каждом звене, с помощью ложных положений Мора. Этот способ является очень сложным, требующим многочисленных построений. На мой взгляд, следует дать предпочтение способу отыскания полюса аффинности, который излагается автором в конце первой главы. Подробный кинематический разбор, сделанный автором в отношении кулис Гейзингера и Савельева, взятых в том виде, как они существуют на практике, выполнен им с помощью построения точек S.

Вторая глава части II посвящена статике механизмов. Предполагая, что структура механизма установлена по способу, указанному в части I работы, автор сводит задачу о величине сил, действующих в каждом из стержней механизма, к задаче о распределении сил в стержнях ферм, представляющих наслоенные на механизм нормальные цепи, предполагая, что концы поводков этих ферм закреплены неподвижно. Приняв во внимание действующие на нормальную цепь внешние силы и считая один из поводков цепи перерезанным, автор определяет силу натяжения этого поводка из условия равновесия, которое выражается способом возможных перемещений или моим способом вспомогательного рычага, которым автор с успехом пользуется. Построив вспомогательный рычаг, мы можем с помощью известных приемов расчета ферм, т. е. способом Риттера или Кульмана, найти натяжение в перерезанном поводке.

Автор рассматривает подобные решения сначала для нормальных цепей первого класса. Если диаграммы натяжения разбивать на отдельные картины для каждого из поводков, то чертеж является более простым. Но обыкновенно представ-

ляется желательным соединение всех карт на одном чертеже, как это делается при исследовании ферм по способу Кремона. Автор излагает этот способ по способу взаимных многогранников Максвелла.

Вторая глава части II оканчивается рассмотрением цепей третьего и четвертого классов. Исследованиями автора задачи статики механизмов, структура которых определена, могут считаться вполне разрешенными.

Заканчивая мой отзыв о работе Л. В. Ассура, замечу, что центральным пунктом работы является трехповодковое звено, которое вместе с диадой Сильвестра является элементами механизмов.

Введение этих новых элементов и установление четырех классов нормальных цепей надо считать очень удачным и несомненным вкладом в теорию механизмов.

На основании сказанного я считаю работу Л. В. Ассура достойной быть допущенной к защите на звание адъюнкта.

Академик

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

ЛЕОНИД ВЛАДИМИРОВИЧ АССУР И ЕГО РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

Леонид Владимирович Ассур родился в 1878 г. в городе Рыбинске, Ярославской губ. (ныне г. Щербаков) в семье акцизного чиновника. Отец Л. В. не получил законченного высшего образования, так как из-за материальных затруднений должен был уйти из Петербургского технологического института.

В раннем детстве Л. В. Ассур потерял мать, и его воспитанием руководили бабушка и отец.

Весной 1897 г. Л. В. окончил Грозненскую гимназию с золотой медалью и осенью того же года поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. В период пребывания Л. В. Ассура в Московском университете преподавание в нем вели выдающиеся русские ученые: П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский и др.

Под руководством Н. Е. Жуковского в Московском университете интенсивно развиваются различные области прикладной механики. Студентам читаются курсы теории механизмов, общей теории машин, термодинамики и теории тепловых машин, теории турбин и т. д. Н. Е. Жуковский привлек к преподаванию общих и инженерных дисциплин в Московском университете крупнейших ученых и инженеров: академика С. А. Чаплыгина, профессоров Н. И. Мерцалова и А. И. Сидорова и др.

Созданный проф. Ф. Е. Орловым механический кабинет под руководством Н. Е. Жуковского стал расширяться, попол-



Л В. АССУР

няясь экспериментальными установками по исследованию вопросов общей механики, аэромеханики и гидромеханики.

Таким образом, Московский университет в тот период был рассадником не только физико-математических, но и прикладных, инженерных, общетехнических знаний, к которым в первую очередь относилась теория механизмов и машин.

Все это не могло не оказать большого влияния на формирование научных интересов Л. В. Ассура. Он усиленно занимается изучением инженерных дисциплин: слушает курсы лекций, читаемых по этим дисциплинам, посещает специальные упражнения, выполняет графические работы и курсовые проекты. Исключительное влияние на Л. В. Ассура оказали лекции, читавшиеся Н. Е. Жуковским и Н. И. Мерцаловым. Эти лекции отличались ясностью изложения, глубокой трактовкой вопросов, строгостью математических доказательств и наглядностью, достигавшейся широким использованием геометрических представлений.

Увлечение Л. В. Ассура задачами техники побудило его после окончания Московского университета в 1901 г. и получения диплома первой степени поступить в Московское высшее техническое училище.

Здесь он продолжает углублять и развивать свои инженерные способности под руководством проф. Н. И. Мерцалова, который в то время читает ряд курсов в Университете и Московском высшем техническом училище. Одновременно с этим Л. В. продолжает встречаться с Н. Е. Жуковским, слушает лекции выдающихся инженеров и профессоров МВТУ: А. П. Гавриленко, А. И. Сидорова, С. А. Федорова и др.

Пребывание Л. В. (с 1897 по 1906 г.) в Московском университете и Московском техническом училище совпало с периодом серьезной перестройки преподавания механических и технических дисциплин в этих старейших русских высших школах. Этой перестройкой руководил Н. Е. Жуковский. В Московском университете Н. Е. Жуковский все большее и большее внимание уделяет вопросам прикладной механики,

гидромеханики и аэромеханики. В своих лекциях и докладах Н. Е., излагая общетеоретические вопросы, иллюстрирует их различными примерами из практики, демонстрирует построенные им модели, проводит опыты. С особой настойчивостью он прививает своим слушателям любовь к экспериментированию, заставляет их вдумываться в те вопросы, которыми интересуется практика. В своих слушателях он воспитывает качества научных исследователей, а не только педагогов.

В Московском техническом училище и состоящем при нем Политехническом обществе Н. Е. Жуковский объединяет и возглавляет наиболее передовую группу ученых-техников. Вместе с ними Н. Е. подводит глубокую теоретическую базу под основные машиностроительные дисциплины. В период пребывания Н. Е. в Московском техническом училище преподавание в нем технических дисциплин было поднято на исключительно высокий уровень, значительно превосходивший уровень преподавания в зарубежных высших технических школах.

Роль Н. Е. Жуковского в развитии технических знаний прекрасно понимал весь коллектив Московского технического училища, удостоивший в январе 1911 г. Н. Е. звания инженера-механика.

Одним из ближайших соратников Н. Е. Жуковского в Московском университете и Московском техническом училище был проф. Н. И. Мерцалов. Н. И. Мерцалов являлся выдающимся специалистом в области теории механизмов и машин. Лекции по теории механизмов и машин, которые он читал в Московском университете и Московском техническом училище, отличались самобытностью и оригинальностью изложения. Так же, как и Н. Е. Жуковский, Н. И. Мерцалов был далек от влияния немецкой школы Рело и его последователей. Изложение теории механизмов и машин Н. И. ведет на основе самого широкого использования геометрических методов. Он не только решает задачи анализа механизмов, но и ставит и блестяще разрешает трудные задачи синтеза механизмов. Н. И. Мерцалов впервые в мировой науке излагает основы ди-

намики машин и создает первый курс динамики механизмов и машин.

Выдающиеся научные труды по теории механизмов и машин, принадлежавшие Н. Е. Жуковскому и Н. И. Мерцалову, их взгляды на значение для инженерной практики теоретических исследований не могли не оказать решающего влияния на формирование научных и инженерных интересов Л. В. Ассура.

Непосредственно после окончания Московского технического училища в 1906 г. Л. В. Ассур поступает на инженерную работу. С 1906 по 1908 г. он состоял помощником заведующего общественными машиностроительными мастерскими в Петербурге. При его непосредственном участии в тот период были изготовлены конструкции четырех металлических мостов в Петербурге: Аларгина, Пантелеймоновского, Михайловского и Введенского.

К 1906 г. относится первая работа Л. В. Ассура «К вопросу о плавности хода паровых машин», опубликованная в Бюллетенях Политехнического общества при Московском техническом училище. В этой работе Л. В. Ассур подвергает критике работы Радингера и Штрибека, посвященные рассмотрению вопроса о плавности хода паровых машин и ударах в кинематических парах кривошипно-шатунного механизма. Л. В. Ассур показывает, что для рассмотрения вопроса о положениях, в которых будет иметь место соударение элементов кинематических пар, необходимо произвести точный учет сил инерции шатуна и ползуна и построить годографы давлений в кинематических парах. Он дает полный анализ механизма паровой машины с учетом сил инерции шатуна и ползуна, для чего предлагает аналитический и графический методы исследования.

Осенью 1907 г. Л. В. Ассур был приглашен в Петербургский политехнический институт, в котором он сначала вел занятия по машиностроительному черчению на механическом отделении, а с января 1908 г. стал вести упражнения по теоретической механике на кафедре, которой руководил тогда проф. И. В. Мещерский. С осени 1908 г. Л. В. было поручено

проф. В. Л. Кирпичевым руководство упражнениями по прикладной механике (теории механизмов и машин).

К этому периоду относится работа Л. В. Ассура «Аналоги ускорений и их применение к динамическому расчету плоских стержневых систем», опубликованная в «Известиях С.-Петербургского политехнического института».

Под аналогами ускорений Л. В. Ассур понимает ускорения точек звеньев кинематической цепи, полученные в предположении постоянства угловой скорости ω ведущего звена и равенства нолю его углового ускорения ε. Он показывает, что эти скорости и ускорения являются функциями только конфигурации механизма, т. е. зависят только от геометрии механизма. Определение действительных ускорений точек звеньев кинематической цепи может быть сделано с помощью плана скоростей и плана аналогов ускорений путем простейших арифметических действий.

Так, если угловая скорость ω ведущего звена кинематической цепи принята постоянной и равной единице, т. е. $\omega = 1$, а угловое ускорение ε ведущего звена принято равным нолю, т. е. $\varepsilon = 0$, то соответственно скорости и ускорения какой-либо точки M могут быть обозначены через v_φ, a^n_φ и a^t_φ, где v_φ — скорость точки M, a^n_φ — нормальное ускорение точки M, a^t_φ — тангенциальное ускорение точки M.

Значок φ при величинах v_φ, a^n_φ и a^t_φ обозначает зависимость этих величин только от положения ведущего звена, определенного его углом поворота φ.

Действительные скорости и ускорения точки M будут соответственно равны:

$$v_M = v_\varphi \omega,$$

$$a^n_M = a^n_\varphi \omega^2,$$

$$a^t_M = a^t_\varphi \omega^2 + v_\varphi \varepsilon.$$

Таким образом, Л. В. Ассур указывает тот путь решения задач кинематического исследования механизмов, который

получил свою законченную форму в знаменитом исследовании Н. Е. Жуковского «Сведе́ние динамических задач о кинематической цепи к задачам о рычаге» (Полн. собр. соч., т. 1, 1937 г., стр. 567). Работа Н. Е. Жуковского была доложена в Московском математическом обществе 16 декабря 1908 г., т. е. в год опубликования Л. В. Ассуром его сочинения. Повидимому, Н. Е. Жуковский и Л. В. Ассур одновременно и независимо друг от друга пришли к аналогичным результатам, но дальнейший путь использования полученных выводов оказался различным *. Л. В. Ассур недооценил полученных результатов и отказался от их использования при исследовании механизмов с одной степенью подвижности. Так, он пишет:

«В системе с одной степенью свободы вряд ли можно ожидать какой-либо пользы от применения аналогов ускорений, по той простой причине, что вся совокупность движений системы определяется одним планом скоростей и ускорений. Обращаемся поэтому к рассмотрению движения системы с двумя степенями свободы». И, далее, он применяет аналоги ускорений для решения задач кинематического исследования механизмов с несколькими степенями свободы. При решении этих задач он впервые применяет графический метод определения частных производных от скоростей путем построения планов скоростей и планов аналогов ускорений для действительного и возможного движений.

Далее, с помощью аналогов ускорений Л. В. Ассур решает задачу о кинетостатическом исследовании механизмов. Последняя задача представляет больше методический интерес, так как предложенное Л. В. Ассуром решение является весьма громоздким и, естественно, не нашло широкого применения в теории механизмов. Метод исследования механизмов с несколькими степенями свободы представляет значительный интерес, особенно в настоящее время, когда подобные механизмы исполь-

---

* Н. Е. Жуковский в своей работе дает ссылку на работу Л. В. Ассура.

зуются в целом ряде современных конструкций машин и приборов.

В отличие от Л. В. Ассура, Н. Е. Жуковский использовал понятие об аналогах ускорений применительно к исследованию механизмов с одной степенью подвижности. Н. Е. Жуковский дает решение основной задачи динамики машин — задачи о движении машины под действием заданных сил. Таким образом, благодаря работам Л. В. Ассура и Н. Е. Жуковского метод аналогов ускорений явился мощным средством для исследования самых различных вопросов кинематики и динамики механизмов.

В 1909 г. в «Известиях С.-Петербургского политехнического института» была опубликована вторая работа Л. В. Ассура, посвященная аналогам ускорений, «Основные свойства аналогов ускорений в аналитическом изложении». В этой работе он дает, в аналитической форме, обобщение изложенного в первой работе метода определения частных производных от координат точек системы для случая системы с n степенями свободы. В этой работе отсутствуют примеры приложения развитого Л. В. Ассуром метода к конкретным задачам теории механизмов, но принципиальное ее значение является весьма существенным для общей теории механизмов с несколькими степенями свободы.

В 1910 г. Л. В. избирается штатным преподавателем Петербургского политехнического института, в котором ведет занятия в основном по курсу прикладной механики. В 1911—1912 гг. Л. В. сдает экзамены на степень адъюнкта Политехнического института. В качестве основного предмета по специальности он сдает курс прикладной механики и в качестве дополнительного предмета — курс теоретической механики. С осени 1911 г. Л. В. Ассуру поручается чтение курса теории регулирования машин. К этому периоду деятельности Л. В. Ассура относятся две его работы, носящие научно-методический характер.

Первая работа «Картины скоростей и ускорений точек плоских механизмов» посвящена определению скоростей и ускорений механизмов с низшими парами. В этой работе изла-

гаются необходимые теоремы для определения скоростей и ускорений и соотношения между скоростями и ускорениями точек звеньев, имеющих плоско-параллельное движение. Уже в этой работе Л. В. Ассур исследует механизмы, образованные двухповодковыми группами, путем последовательного рассмотрения отдельных групп. Но в этой работе принцип образования механизмов путем наслоения групп только «нащупывается» Л. В. Ассуром, и там, где этот принцип применяется им, он дает быстрое и удобное решение задачи.

В этой же работе Л. В. Ассур применяет для исследования трехповодковых групп метод особых точек, получивших впоследствии название «метод точек Ассура». Метод ложных положений Л. В. Ассур рассматривает как соподчиненный методу особых точек, т. е. считает его применение целесообразным только в случае невозможности нахождения на чертеже особых точек. Любопытно отметить, что в том случае, когда Ассур отходит от принципа образования механизма путем последовательного наслоения групп, он рекомендует применение метода ложных положений, считая, повидимому, метод особых точек для этих случаев неприемлемым. Так, например, он рассматривает механизм, образованный из двух шарнирных четырехзвенников путем введения одного звена, входящего в две кинематические схемы вращения с шатунами. Такой принцип образования механизмов значительно позднее предложил Линен. Этот метод образования механизмов, широко впоследствие культивировавшийся немецкой школой, намного уступает методу образования механизмов, развитому позже Л. В. Ассуром. Применив первый метод, Л. В. Ассур не увидел, что для исследования механизма проще всего использовать метод особых точек, изложенный им в той же работе, и что полученный механизм принципиально ничем не отличается от ранее рассмотренного механизма с трехповодковой группой.

Таким образом, в этой работе мы видим поиски Л. В. Ассуром путей решения задач кинематического исследования плоских механизмов.

Во второй работе, относящейся также к 1911 г., «Графические методы определения момента инерции маховиков», написанной совместно с К. Э. Рерихом, излагается приближенный метод определения момента инерции махового колеса, с учетом сил инерции звеньев механизма. Работа носит в основном характер методического руководства для студентов.

С весны 1915 г. Л. В. Ассур начинает чтение специального курса теории механизмов в Петроградском политехническом институте. Одновременно с этим он ведет преподавание теоретической и прикладной механики в Петроградском технологическом институте.

13 февраля 1916 г. Л. В. защищает при Петроградском политехническом институте диссертацию на тему «Исследование плоских механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации». Официальными оппонентами по диссертации были проф. Н. Е. Жуковский, заслуженный проф. Казанского университета Д. Н. Зейлигер и проф. Петроградского политехнического института А. А. Радциг.

Н. Е. Жуковский, отмечая недостатки работы, к которым он в первую очередь относил неясность и растянутость изложения, сложность отдельных доказательств и их недостаточность, одновременно с этим пишет: «Идея установить структуру механизма помощью указания его образования последовательно нарощаемыми цепями, надо считать весьма ценной, так как установление этой структуры сейчас же дает нам кинематические и динамические свойства механизма»*.

Таким образом, Н. Е. Жуковский считает наиболее ценным в работе не отдельные методы исследования различных кинематических цепей, а принцип образования механизмов путем последовательного наращения кинематических цепей, получивших впоследствии название «групп Ассура». Далее, Н. Е. Жуковский подчеркивает то обстоятельство, что анализ структуры меха-

* См. сноску на стр. 571.

низма открывает путь к его кинематическому и динамическому исследованиям. В настоящем издании эта работа Л. В. Ассура публикуется полностью. Сравнение работы Л. В. Ассура с другими работами, посвященными структуре механизмов, в частности, с работами Бурместера, Грюблера, Раттергауза и других последователей школы Рело, показывает, что им вопрос о структуре механизмов изучен несравненно глубже и обстоятельнее.

В самом деле, учение Ф. Рело о кинематических парах было крупнейшим вкладом в теорию структуры механизмов, так как оно позволило установить структурную общность многих простейших механизмов. Но Рело в изучении структуры механизмов не пошел далее рассмотрения наиболее элементарных кинематических цепей. Его попытка развить свои идеи и дать общую классификацию кинематических цепей потерпела неудачу. Его последователями (Бурместером, Грюблером, Таубелесом, Линеном и др.) была рассмотрена структура отдельных сложных кинематических цепей, но ни одному из них не удалось создать общей классификации кинематических цепей, основанной на изучении их структуры. Вот почему до сих пор зарубежные ученые в значительной мере рецептурно излагали и излагают структуру и классификацию механизмов и вытекающие из них приемы кинематического и динамического их исследования.

Только Л. В. Ассуру в указанной выше работе удалось блестяще преодолеть многие трудности и создать законченную систему классификации плоских механизмов, вытекающую из теории структуры механизмов и определяющую их кинематические и динамические свойства. Работа Л. В. Ассура явилась наиболее крупным шагом вперед в теории структуры механизмов после появления работы Рело и должна быть поставлена наравне с работами П. Л. Чебышева, Ф. Рело и П. О. Сомова, каждой из которых открывались новые страницы в теории структуры механизмов.

Работа Л. В. Ассура не лишена серьезных недостатков. Она содержит много мест, отличающихся неясностью изложе-

ния, сложностью отдельных доказательств, язык работы очень тяжел, многие методы, излагаемые автором, могут быть заменены более простыми и наглядными. В значительной мере этими недостатками объяснялось и то, что работа Л. В. Ассура в течение многих лет не получала широкого использования в теории механизмов. Возможно, что это объяснялось также и тем, что Л. В. Ассур, желая подчеркнуть общность предлагаемой им системы классификации, рассматривает иногда излишне сложные кинематические цепи, не находящие себе применения в технике. Как бы отвечая на возможный упрек читателей в излишнем увлечении сложными кинематическими цепями, Л. В. Ассур во введении к своей работе пишет: «...лишь та теория может с полным правом претендовать на научное значение, которая в состоянии указать пути практике: дело науки указать *все возможное*, дело практики *выбрать* из возможного практичное».

Задачу дальнейшего развития идей Л. В. Ассура взяла на себя советская школа ученых. Трудами советских ученых были разрешены вопросы не только классификации плоских, но и пространственных механизмов. Учение о структуре и классификации механизмов было использовано в решении практических задач исследования и проектирования механизмов, машин-автоматов и приборов. Советскими инженерами и учеными было выполнено то, о чем писал Л. В. Ассур: из многообразия всевозможных механизмов было выбрано «...из возможного практичное». Таким образом, учение о структуре и классификации механизмов, разработанное Л. В. Ассуром, было не только развито с точки зрения теории, но и получило широкое использование в практике конструирования современных механизмов.

В 1918 г. Л. В. Ассур избирается профессором Петроградского лесного института по кафедре прикладной механики.

По свидетельству его товарищей и сотрудников, внешне Л. В. Ассур производил впечатление замкнутого, сурового

человека. Он отличался большой выдержанностью, спокойным характером большой аккуратностью и педантичностью. Каждый последующий день у него еще накануне был расписан. Л. В. Ассур отличался большой работоспособностью и отдавал почти все свое свободное от преподавания время научной работе. Он очень любил музыку, играл сам и сочинял ее. В музыке был его отдых. Ученики Л. В. Ассура отмечают его требовательность к студентам, большую четкость и ясность его лекций и удачное сочетание аналитических и графических методов решения задач исследования и проектирования механизмов. Он прививал в своих слушателях навыки к самостоятельному мышлению, в частности он часто вместо экзамена практиковал доклады студентов на семинарах.

Л. В. Ассур прожил недолгую жизнь. Скончался он 19 мая 1920 г. после тяжелой операции в полном расцвете своих творческих сил.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] (к стр. 9) К своему труду Л. В. Ассур предпослал «Введение». Введение посвящено краткому историко-библиографическому обзору работ по теории механизмов и машин, опубликованных с конца XVIII до начала XX в. В этот обзор в основном включены работы по структуре и классификации механизмов.

Большое внимание в этом обзоре уделено работам Ф. Рело. Отмечая прогрессивную роль работ Ф. Рело в развитии учения о кинематических парах и кинематических цепях, Л. В. Ассур усматривает существенные недостатки в других разделах теории механизмов, трактуемых Ф. Рело. В частности, Л. В. Ассур считает, что Ф. Рело не справился с задачей изучения структуры пространственных механизмов. Одновременно Л. В. Ассур критикует формалистический подход Ф. Рело при разработке им классификации механизмов с гидравлическими и пневматическими связями, а также при попытках создать буквенную символику для изображения механизмов.

Подробный обзор работ Ф. Рело и его школы понадобился Л. В. Ассуру для того, чтобы противопоставить господствовавшей в начале XX в. за границей школе Ф. Рело свою новаторскую прогрессивную точку зрения. Необходимость в таком обзоре диктовалась также и тем, что работа Л. В. Ассура представляла собой диссертацию, в которой по установившейся традиции требовалось показать, насколько подробно диссертант знаком с имеющейся литературой.

Советскими учеными за последние годы было написано много работ, в которых освещены пути развития теории механизмов как в России, так и за границей, вследствие чего далеко не полный обзор, данный Л. В. Ассуром в его «Введении», не представляет для советского читателя особенного интереса, а потому не включен в настоящее издание.

[2] (к стр. 15) Структурная формула для плоских механизмов впервые была предложена П. Л. Чебышевым в 1869 г. и опубликована им в сочинении «О параллелограмах», которое в настоящее время вошло в полное собрание его сочинений, изданных в 1948 г. (см. Полное собрание сочинений, т. IV, изд. АН СССР, 1948).

Структурная формула для пространственных механизмов была дана П. О. Сомовым в 1887 г. и опубликована им в сочинении «О степенях свободы кинематической цепи» в «Журнале Русского физико-химического общества», в т. XIX.

Таким образом, вопрос о структуре механизмов был решен в гораздо более общем, чем у Грюблера, виде в работах П. Л. Чебышева и П. О. Сомова.

[3] (к стр. 237) Нельзя согласиться с Л. В. Ассуром, что значение задач об определении мгновенных центров вращения уменьшилось с появлением метода планов скоростей и ускорений. Мгновенные центры вращения имеют громадное значение в теории проектирования механизмов, особенно механизмов с высшими кинематическими парами.

В задачах о проектировании механизмов большое значение также имеет зависимость между кривизной взаимно-огибаемых кривых и кривизной центроид в относительном движении. Эти зависимости могут быть легко получены с помощью поворотных кругов, для чего целесообразно использовать теорему Эйлера—Савари (см. Н. И. Мерцалов. Избранные труды, т. I. Прикладная механика, 1950).

[4] (к стр. 248) Метод определения скоростей и ускорений, предложенный Л. В. Ассуром для плоских механизмов первого класса третьего порядка и более высоких порядков, в дальнейшем получил название «метод особых точек» или «метод точек Ассура». Точки, принадлежащие звену, входящему в три кинематических пары, и совпадающие с точками пересечения двух поводков, носят название «точек Ассура».

(к стр. 265) Для решения задач о кинематическом анализе механизмов третьего и четвертого классов Л. В. Ассур применяет весьма громоздкий метод, основанный на некоторых теоремах проективной геометрии. Между тем определение скоростей и ускорений механизмов этих классов может быть выполнено при помощи метода точек Ассура. На это обстоятельство впервые указал Н. Е. Жуковский в своей статье «О механизме Л. В. Ассура» (см. Полное собрание сочинений, т. I, 1937).

Значительно более простые, чем изложенные здесь, методы исследования механизмов высоких классов в дальнейшем были развиты: В. В. Добровольским в работе «Основные принципы рациональной классификации механизмов», в статье «Структура и классификация механизмов», изд. АН СССР, 1939; И. И. Артоболевским в монографии «Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов», ГОНТИ НКТП, 1939.

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ Л. В. АССУРА

1. К вопросу о плавности хода паровых машин. Бюллетени Московского политехн. об-ва, № 8, 1906.
2. Аналоги ускорений и их приложение к динамическому расчету движения плоских стержневых механизмов. Известия С.-Петербургского политехн. ин-та, 1908.
3. Основные свойства аналогов ускорений в аналитическом изложении. Известия С.-Петербургского политехн. ин-та, т. XI, вып. 2, 1909.
4. Die Methode der characteristischen Kurven als Beitrag zur graphischen Auswertung mehrfacher Integrale. Zeitschr. für Math. und Phys., B. 60, 1912.
5. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Часть 1. Учение о нормальных многоповодковых цепях и роль их в образовании механизмов. Известия Петроградского политехн. ин-та, т. XX и XXI, 1914.
6. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Часть II. Приложение учения о нормальных многоповодковых цепях к общей теории механизмов. Известия Петроградского политехн. ин-та, т. XXI, XXII и XXIII, 1915.
7. Дополнение ко второй главе первой части (см. п. 6. — *Ред.*). Известия Петроградского политехн. ин-та, т. XXIV, 1915.
8. Дополнение к первой главе второй части (см. п. 6. — *Ред.*). Известия Петроградского политехн. ин-та, 1918.
9. Схемы геометрического построения некоторых кривых. Петроград, 1916 (литографированное издание).
10. Картины скоростей и ускорений точек плоских механизмов. С.-Петербург, 1911 (литографированное издание).
11. Графические методы определения момента инерции маховиков (совм. с К. Э. Рерихом). С.-Петербург, 1911 (литографированное издание).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УЧЕНИЕ О НОРМАЛЬНЫХ МНОГОПОВОДКОВЫХ ЦЕПЯХ И РОЛЬ ИХ В ОБРАЗОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ

Глава первая. Обзор существующих методов образования новых механизмов 9

Глава вторая. Метод развития поводка. Многоповодковые открытые цепи нормальных типов, простые и сложные; роль их в образовании механизмов методом наслоения. Первые два класса механизмов 20

Дополнение ко второй главе 68

Глава третья. Простые многоповодковые закрытые цепи нормальных типов с простыми и развитыми поводками 95

Глава четвертая. Многоповодковые нормальные цепи четвертого класса. Цепи с замковыми соединениями. Основной тип цепей четвертого класса. Обходность. Исследование возможных аномалий. Тип с многошарнирными бесповодковыми. Проверка цепей по виду, относящихся к этому типу. Перестановка и развитие поводков. Общие приемы исследования, позволяющие отнести неизвестную цепь к четвертому классу 133

Глава пятая. Нормальные цепи высших семейств. Связь между классификацией механизмов и классификацией линейных комплексов. Механизм в общем случае, как образование, состоящее из кривошипа и ряда наслоений нормальных цепей 210

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ УЧЕНИЯ О МНОГОПОВОДКОВЫХ НОРМАЛЬНЫХ ЦЕПЯХ К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

Введение. Основные задачи общей теории механизмов 227

Глава первая. Картины скоростей точек механизма. Чисто графические методы их построения 238

Глава вторая. Статика плоских стержневых механизмов 403

ПРИЛОЖЕНИЕ

Н. Е. Жуковский. Отзыв о сочинении Л. В. Ассура «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации» 571

Академик И. И. Артоболевский. Леонид Владимирович Ассур и его работы по теории механизмов 576

Примечания 588

Научные труды Л. В. Ассура 590

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *Л. М. Бекасова.* Технический редактор *А. А. Киселева*

*

РИСО АН СССР № 5090. Т-05753. Издат. № 3568 Тип. зак. № 418 Подп. к печати 19/IX 1952 г. Формат бум. 70×92. Бум. л. 5: Печ. л. 43,29+5. вклеек. Уч.-издат. 29,7 (0,8 вкл,). Тираж 2500. *Цена по прейскуранту 1952 г. 23 р. 20 к.*

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
64	9 св.	представить	представит
170	8 св.	...звеньями,	...звеньями)
199	16 сн.	группе	группы
478	8 сн.	эквивалента.	эквивалентна.
516	17 сн.	...с коростью шарнирной..	скоростью шарнирной..
540	1 сн.	кинематическая метода	кинематическую методу
587	3 св.	характером большой	характером, большой

Л. В. Ассур.

А. В. АССУР

ИССЛЕДОВАНИЕ
СТЕРЖНЕВЫХ
МЕХАНИЗМОВ



